NOMBRES DE LELONG GÉNÉRALISÉS, THÉORÈMES D'INTÉGRALITÉ ET D'ANALYTICITÉ

par Jean-Pierre DEMAILLY

Université de Grenoble I,
Institut Fourier, BP 74,
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 188,
F-38402 Saint-Martin d'Hères

Abstract. Let X be a Stein space and T a closed positive current on X. Given any continuous plurisubharmonic exhaustion function φ on X, a generalized Lelong number $\nu(T,\varphi)$ is introduced, using Monge-Ampère operators defined by Bedford and Taylor. It is shown that the number $\nu(T,\varphi)$ depends only on the behaviour of the function φ near its poles. As a consequence, we derive a very simple proof of Thie's theorem on the integrality of classical Lelong numbers for analytic subsets, as well as a generalized version of Siu's theorem on the analyticity of the level sets associated to Lelong numbers.

0. Introduction

Soit X un espace complexe de Stein, T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur X, et $\varphi : X \longrightarrow [-\infty,+\infty[$ une fonction psh(plurisousharmonique) exhaustive. Nous définissons alors des nombres de Lelong $\nu(T,\varphi)$ qui généralisent ceux classiques de P. Lelong [Le3] ainsi que ceux introduits récemment par C.O. Kiselman [Ki3]. La définition repose sur l'utilisation des opérateurs de Monge-Ampère de Bedford-Taylor [B-T] et peut s'interpréter en disant que $\nu(T,\varphi)$ est la masse de la mesure $T \wedge (dd^c\varphi)^p$ portée par l'ensemble polaire $\varphi^{-1}(-\infty)$. Dans ce cadre, nous démontrons que $\nu(T,\varphi)$ ne dépend que du comportement asymptotique de φ au voisinage des pôles; la méthode utilisée est inspirée de notre article antérieur [De1], mais elle se trouve ici considérablement simplifiée par le fait que l'on peut manipuler des poids φ qui sont seulement continus. La souplesse d'utilisation des nombres de Lelong généralisés permet d'obtenir aussi des démonstrations très simples de résultats classiques concernant les nombres de Lelong usuels; en particulier, ces nombres sont invariants par changement de coordonnées locales (*cf.* [Siu]). Nous redémontrons ensuite le théorème de P.Thie[Th], suivant lequel le nombre de Lelong d'un ensemble analytique X en un point $x \in X$ coïncide avec la multiplicité algébrique de X en x ; ce résultat est une conséquence directe du fait que l'on peut représenter le germe (X,x) comme un revêtement ramifié au dessus de $\mathbf{C}^p$, contenu dans un cône convexe de sommet x . On obtient enfin une version généralisée du théorème de Siu sur l'analyticité des ensembles de niveau associés aux nombres de Lelong; cette version contient comme cas particulier le résultat récent de C.O. Kiselman [Ki3] relatif aux nombres de Lelong

directionnels. La démonstration est inspirée de Kiselman [Ki2] et repose essentiellement sur trois ingrédients :
• construction d'un potentiel psh local associé au courant T et au poids φ ;
• principe du minimum de Kiselman[Ki1];
• estimations L^2 de Hörmander[Hö] et Bombieri[Bo] pour l'opérateur $\overline{\partial}$.

Je tiens à remercier ici C.O. Kiselman pour de stimulantes conversations qui ont beaucoup contribué à dégager les idées de ce travail.

1. Nombres de Lelong généralisés

Soit X un espace de Stein de dimension pure n et T un courant positif fermé sur X de bidimension (p,p), *i.e.* de bidegré $(n-p,n-p)$. En ce qui concerne les formes et les courants sur un espace analytique, nous utiliserons ici la définition donnée dans [De2]; la plupart des calculs différentiels et intégraux se pratiquent alors comme sur une variété lisse .

Si $\varphi_1,\ldots,\varphi_q$ sont des fonctions psh finies et continues, la méthode de Bedford-Taylor[B-T] permet de définir par récurrence un courant positif fermé $T\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_q$ en posant

$$(1.1)\qquad T\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_q = dd^c(\varphi_q T\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_{q-1}).$$

Pour tous compacts $K\subset\subset\tilde K\subset\subset X$, la masse de (1.1) sur K, notée $||\quad||_K$, vérifie alors les inégalités classiques de Chern-Levine-Nirenberg (*cf.* [C-L-N],[B-T],[De2]) :

$$(1.2)\qquad ||T\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_q||_K \le C_{K,\tilde K}||T||_{\tilde K}||\varphi_1||_{L^\infty(\tilde K)}\cdots||\varphi_q||_{L^\infty(\tilde K)};$$

on en déduit aisément que le courant $T\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_q$ est faiblement continu en $(\varphi_1,\ldots,\varphi_q)$ lorsque les φ_j convergent uniformément sur tout compact.

Soit maintenant $\varphi : X\longrightarrow [-\infty,+\infty[$ une fonction psh continue. On suppose que φ est *semi-exhaustive*, c'est-à-dire par définition qu'il existe $R>0$ tel que $\{x\in X;\varphi(x)<R\}\subset\subset X$. Pour tout réel $r<R$ on pose

$$(1.3)\qquad \nu(T,\varphi,r)=\frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\varphi<r} T\wedge(dd^c\max(\varphi,s))^p$$

où s est un réel quelconque $<r$; l'hypothèse $dT=0$ et la formule de Stokes montrent que la quantité $\nu(T,\varphi,r)$ est bien indépendante de s . Pour tous réels $r_1<r_2<R$ on obtient par différence l'identité

$$\nu(T,\varphi,r_2)-\nu(T,\varphi,r_1)=\frac{1}{(2\pi)^p}\int_{r_1\le\varphi<r_2} T\wedge(dd^c\varphi)^p$$

en choisissant $s<r_1$. En particulier, la fonction

$$(1.4)\qquad r\mapsto\nu(T,\varphi,r)$$

est croissante sur l'intervalle $]-\infty,R[$.

