Séminaire P.LELONG,H.SKODA
(Analyse)
18e et 19e année, 1978/1979.

RELATIONS ENTRE LES NOTIONS DE POSITIVITÉS de P.A.GRIFFITHS et de S.NAKANO POUR LES FIBRÉS VECTORIELS

par J.-P.DEMAILLY et H.SKODA

Introduction.

Ce travail a été motivé par les deux mémoires [3] et [4] du deuxième auteur, dans lesquels on étudie le relèvement des sections holomorphes globales de fibrés vectoriels semi-positifs par un morphisme surjectif. Ces deux mémoires sont construits de manière parallèle, le premier utilisant la notion de semi-positivité au sens de S.NAKANO, le second la semi-positivité au sens de P.Griffiths (cf. la proposition 2 pour les définitions précises) et le passage au fibré en espaces projectifs.

Ce double exposé , se justifiait par le fait que la positivité au sens de S.Nakano était à priori la mieux adaptée au problème posé (et à l'identité de Kodaira pour les fibrés de rang quelconque) tandis que la positivité au sens de P.Griffiths était en revanche la notion la plus géométrique (elle passe aux fibrés quotients) et celle qu'on rencontre le plus souvent dans les exemples concrets (un fibré engendré par ses sections globales est semi-positif en ce sens).

L'objet de ce travail est de montrer qu'on peut, en un certain sens, passer aisément d'un type de positivité à l'autre. Il résulte trivialement des définitions que la semi-positivité de S.Nakano entraîne celle de P.Griffiths. Inversement, on montre que si E est semi-positif au sens de P.Griffiths, alors $E \otimes$ dét E est semi-positif au sens de S.Nakano.

La notion de semi-positivité de S.Nakano apparaît donc, en un certain sens, comme aussi générale et géométrique que celle de P.Griffiths, contrairement au sentiment qui semblait prévaloir parmi les mathématiciens intéressés.
Il en résulte que le deuxième mémoire [4] peut se déduire entièrement du premier et du présent résultat, avec même une substantielle amélioration. Néanmoins, ce second mémoire présente l'intérêt de montrer que la technique de passage au fibré en espaces projectifs de P.Griffiths est efficace, y compris pour l'obtention d'estimations L^2 simples. De même, le théorème d'annulation de P.Griffiths [1] pour les fibrés positifs devient un corollaire du théorème d'annulation de S.Nakano [2]. Plus généralement, le présent résultat semble montrer que l'usage de l'identité de K.Kodaira pour les fibrés de rang quelconque peut désormais concurrencer très efficacement la méthode du passage au fibré canonique de rang 1 au-dessus du fibré en espaces projectifs.

S'il est certain que ce travail a été fortement influencé par les travaux du deuxième auteur, le résultat essentiel est fondé sur une propriété simple des formes hermitiennes sur un produit tensoriel, dont l'idée est due au premier auteur.

Après l'exposé du résultat principal, nous donnons des applications aux théorèmes d'annulation et aux problèmes de relèvement de sections globales.

Exposé du résultat principal.

THÉORÈME 1. - *Soit* E *un fibré vectoriel hermitien de rang* p *au-dessus d'une variété complexe* Ω. *Si* E *est* $\geqslant 0$ *au sens de Griffiths, et si on pose* $\det E = \Lambda^p E$, *alors* $E \otimes \det E$ *est* $\geqslant 0$ *au sens de Nakano. Si* $ic(E) \geqslant \varphi$ *au sens de Griffiths, où* $c(E)$ *désigne la forme de courbure de* E *et où* φ *est une* $(1,1)$*-forme sur* Ω *à valeurs dans le fibré* $\mathrm{Herm}(E)$ *des endomorphismes hermitiens de* E, *alors* $ic(E \otimes \det E) \geqslant \varphi + \mathrm{Tr}_E \varphi \otimes \mathrm{Id}_E$ *au sens de Nakano.*

Démonstration. Il est classique que $c(\det E) = \mathrm{Tr}_E\, c(E)$, et que
$c(E \otimes \det E) = c(E) \otimes \mathrm{Id}_{\det E} + \mathrm{Tr}_E\, c(E) \otimes \mathrm{Id}_E$.

Il suffit d'appliquer la proposition ci-dessous aux formes hermitiennes $ic(E)$ et $ic(E) - \varphi$ dans chaque fibre $E_z \otimes T_z\Omega$, $z \in \Omega$, du fibré $E \otimes T\Omega$.