Définition 1.5. — *On appelle nombre de Lelong généralisé de T relativement au poids φ la limite*

$$\nu(T,\varphi)=\lim_{r\to-\infty}\nu(T,\varphi,r).$$

Les nombres de Lelong généralisés précédents avaient déjà été introduits dans [De1] par une formule légèrement différente que nous rappelons ci-dessous :

$$\nu(T,\varphi,t) = (2\pi e^t)^{-p} \int_{\varphi<t} T\wedge (dd^c e^{\varphi})^p \quad , \quad \forall t<R \ . \tag{1.6}$$

Posons $\varphi_s = \max(\varphi,s)$ avec $s<t$. La formule de Stokes ramène (1.6) à

$$e^{pt}\int_{\varphi<t} T\wedge (dd^c\varphi_s)^p = \int_{\varphi<t} T\wedge (dd^c e^{\varphi_s})^p \ .$$

Pour vérifier cette dernière égalité, on observe que

$$\begin{aligned} e^{pt}(dd^c\varphi_s)^p - (dd^c e^{\varphi_s})^p &= d[e^{pt}(dd^c\varphi_s)^{p-1}\wedge d^c\varphi_s - (dd^c e^{\varphi_s})^{p-1}\wedge d^c(e^{\varphi_s})] \\ &= d[(e^{pt}-e^{p\varphi_s})(dd^c\varphi_s)^{p-1}\wedge d^c\varphi_s]. \end{aligned}$$

Soit $\lambda : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante de classe C^∞ telle que $\lambda(t)=0$ pour $t\le 1/2$ et $\lambda(t)=1$ pour $t\ge 1$. Après intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\varphi<t} T\wedge(e^{pt}(dd^c\varphi_s)^p - (dd^c e^{\varphi_s})^p) \\ &\qquad = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int \lambda\Big(\frac{t-\varphi_s}{\varepsilon}\Big) T\wedge (e^{pt}(dd^c\varphi_s)^p - (dd^c e^{\varphi_s})^p) = \lim_{\varepsilon\to 0_+} I(\varepsilon) \end{aligned}$$

avec

$$I(\varepsilon) = \int T\wedge \frac{1}{\varepsilon}\lambda'\Big(\frac{t-\varphi_s}{\varepsilon}\Big)(e^{pt}-e^{p\varphi_s})(dd^c\varphi_s)^{p-1}\wedge d\varphi_s\wedge d^c\varphi_s.$$

Le support de la fonction $\lambda'((t-\varphi_s)/\varepsilon)$ est contenu dans la couronne $K(\varepsilon)=\{\varepsilon/2\le t-\varphi_s\le\varepsilon\}$; comme λ' est bornée et que $e^{pt}-e^{p\varphi_s}=O(\varepsilon)$ sur $K(\varepsilon)$, les inégalités de Chern-Levine-Nirenberg (1.2) impliquent $I(\varepsilon)\le C||T||_{K(\varepsilon)}$ où $||T||_{K(\varepsilon)}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0_+. La formule (1.6) est donc démontrée.

Exemple 1.7.– Supposons que l'espace X soit un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et choisissons $\varphi(z)=\log|z-x|,\ x\in X$. Alors $1/4dd^c(e^{2\varphi}) = 1/4dd^c|z-x|^2$ est la métrique hermitienne standard de $\mathbf{C}^n$, de sorte que la formule (1.6) appliquée à 2φ s'écrit

$$\nu(T,\varphi,\log t) = \frac{1}{2^p}\nu(T,2\varphi,2\log t) = \frac{\sigma_T(\{z;|z-x|<t\})}{\pi^p t^{2p}/p!} \ ,$$

où $d\sigma_T = (1/4dd^c|x|^2)^p\wedge T/p!$ est la mesure trace de T. Le nombre de Lelong généralisé $\nu(T,\varphi)$ coïncide donc avec le nombre de Lelong classique $\nu(T,x)$.

Exemple 1.8.– Soit V une fonction psh sur un voisinage d'un point $x\in\mathbf{C}^n$. Notons $\theta_{x,R}$ la mesure de moyenne sur le polycercle

$$\Gamma(x,R) := \{z\in\mathbf{C}^n; |z_j-x_j| = e^{R_j}, 1\le j\le n\} \ .$$

Si $a=(a_1,\ldots,a_n)\in]0,+\infty[^n$, C.O. Kiselman[Ki3] considère les nombres de Lelong “directionnels” $\nu(V,x,a)$ définis par

$$\nu(V,x,a) = \lim_{r\to-\infty}\frac{1}{r}\theta_{x,ra}(V).$$

En utilisant les résultats et les notations de [De2], on va montrer que ces nombres sont obtenus en fait pour le choix

$$\varphi(z) = \varphi_{x,a}(z) = \max_j \frac{1}{a_j}\log|z_j-x_j| \ .$$

Observons que $\{\varphi < r\}$ est le polydisque admettant $\Gamma(x, ra)$ pour frontière distinguée. On sait d'après [De2] que la mesure $(dd^c\varphi)^n$ est bien définie, parce que l'ensemble $\varphi^{-1}(-\infty)$ est relativement compact dans $\mathbf{C}^n$. La quasi-homogénéïté de φ donne