PROPOSITION 2. - *Soient* E, T *des espaces vectoriels de dimension respectives* p *et* n, E *étant hermitien,* Θ *une forme hermitienne sur* $E \otimes T$. *On suppose* $\Theta \geqslant 0$ *au sens de Griffiths, c'est-à-dire* $\Theta(b \otimes c, b \otimes c) \geqslant 0$ *pour tout* $b \in E$ *et tout* $c \in T$. *Alors* $\Theta + \mathrm{Tr}_E \Theta \otimes \mathrm{Id}_E$ *est* $\geqslant 0$ *au sens de Nakano* (*i.e.* $\geqslant 0$ *sur* $E \otimes T$).

La démonstration sera une conséquence aisée du lemme suivant.

LEMME 3. - *Soient* α *un entier* $\geqslant 3$, u_j *et* v_k, $1 \leqslant j,k \leqslant p$, *des nombres complexes. Pour* σ *décrivant l'ensemble des applications de* $\{1, 2, \ldots, p\}$ *dans le groupe des racines* α*-ièmes de l'unité, on pose*

$$u'_\sigma = \sum_{\lambda=1}^{p} u_\lambda \overline{\sigma(\lambda)}, \quad v'_\sigma = \sum_{\mu=1}^{p} v_\mu \overline{\sigma(\mu)}.$$

Alors pour tous j,k, $1 \leqslant j,k \leqslant p$, *on a l'identité*

$$\alpha^{-p} \sum_\sigma \sigma(j)\, \overline{\sigma(k)}\, u'_\sigma\, \overline{v'_\sigma} = u_j \overline{v}_k \quad \text{si } j \neq k,$$
$$= \sum_\lambda u_\lambda \overline{v}_\lambda \quad \text{si } j = k.$$

Démonstration. Le coefficient de $u_\lambda \overline{v}_\mu$ dans la somme

$$\alpha^{-p} \sum_\sigma \sigma(j)\, \overline{\sigma(k)}\, u'_\sigma\, \overline{v'_\sigma}$$

est donné par

$$\alpha^{-p} \sum_\sigma \sigma(j)\, \overline{\sigma(k)}\, \overline{\sigma(\lambda)}\, \sigma(\mu).$$

Il s'agit de montrer que ce coefficient vaut 1 si $\{j,\mu\} = \{\lambda,k\}$, et qu'il est nul si $\{j,\mu\} \neq \{\lambda,k\}$.

Si $\{j,\mu\} = \{\lambda, k\}$, on a $\sigma(j)\,\overline{\sigma(k)}\,\overline{\sigma(\lambda)}\,\sigma(\mu) = 1$ pour tout σ , d'où le résultat.

Si $\{j,\mu\} \neq \{\lambda,k\}$, l'un des éléments de l'une des paires n'appartient pas à l'autre paire. Comme les quatre indices j,k,λ,μ jouent le même rôle, quitte à changer éventuellement σ en $\bar{\sigma}$, on peut supposer par exemple que $j \notin \{\lambda, k\}$.

Effectuons sur σ la substitution $\sigma \longmapsto \tau$, où τ est défini par

$$\sigma(j) = e^{\frac{2i\pi}{\alpha}}\,\tau(j) \quad , \sigma(\nu) = \tau(\nu) \text{ pour } \nu \neq j .$$

On obtient

$$\sum_\sigma = e^{\frac{2i\pi}{\alpha}} \sum_\tau \qquad \text{si } j \neq \mu ,$$

$$\sum_\sigma = e^{\frac{4i\pi}{\alpha}} \sum_\tau \qquad \text{si } j = \mu ;$$

comme $\alpha \geqslant 3$ et $\sum\limits_\sigma = \sum\limits_\tau$, on a par conséquent $\alpha^{-p} \sum\limits_\sigma \sigma(j)\,\overline{\sigma(k)}\,\overline{\sigma(\lambda)}\,\sigma(\mu) = 0$ dans le cas considéré $\{j,\mu\} \neq \{\lambda, k\}$.

Démonstration de la proposition.

Ayant choisi une base orthonormée de E et une base de T, on désigne par (b_j) , $1 \leqslant j \leqslant p$, les coordonnées de $b \in E$, par (c_ℓ) , $1 \leqslant \ell \leqslant n$, celles de $c \in T$, et par $(x_{j\ell})$ celles de $x \in E \otimes T$.

Si les nombres complexes $a_{jk\ell m}$ sont les coefficients de Θ (avec $a_{jk\ell m} = \bar{a}_{kjm\ell}$) on a les formules :

$$\Theta(b \otimes c , b \otimes c) = \sum_{j,k,\ell,m} a_{jk\ell m}\, b_j\, \bar{b}_k\, c_\ell\, \bar{c}_m ,$$

$$\Theta(x,x) = \sum_{j,k,\ell,m} a_{jk\ell m}\, x_{j\ell}\, \bar{x}_{km} ,$$

$$\mathrm{Tr}_E\, \Theta \otimes \mathrm{Id}_E(x, x) = \sum_{j,k,\ell,m} a_{jj\ell m}\, x_{k\ell}\, \bar{x}_{km} ,$$

avec $1 \leqslant j, k \leqslant p$, $1 \leqslant \ell, m \leqslant n$.

Par hypothèse, $\Theta(b \otimes c, b \otimes c)$ est $\geqslant 0$.

σ décrivant comme dans le lemme l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, p\}$ dans le groupe des racines α-ièmes de l'unité , on pose :

$$x'_{\sigma\ell} = \sum_\lambda x_{\lambda\ell}\, \overline{\sigma(\lambda)} .$$

D'après l'hypothèse de semi-positivité et d'après le lèmme il vient :

$$0 \leqslant \alpha^{-p} \sum_\sigma \sum_{j,k,\ell,m} a_{jk\ell m}\, \sigma(j)\, \overline{\sigma(k)}\, x'_{\sigma\ell}\, \overline{x'_{\sigma m}}$$

$$= \sum_{j \neq k,\ \ell,m} a_{jk\ell m}\, x_{j\ell}\, \bar{x}_{k,m} + \sum_{j,k,\ell,m} a_{jj\ell m}\, x_{k\ell}\, \bar{x}_{km} .$$

On obtient donc :

$$(\Theta + \mathrm{Tr}_E\, \Theta \otimes \mathrm{Id}_E)(x,x) = \sum_{j,k,\ell,m} a_{jk\ell m}\, x_{j\ell}\, \overline{x}_{km} + \sum_{j,k,\ell,m} a_{jj\ell m}\, x_{k\ell}\, \overline{x}_{km}$$

$$\geqslant \sum_{j,\ell,m} a_{jj\ell m}\, x_{j\ell}\, \overline{x}_{jm} \geqslant 0 .$$

Applications.

Il résulte aussitôt du théorème 1 , que tout énoncé concernant les fibrés positifs ou semi-positifs au sens de S.Nakano se traduit en un énoncé correspondant concernant les fibrés semi-positifs au sens de P.Griffiths.

Pour la commodité du lecteur, nous explicitons certains de ces résultats.

Ω désignera désormais une variété kählérienne, faiblement pseudoconvexe (il existe une fonction d'exhaustion de classe C^2 plurisousharmonique), $\mathbb{K}$ le fibré canonique des n formes holomorphes sur Ω.

On a le résultat classique suivant [2] .

THÉORÈME 4 (S.Nakano). - Si E est positif au sens de S.Nakano, on a :

$$H^q(\Omega, \mathbb{K} \otimes E) = 0 ,$$

pour $q \geqslant 1$.

COROLLAIRE 5 (P.A.Griffiths [1]) . - Si E est positif au sens de Griffiths, on a :

$$H^q(\Omega, \mathbb{K} \otimes E \otimes \det E) = 0.$$

Si E est seulement semi-positif au sens de Griffiths, on a :

$$H^q(\Omega, \mathbb{K} \otimes E \otimes \det E \otimes M) = 0$$

pour tout $q \geqslant 1$ et tout fibré en droites $M > 0$.

Remarque.

Si la forme $i\tilde{c}(E)$ définie par :

$$\tilde{c}(E) = (p+1)c(E) - \mathrm{Tr}\; c(E) \otimes \mathrm{Id}_E$$

est $\geqslant 0$ au sens de Griffiths, l'application de la proposition 2 montre que $ic(E)$ est semi-positive au sens de S.Nakano, ce qui répond à la question posée par le second auteur dans [3] , page 608. De plus, si $i\tilde{c}(E)$ est supposée positive au sens de Griffiths, le théorème de Nakano s'applique à E, ce qui redonne le théorème correspondant de P.Griffiths [1] , p. 212.

On traduit maintenant les résultats du second auteur [3] , relatifs à la semi-positivité au sens de S.Nakano, en termes de semi-positivité au sens de Griffiths.

THÉORÈME 6. - Soit $g : E \to Q \to 0$ un morphisme surjectif de fibrés vectoriels holomorphes, hermitiens, de rangs respectifs p et q, au-dessus de Ω. Si E est semi-positif au sens de P.Griffiths et si M est un fibré en droites, hermitien, tel que : $ic(M \otimes (\det E)^{-1}) > ikc(\det Q)$ pour un réel $k > \mathrm{Inf}(n, p - q)$, alors le morphisme g :

$$H^\circ(\Omega, \mathbb{K} \otimes E \otimes M) \to H^\circ(\Omega, \mathbb{K} \otimes Q \otimes M)$$

est surjectif. En particulier pour tout entier $k > \mathrm{Inf}(n, p-q)$ le morphisme g :

$$H^\circ(\Omega, \mathbb{K} \otimes E \otimes \det E \otimes (\det Q)^k) \to H^\circ(\Omega, \mathbb{K} \otimes Q \otimes \det E \otimes (\det Q)^k)$$

est surjectif.