$$(dd^c\varphi)^n = (2\pi)^n(a_1 \ldots a_n)^{-1}\delta_x \ ,$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x . La mesure de Monge-Ampère $\mu_r := (dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi|_{\{\varphi=r\}}$ est d'autre part portée par $\Gamma(x, ra)$, car sur le complémentaire $\mathbf{C}^n \setminus \bigcup_{r\geq-\infty} \Gamma(x, ra)$ la fonction φ ne dépend localement que de $n-1$ variables complexes et donc $(dd^c\varphi)^{n-1} = 0$ par raison d'homogénéïté. Comme la masse de μ_r est égale à celle de $(dd^c\varphi)^n$ et comme μ_r est invariante par le groupe $U(1)^n$ il vient

$$\mu_r = (2\pi)^n(a_1 \ldots a_n)^{-1}\theta_{x,ra}.$$

Grâce à la formule de Lelong-Jensen (*cf.* [De2],th.3.4), on voit que pour tous réels $r < r_0$ assez petits on a

$$\int_r^{r_0} \nu(dd^cV, \varphi, t)dt = \frac{\mu_{r_0}(V) - \mu_r(V)}{(2\pi)^{n-1}} = \frac{2\pi}{a_1 \ldots a_n}\big(\theta_{x,r_0a}(V) - \theta_{x,ra}(V)\big) \ .$$

On obtient donc l'égalité

$$(1.9) \qquad \nu(V, x, a) = \lim_{r\to-\infty} \frac{1}{r}\theta_{x,ra}(V) = a_1 \ldots a_n.\nu\Big(\frac{1}{2\pi}dd^cV, \varphi_{x,a}\Big).$$

Nous définirons en général le nombre de Lelong directionnel d'un courant T par

$$(1.10) \qquad \nu(T, x, a) = a_1 \ldots a_n.\nu(T, \varphi_{x,a}) \ ;$$

ceci donne l'identité $\nu(V, x, a) = \nu\big(\frac{1}{2\pi}dd^cV, x, a\big)$.

2. Théorème de comparaison

Nous redémontrons ici le résultat de [Siu] sur l'invariance des nombres de Lelong par changement de coordonnées locales. Nous obtenons en fait un résultat beaucoup plus général, permettant de comparer les nombres de Lelong relatifs à des poids φ, ψ différents. Le lecteur pourra comparer avec [De1] pour voir combien la démonstration se trouve simplifiée par la possibilité d'utiliser des poids φ qui sont seulement continus.

Théorème 2.1. — *Soient $\varphi, \psi : X \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ des fonctions psh continues semi-exhaustives. On suppose que*

$$l := \limsup_{\varphi(x)\to-\infty} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} < +\infty.$$

Alors $\nu(T, \psi) \leq l^p\nu(T, \varphi)$, et l'égalité a lieu si $l = \lim \psi/\varphi$.

Démonstration. — D'après la définition (1.3) on a

$$\nu(T, \lambda\varphi) = \lambda^p\nu(T, \varphi)$$

pour tout scalaire $\lambda > 0$. Il suffit donc de vérifier l'inégalité $\nu(T,\psi) \le \nu(T,\varphi)$ sous l'hypothèse $\limsup \psi/\varphi < 1$. Pour tout $c > 0$, on considère la fonction psh $u_c = \max(\psi - c, \varphi)$. Soit $r < R_\varphi$ fixé et $a < r$. Pour $c > 0$ assez grand, on a $u_c = \varphi$ sur $\varphi^{-1}([a,r])$, donc

$$\nu(T,\varphi,r) = \nu(T,u_c,r) \ge \nu(T,u_c).$$

L'hypothèse $\limsup \psi/\varphi < 1$ implique d'autre part qu'il existe $t_0 < 0$ tel que $u_c = \psi - c$ sur $\{u_c < t_0\}$. On en déduit aussitôt

$$\nu(T,u_c) = \nu(T,\psi - c) = \nu(T,\psi),$$

par conséquent $\nu(T,\psi) \le \nu(T,\varphi)$. □

Supposons en particulier que X soit une variété de Stein lisse et x un point de X. Soit $z^k = (z_1^k, \ldots, z_n^k)$, $k = 1, 2$, des systèmes de coordonnées locales centrées au point x et

$$\varphi_k(z) = \log|z^k| = \log\big(|z_1^k|^2 + \ldots + |z_n^k|^2\big)^{1/2}.$$

On a $\lim_{z\to x} \varphi_2(z)/\varphi_1(z) = 1$, donc $\nu(T,\varphi_1) = \nu(T,\varphi_2)$ d'après le théorème 2.1.

Corollaire 2.2. — *Les nombres de Lelong classiques $\nu(T,x)$ sont invariants par changement de coordonnées locales.*

De manière générale, si X est un espace analytique, on définira $\nu(T,x)$ par

$$\nu(T,x) = \nu\Big(T, \frac{1}{2}\log \sum_{1\le j\le N} |g_j|^2\Big),$$

où $(g_j)_{1\le j\le N}$ est un système générateur de l'idéal maximal $\mathcal{M}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{X,x}$; cette définition est indépendante du choix des (g_j).