Remarque.

D'après [3], la tensorisation par dét E est inutile si $p - q = 1$.

Si le morphisme g dégénère en certains points, on pose :

$$Z = \{x \in \Omega \mid g(E_x) \neq Q_x\}.$$

On suppose que Z est Ω-négligeable au sens suivant : il existe un ensemble fermé Y, de mesure nulle, contenant Z, tel que $\Omega \setminus Y$ soit faiblement pseudoconvexe et tel que Y soit un ensemble singulier, impropre, pour les fonctions holomorphes localement de carré sommable (en pratique Y est une hypersurface convenable et la condition est toujours réalisée si Ω est de Stein ou projective).

On a alors l'énoncé précis suivant, avec estimations L^2 pour les solutions, dans lequel g^* est l'adjoint de g pour les métriques hermitiennes de E et Q.

THÉORÈME 7. - Soit $g : E \to Q$ un morphisme de fibrés vectoriels, holomorphes, hermitiens, au-dessus de Ω. On suppose que Z est distinct de Ω et Ω-négligeable. On suppose E semi-positif au sens de P.Griffiths. Soit M un fibré en droites hermitien tel que : $ic(M) \geq ic(\det E) + ikc(\det Q)$, pour un réel $k > r = \mathrm{Inf}(n, p - q)$ et soit φ une fonction plurisousharmonique de classe C^2 sur Ω.

Alors pour toute $f \in H^\circ(\Omega, Q \otimes \mathbb{K} \otimes M)$ telle que :

$$\int_\Omega (\widetilde{gg^*} f|f)\,(\det gg^*)^{-k-1}\, e^{-\varphi}\, d\tau < +\infty,$$

il existe $h \in H^\circ(\Omega, E \otimes \mathbb{K} \otimes M)$ telle que :

$$f = gh$$

$$\int_\Omega |h|^2 (\det gg^*)^{-k} e^{-\varphi} d\tau \leq \frac{k}{k-r} \int_\Omega (\widetilde{gg^*} f|f)\,(\det gg^*)^{-k-1}\, e^{-\varphi}\, d\tau,$$

où $\widetilde{gg^*}$ désigne le cotransposé de l'opérateur gg^*.

(le cotransposé $\tilde{u}$ d'un homomorphisme u d'un espace de dimension q est défini par : $\tilde{u}(x_1) \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_q = x_1 \wedge u(x_2) \wedge \ldots \wedge u(x_q)$, pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_q$ de l'espace).

En faisant une hypothèse de stricte positivité sur M, on peut faire $k = r = \mathrm{Inf}(n, p - q)$ dans le théorème 6, et on obtient :

THÉORÈME 8. - <u>Soit</u> $0 \longrightarrow S \longrightarrow E \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$ <u>une suite exacte de fibrés vectoriels, holomorphes, hermitiens sur</u> Ω. <u>Si</u> E <u>est semi-positif au sens de Griffiths et si</u> M <u>est un fibré en droites</u> >0, <u>on a</u> :

$$H^1(\Omega,\ \mathbb{K}\otimes S\otimes \text{dét } E\otimes(\text{dét } Q)^r\otimes M) = 0\ ,$$

<u>et en particulier , le morphisme</u> g :

$$H^\circ(\Omega\,,\ \mathbb{K}\otimes E\otimes \text{dét } E\otimes(\text{dét } Q)^r\otimes M) \longrightarrow H^\circ(\Omega,\ \mathbb{K}\otimes Q\otimes \text{dét } E\otimes(\text{dét } Q)^r\otimes M)$$

<u>est surjectif</u>.

Le théorème 8 admet une version plus précise, avec estimations L^2 pour le relèvement des sections, valable lorsque le morphisme g dégénère, que nous ne reproduisons pas ici pour ne pas alourdir cet exposé. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [3], p. 604 et 606.

Les théorèmes 6,7 et 8 sont démontrés dans [4] par une méthode différente, inspirée de P.Griffiths [1] , mais avec l'entier $r = p - q$ au lieu de $r = \text{Inf}(n,\ p - q)$.

<u>B I B L I O G R A P H I E</u>

[1] GRIFFITHS (P.A.). - Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles, Global analysis, Princeton University Press, p. 185-251, 1969.

[2] NAKANO (S.). - Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds II, Publ. RIMS, Kyoto University, vol. 10, p. 101, 1974.

[3] SKODA (H.). - Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 11, p. 577-611, 1978.

[4] SKODA (H.). - Relèvement des sections globales dans les fibrés semi-positifs, Séminaire P.LELONG,H.SKODA, 1978-1979.