Corollaire 2.3. — *Sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$, les nombres de Lelong directionnels sont liés aux nombres de Lelong classiques par*

$$\nu(T,x) = \nu(T,x,a_1)\ ,\ a_1 = (1,\ldots,1).$$

Démonstration. — Par définition, le nombre $\nu(T,x)$ est associé au poids $\varphi(z) = \log|z-x|$ et $\nu(T,x,a_1)$ au poids $\psi(z) = \log\max|z_j - x_j|$. Il est clair que $\lim_{z\to x} \psi(z)/\varphi(z) = 1$, d'où la conclusion d'après le théorème 2.1. □

3. Théorème de Thie

On suppose ici que X est une variété analytique complexe de dimension n et que T est le courant d'intégration sur un ensemble analytique fermé $A \subset X$ de dimension pure p (*cf.* P. Lelong[Le1]); on notera suivant l'usage $T = [A]$. Nous nous proposons de redémontrer le résultat de P.Thie[Th] donnant l'interprétation des nombres de Lelong $\nu([A],x)$ comme multiplicités de l'ensemble analytique A .

Soit $x \in A$ un point fixé et $\mathcal{I}_{A,x}$ l'idéal des germes de fonctions holomorphes en x s'annulant sur A . On peut alors trouver sur X des coordonnées locales

$z = (z_1, \ldots, z_n)$, centrées au point x, telles qu'il existe des polynômes distingués $P_j \in \mathcal{I}_{A,x}$ en la variable z_j , $p < j \le n$, s'écrivant sous la forme

$$P_j(z) = z_j^{d_j} + \sum_{k=1}^{d_j} a_{j,k}(z_1, \ldots, z_{j-1}) z_j^{d_j - k} \ , \ a_{j,k} \in \mathcal{M}^k_{\mathbf{C}^{j-1},0} \ . \tag{3.1}$$

Montrons en effet cette propriété par récurrence sur $\operatorname{codim} X = n - p$, en identifiant le germe (X, x) à $(\mathbf{C}^n, 0)$ grâce à un système de coordonnées locales $(w_1, \ldots, w_n)$ fixé une fois pour toutes.

Si $n - p \ge 1$, il existe un élément non nul $f \in \mathcal{I}_{A,x}$. Soit d le plus petit entier tel que $f \in \mathcal{M}^d_{\mathbf{C}^n,0}$ et soit $e_n \in \mathbf{C}^n$ un vecteur non nul tel que $\lim_{t\to 0} f(te_n)/t^d \neq 0$. Complétons le vecteur e_n en une base $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{n-1}, e_n)$ de $\mathbf{C}^n$ et notons $(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{n-1}, z_n)$ les coordonnées correspondantes. Le théorème de préparation de Weierstrass permet de factoriser f sous la forme $f = gP$, où P est un polynôme distingué de la forme (3.1) en la variable z_n et où g est une fonction holomorphe inversible au point x . Si $n - p = 1$, le polynôme $P_n = P$ répond à la question.

Si $n - p \ge 2, \mathcal{O}_{A,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_{A,x}$ est un $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{n-1},0} = \mathbf{C}\{\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{n-1}\}-$module de type fini, c'est-à-dire que la projection $\mathrm{pr} : (X, x) \approx (\mathbf{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^{n-1}, 0)$ est un morphisme fini de (A, x) sur un germe $(Z, 0) \subset (\mathbf{C}^{n-1}, 0)$ de dimension p . L'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathcal{I}_{Z,0} = \mathcal{O}_{\mathbf{C}^{n-1},0} \cap \mathcal{I}_{A,x}$ permet de trouver une nouvelle base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $\mathbf{C}^{n-1}$ et des polynômes $P_{p+1}, \ldots, P_{n-1} \in \mathcal{I}_{Z,0}$ s'écrivant sous la forme (3.1) dans les coordonnées $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ associées à la base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Si l'on pose $P_n = P$, l'assertion précédente est alors démontrée à l'étape n .

Etant donné un polynôme $Q(w) = w^d + a_1 w^{d-1} + \ldots + a_d \in \mathbf{C}[w]$, toute racine w de Q vérifie

$$|w| \le 2 \max_{1 \le k \le d} |a_k|^{1/k}, \tag{3.2}$$

sinon $Q(w)w^{-d} = 1 + a_1 w^{-1} + \ldots + a_d w^{-d}$ serait de module supérieur ou égal à $1 - (2^{-1} + \ldots + 2^{-d}) = 2^{-d}$, ce qui est absurde. Notons $z = (z', z'')$ avec $z' = (z_1, \ldots, z_p)$ et $z'' = (z_{p+1}, \ldots, z_n)$. Comme $a_{j,k} \in \mathcal{M}^k_{\mathbf{C}^{j-1},0}$, on a

$$|a_{j,k}(z_1, \ldots, z_{j-1})|^{1/k} = O(|z_1| + \ldots + |z_{j-1}|) \text{ si } j > p \ ,$$

et on déduit de (3.1) , (3.2) que $|z_j| = O(|z_1| + \ldots + |z_{j-1}|)$ sur (A, x) . Par suite, le germe (A, x) est contenu dans un cône $|z''| \le C|z'|$.

On va maintenant utiliser cette propriété pour calculer le nombre de Lelong du courant $[A]$ au point x . Quand z tend vers x , les fonctions

$$\varphi(z) = \log|z| = \log(|z'|^2 + |z''|^2)^{1/2} \ , \ \psi(z) = \log|z'|$$

sont équivalentes sur le germe (A, x); d'après le théorème 2.1 ceci entraîne

$$\nu([A], x) = \nu([A], \varphi) = \nu([A], \psi).$$

Soit $B' \subset \mathbf{C}^p$ la boule de centre 0 et de rayon r' , $B'' \subset \mathbf{C}^{n-p}$ la boule de centre 0 et de rayon $r'' = Cr'$. L'inclusion du germe (A, x) dans le cône $|z''| \le C|z'|$ montre que pour r' assez petit la projection

$$\mathrm{pr} : A \cap (B' \times B'') \longrightarrow B'$$

est propre et finie. L'application pr est donc un revêtement ramifié ayant un nombre fini q de feuillets. D'après la formule (1.6) appliquée à 2ψ on a

$$\begin{aligned}\nu([A],\psi,\log t) &= (4\pi t^2)^{-p}\int_{A\cap\{\psi<\log t\}}(dd^c e^{2\psi})^p\\ &= (4\pi t^2)^{-p}\int_{A\cap\{|z'|<t\}}(\mathrm{pr}^\star dd^c|z'|^2)^p\\ &= (4\pi t^2)^{-p}.q.\int_{\mathbf{C}^p\cap\{|z'|<t\}}(dd^c|z'|^2)^p = q.\end{aligned}$$

On obtient donc le théorème suivant, dû à P.Thie[Th].

THÉORÈME 3.3. — *Soit A un ensemble analytique de dimension p dans une variété analytique complexe X de dimension n et soit $x\in A$. Alors il existe au point x des coordonnées locales*

$$z=(z',z'')\ ,\ z'=(z_1,\ldots,z_p)\ ,\ z''=(z_{p+1},\ldots,z_n)$$

et des boules $B'\subset\mathbf{C}^p$, $B''\subset\mathbf{C}^{n-p}$, relatives à ces coordonnées, de rayons respectifs r',r'', telles que $A\cap(B'\times B'')$ soit contenu dans le cône d'équation $|z''|\le(r''/r')|z'|$. On définit la multiplicité de A au point x comme le nombre q de feuillets dans le revêtement ramifié $A\cap(B'\times B'')\longrightarrow B'$. Alors $\nu([A],x)=q$.

4. Théorème d'analyticité de Siu

On se donne ici un deuxième espace analytique Y et une fonction $\varphi: X\times Y\longrightarrow[-\infty,+\infty[$ psh et continue. On suppose que φ est *semi-exhaustive* par rapport à X , c'est-à-dire que pour tout compact $L\subset Y$ il existe $R=R(L)<0$ tel que

$$\{(x,y)\in X\times L\,;\,\varphi(x,y)\le R\}\subset\subset X\times Y. \tag{4.1}$$

Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur X . Pour tout point $y\in Y$, la fonction $\varphi_y(x):=\varphi(x,y)$ est semi-exhaustive sur X ; on peut donc associer à y le nombre de Lelong généralisé $\nu(T,\varphi_y)$. La continuité faible de la mesure $T\wedge(dd^c\max(\varphi_y,a))^p$ par rapport au paramètre y montre que pour tous $r_1<r_2<R$ on a

$$\limsup_{y\to y_0}\nu(T,\varphi_y,r_1)\le\nu(T,\varphi_{y_0},r_2). \tag{4.2}$$

On en déduit aussitôt que l'application $y\mapsto\nu(T,\varphi_y)$ est semi-continue supérieurement. Les ensembles de niveau

$$E_c=\{y\in Y;\nu(T,\varphi_y)\ge c\}\ ,\ c>0 \tag{4.3}$$

sont donc fermés. On s'intéresse dans la suite au problème de savoir si E_c est en général un ensemble analytique. Comme il s'agit d'une question locale, on peut supposer sans perte de généralité que Y est un espace de Stein. Après addition d'une constante à φ , on peut supposer aussi qu'il existe un compact $K \subset X$ tel que

$$\{(x,y) \in X \times Y; \varphi(x,y) \le 0\} \subset K \times Y.$$

•**Première étape** : *construction d'un potentiel psh local.*

Notre objectif est ici de généraliser la construction classique des potentiels psh associés à un courant positif fermé (*cf.* P. Lelong[Le2] et H. Skoda[Sk]), en remplaçant le noyau standard issu de la métrique hermitienne de $\mathbf{C}^n$ par un noyau construit à l'aide du poids φ .

D'après le théorème 2.1, seul le comportement asymptotique de φ au voisinage de l'ensemble polaire $\varphi^{-1}(-\infty)$ entre en jeu. On va donc se permettre de modifier légérement φ en dehors d'un voisinage de $\varphi^{-1}(-\infty)$. Quitte à rétrécir de nouveau Y si nécessaire, il existe une régularisation $\psi \in C^\infty(X \times Y)$ de φ telle que $\psi > \varphi$ sur $X \times Y$ et $\psi < \varphi + 1/2$ sur l'ensemble

$$\{(x,y) \in X \times Y; -2 \le \varphi(x,y) \le 0\}.$$

Après remplacement de φ par la fonction $\widehat{\varphi}$ telle que

$$\begin{cases} \widehat{\varphi} = \varphi & \text{sur} \qquad \varphi(x,y) \le -2 \\ \widehat{\varphi} = \max(\varphi, 2\psi + 1) & \text{sur} \quad -2 \le \varphi(x,y) \le -1 \\ \widehat{\varphi} = 2\psi + 1 & \text{sur} \quad -1 \le \varphi(x,y) \end{cases}$$

on voit qu'on peut supposer φ de classe C^∞ au voisinage de $\{\varphi(x,y) \ge -1\}$. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ une fonction croissante telle que $\chi(t) = t$ pour $t \le -1$ et $\chi(t) = 0$ pour $t \ge 0$. Notons $H \subset \mathbf{C}$ le demi-plan $H = \{z \in \mathbf{C}; \mathrm{Re} z < -1\}$. On associe à T la fonction potentiel V sur $Y \times H$ définie par

$$V(y,z) = -\int_{\mathrm{Re} z}^0 \nu(T, \varphi_y, t)\chi'(t)dt. \tag{4.4}$$

La formule (1.3) entraîne pour tout $t > \mathrm{Re} z$ l'égalité

$$\nu(T, \varphi_y, t) = (2\pi)^{-p} \int_{\varphi(x,y)<t} T(x) \wedge (dd^c_x \widetilde{\varphi}(x,y,z))^p$$

avec $\widetilde{\varphi}(x,y,z) := \max(\varphi(x,y), \mathrm{Re} z)$. Le théorème de Fubini appliqué à (4.4) donne alors

$$V(y,z) = (2\pi)^{-p} \int_{x \in X} T(x) \wedge \chi(\widetilde{\varphi}(x,y,z))(dd^c_x \widetilde{\varphi}(x,y,z))^p.$$

Pour toute $(n-1,n-1)$-forme h de classe C^∞ à support compact dans $Y \times H$, il vient

$$\begin{aligned} \langle dd^c V, h\rangle &= \langle V, dd^c h\rangle \\ &= (2\pi)^{-p} \int_{X \times Y \times H} T(x) \wedge \chi(\widetilde{\varphi}(x,y,z))(dd^c \widetilde{\varphi}(x,y,z))^p \wedge dd^c h(y,z). \end{aligned}$$

La forme $\chi \circ \widetilde{\varphi}.h$ est à support compact dans $X \times Y \times H$. On peut donc intégrer par parties pour obtenir

$$\langle dd^c V, h\rangle = (2\pi)^{-p} \int_{X \times Y \times H} T(x) \wedge dd^c(\chi \circ \widetilde{\varphi}(x,y,z)) \wedge (dd^c \widetilde{\varphi}(x,y,z))^p.h(y,z).$$

Sur la couronne $\{-1 \leq \varphi(x,y) \leq 0\}$ on a $\widetilde{\varphi}(x,y,z) = \varphi(x,y)$ avec φ de classe C^∞ , tandis que pour $\varphi(x,y) < -1$ il vient $\widetilde{\varphi} < -1$ et $\chi \circ \widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}$. Comme $\widetilde{\varphi}$ est psh, on voit que $dd^cV(y,z)$ est somme de la $(1,1)$-forme positive

$$(y,z) \longmapsto (2\pi)^{-p} \int_{\{x\in X;\varphi(x,y)<-1\}} T(x) \wedge (dd^c_{x,y,z}\widetilde{\varphi}(x,y,z))^{p+1}$$

et de la $(1,1)$-forme indépendante de z à coefficients localement bornés

$$y \longmapsto (2\pi)^{-p} \int_{\{x\in X;-1\leq\varphi(x,y)\leq 0\}} T \wedge dd^c_{x,y}(\chi \circ \varphi) \wedge (dd^c_{x,y}\varphi)^p.$$

La fonction V est d'autre part continue sur $Y \times H$ grâce à la continuité faible de la mesure $T \wedge (dd^c_{x,y,z}\widetilde{\varphi})^p$ par rapport aux variables (y,z) . On en déduit par conséquent le résultat suivant.

Théorème 4.5. — *Il existe une fonction psh positive $\rho \in C^\infty(Y)$ telle que $V(y,z) + \rho(y)$ soit psh sur $Y \times H$.*

Si on fait tendre $\mathrm{Re} z$ vers $-\infty$, on voit que la fonction

$$U_0(y) = V(y,-\infty) + \rho(y) = \rho(y) - \int_{-\infty}^0 \nu(T,\varphi_y,t)\chi'(t)dt$$

est localement psh ou $\equiv -\infty$ sur Y . De plus, il est clair que $U_0(y) = -\infty$ en tout point y tel que $\nu(T,\varphi_y) > 0$. Si Y est irréductible et si $U_0 \not\equiv -\infty$, on voit donc déjà que l'ensemble de densité $\bigcup_{c>0} E_c$ est pluripolaire dans Y .

•**Deuxième étape** : *utilisation du principe du minimum de Kiselman.*

Soit α un réel ≥ 0 quelconque. La fonction

$$Y \times H \ni (y,z) \longmapsto V(y,z) + \rho(y) - \alpha \mathrm{Re} z$$

est alors psh et indépendante de $\mathrm{Im} z$. D'après le principe du minimum de Kiselman[Ki1] , la transformée de Legendre

$$U_\alpha(y) = \inf_{r<-1} [V(y,r) + \rho(y) - \alpha r]$$

est localement psh ou $\equiv -\infty$ sur Y .

Lemme 4.6. — *Soit $y_0 \in Y$ un point fixé.*
a) Si $\alpha > \nu(T,\varphi_{y_0})$, alors U_α est bornée inférieurement dans un voisinage de y_0.
b) Si $\alpha < \nu(T,\varphi_{y_0})$, alors $U_\alpha(y_0) = -\infty$.

Démonstration. — Par définition de V (*cf.* (4.4)) on a

$$V(y,r) \leq -\nu(T,\varphi_y,r) \int_r^0 \chi'(t)dt = r\nu(T,\varphi_y,r) \leq r\nu(T,\varphi_y). \tag{4.7}$$

Il en résulte bien que $U_\alpha(y_0) = -\infty$ si $\alpha < \nu(T,\varphi_{y_0})$. D'autre part, si on a $\nu(T,\varphi_{y_0}) < \alpha$, il existe $t_0 < 0$ tel que $\nu(T,\varphi_{y_0},t_0) < \alpha$. Soit $r_0 < t_0$ fixé. La propriété de semi-continuité (4.2) entraîne qu'il existe un voisinage ω de y_0 tel que $\sup_{y\in\omega} \nu(T,\varphi_y,r_0) < \alpha$. Pour tout $y \in \omega$, on a alors

$$V(y,r) \geq -C - \alpha \int_r^{r_0} \chi'(t)dt = -C + \alpha(r - r_0),$$

ce qui implique $U_\alpha(y) \geq -C - \alpha r_0$. □

Théorème 4.8. — *Si Y est irréductible et si $E_c \neq Y$, alors E_c est un ensemble fermé pluripolaire complet dans Y , i.e. il existe une fonction psh continue $w : Y \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ telle que $E_c = w^{-1}(-\infty)$.*

Démonstration. — On observe d'abord que la famille (U_α) est croissante en α , que $U_\alpha = -\infty$ sur E_c pour tout $\alpha < c$, et que $\sup_{\alpha<c} U_\alpha(y) > -\infty$ si $y \in Y \setminus E_c$ (*cf.* lemme 4.6). Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite exhaustive de compacts de Y . Pour tout entier $k \geq 1$, soit $w_k \in C^\infty(Y)$ une régularisée de $U_{c-1/k}$ telle que $w_k \geq U_{c-1/k}$ sur Y et $w_k \leq -2^k$ sur $E_c \cap Y_k$. Le lemme 4.6 *a)* montre que la famille (w_k) est uniformément minorée sur tout compact de $Y \setminus E_c$, et on peut également choisir les w_k uniformément majorées sur tout compact de Y puisque $U_{c-1/k} \leq U_c$. La fonction

$$w = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} w_k$$

répond alors à la question. □

•**Troisième étape** : *estimation de la singularité des potentiels U_α.*

Pour pouvoir obtenir une telle estimation, nous avons besoin d'une information sur le comportement de φ au voisinage des pôles. Dans la suite, on considère l'espace Y comme étant plongé dans un ouvert de Stein $\Omega \subset \mathbf{C}^N$, et on munit Y de la distance induite par la distance euclidienne de $\mathbf{C}^N$.

Hypothèse 4.9. — *On suppose que $e^{\varphi(x,y)}$ est localement höldérienne en y sur $X \times Y$, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset X \times Y$, il existe des constantes $M > 0$, $\gamma \in]0, 1]$ telles que*

$$|e^{\varphi(x,y_1)} - e^{\varphi(x,y_2)}| \leq M|y_1 - y_2|^\gamma \tag{4.10}$$

pour tous $(x, y_1) \in K$, $(x, y_2) \in K$.

On observera que l'hypothèse 4.9 est satisfaite pour toute fonction φ de la forme

$$\varphi = \max_j \ \log\Big(\sum_k |F_{j,k}|^{\gamma_{j,k}}\Big)$$

où les $F_{j,k}$ sont des fonctions holomorphes sur $X \times Y$ et les $\gamma_{j,k}$ des constantes réelles > 0; dans ce cas e^φ est höldérienne d'ordre $\gamma = \min(\gamma_{j,k}, 1)$.

Théorème 4.11. — *Soit $y_0 \in Y$ un point fixé, L un voisinage compact de y_0 , $K \subset X$ une partie compacte et r_0 un réel < -1 tels que*

$$\{(x, y) \in X \times L; \varphi(x, y) \leq r_0\} \subset K \times L.$$

On suppose que φ vérifie l'inégalité (4.10) pour tous $(x, y_1, y_2) \in K \times L \times L$. Alors, quel que soit $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe un réel $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $y \in Y$ vérifiant $|y - y_0| < \eta(\varepsilon)$, on ait

$$U_\alpha(y) \leq \big((1-\varepsilon)^p \nu(T, \varphi_{y_0}) - \alpha\big)\Big(\gamma \log |y - y_0| + \log \frac{2eM}{\varepsilon}\Big) + \rho(y).$$

Démonstration. — On commence par estimer $\nu(T,\varphi_y,r)$ lorsque $y\in L$ est voisin de y_0 . Posons

$$\begin{cases} \psi(x) = (1-\varepsilon)\varphi_{y_0}(x)+\varepsilon r-\varepsilon/2 & \text{si} \qquad \varphi_{y_0}(x)\le r-1 \\ \psi(x) = \max\big(\varphi_y(x),(1-\varepsilon)\varphi_{y_0}(x)+\varepsilon r-\varepsilon/2\big) & \text{si} \quad r-1\le\varphi_{y_0}(x)\le r \\ \psi(x) = \varphi_y(x) & \text{si} \qquad r\le\varphi_{y_0}(x)\le r_0 \end{cases}$$

et vérifions que cette définition est bien cohérente si $|y-y_0|$ est assez petit. Par hypothèse

$$|e^{\varphi_y(x)}-e^{\varphi_{y_0}(x)}|\le M|y-y_0|^\gamma.$$

On en déduit aussitôt les inégalités

$$\varphi_y(x)\le\varphi_{y_0}(x)+\log\big(1+M|y-y_0|^\gamma e^{-\varphi_{y_0}(x)}\big)$$
$$\varphi_y(x)\ge\varphi_{y_0}(x)+\log\big(1-M|y-y_0|^\gamma e^{-\varphi_{y_0}(x)}\big).$$

En particulier, pour $\varphi_{y_0}(x)=r$ il vient $(1-\varepsilon)\varphi_{y_0}(x)+\varepsilon r-\varepsilon/2=r-\varepsilon/2$ et

$$\varphi_y(x)\ge r+\log(1-M|y-y_0|^\gamma e^{-r}),$$

tandis que pour $\varphi_{y_0}(x)=r-1$ on a $(1-\varepsilon)\varphi_{y_0}(x)+\varepsilon r-\varepsilon/2=r-1+\varepsilon/2$ et

$$\varphi_y(x)\le r-1+\log(1+M|y-y_0|^\gamma e^{1-r}).$$

La définition de ψ est donc cohérente dès que $M|y-y_0|^\gamma e^{1-r}\le\varepsilon/2$, c'est-à-dire

$$\gamma\log|y-y_0|+\log\frac{2eM}{\varepsilon}\le r.$$

Dans ce cas ψ coïncide avec φ_y au voisinage de $\{\psi=r\}$, et avec

$$(1-\varepsilon)\varphi_{y_0}(x)+\varepsilon r-\varepsilon/2$$

au voisinage de l'ensemble polaire $\psi^{-1}(-\infty)$. Par définition de la quantité $\nu(T,\psi,r)$ ceci entraîne

$$\nu(T,\varphi_y,r)=\nu(T,\psi,r)\ge\nu(T,\psi)=(1-\varepsilon)^p\nu(T,\varphi_{y_0}).$$

Grâce à (4.7) on obtient $V(y,r)\le r\nu(T,\varphi_y,r)$, d'où

$$U_\alpha(y)\le V(y,r)+\rho(y)-\alpha r\le r\big(\nu(T,\varphi_y,r)-\alpha\big)+\rho(y)\ ,$$
$$U_\alpha(y)\le r\big((1-\varepsilon)^p\nu(T,\varphi_{y_0})-\alpha\big)+\rho(y)\ . \tag{4.12}$$

Supposons $\gamma\log|y-y_0|+\log(2eM/\varepsilon)\le r_0$, *i.e.* $|y-y_0|\le(\varepsilon/2eM)^{1/\gamma}e^{r_0/\gamma}$; on peut choisir alors $r=\gamma\log|y-y_0|+\log(2eM/\varepsilon)$, et d'après (4.12) ceci donne l'inégalité du théorème 4.11 . □

•**Quatrième étape** : *utilisation des estimations L^2 de Hörmander.*

Supposons d'abord que Y soit une variété de Stein lisse, et notons m la dimension de Y . La démonstration repose sur le lemme crucial suivant (*cf.* Hörmander[Hö], corollary 4.4.6, et Bombieri[Bo]).

LEMME 4.13. — *Soit w une fonction psh sur Y . Alors l'ensemble des points $y\in Y$ au voisinage desquels e^{-w} n'est pas localement sommable est un sous-ensemble analytique de Y .*

La fin de la démonstration reprend l'idée de la méthode de C.O. Kiselman[Ki2] . Pour tous réels $\alpha, \beta > 0$ notons $Z_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des points $y \in Y$ au voisinage desquels $\exp(-U_\alpha/\beta)$ n'est pas localement sommable. Comme la famille (U_α) est croissante en α , on a $Z_{\alpha',\beta'} \supset Z_{\alpha'',\beta''}$ si $\alpha' \leq \alpha''$ et $\beta' \leq \beta''$.

Soit y_0 un point fixé de Y . Distinguons deux cas suivant que y_0 appartient ou non à E_c . Si $y_0 \notin E_c$ alors $\nu(T, \varphi_{y_0}) < c$ par définition. Choisissons α tel que $\nu(T, \varphi_{y_0}) < \alpha < c$; d'après le lemme 4.6 *a)* , la fonction U_α est bornée inférieurement au voisinage de y_0 , donc $y_0 \notin Z_{\alpha,\beta}$ pour tout $\beta > 0$. Si $y_0 \in E_c$ et si $\alpha < c$, alors le lemme 4.11 implique que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$U_\alpha(y) \leq (1-\varepsilon)(c-\alpha)\gamma \log|y-y_0| + C(\varepsilon) \;;$$

cette inégalité entraîne que $\exp(-U_\alpha/\beta)$ est non sommable au voisinage de y_0 dès que $\beta < (c-\alpha)\gamma/2m$. On en déduit donc

$$E_c = \bigcap_{\substack{\alpha<c \\ \beta<(c-\alpha)\gamma/2m}} Z_{\alpha,\beta} \;,$$

ce qui prouve que E_c est un sous-ensemble analytique de Y .

Dans le cas où Y est un espace analytique avec singularités, on peut d'après Hironaka[Hi] trouver une modification lisse $\pi : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$. Pour tout $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, posons

$$\widetilde{\varphi}(x, \widetilde{y}) = \varphi(x, \pi(\widetilde{y})),$$

$$\widetilde{E}_c = \{\widetilde{y} \in \widetilde{Y}; \nu(T, \widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}}) \geq c\}.$$

Alors $E_c = \pi(\widetilde{E}_c)$, par suite E_c est analytique comme image propre d'un ensemble analytique (théorème de Remmert [Re1] , [Re2]). On obtient donc l'énoncé suivant, qui généralise à la fois le théorème d'analyticité de [Siu] et celui de Kiselman [Ki3].

Théorème 4.14. — *Soient X, Y des espaces analytiques complexes, X étant de Stein, et T un courant positif fermé sur X . Soit*

$$\varphi : X \times Y \longrightarrow [-\infty, +\infty[$$

une fonction psh continue. On suppose que φ est semi-exhaustive relativement à X et que $e^{\varphi(x,y)}$ est localement höldérienne en y sur $X \times Y$. Alors les ensembles de niveau

$$E_c = \{y \in Y; \nu(T, \varphi_y) \geq c\}$$

sont des sous-ensembles analytiques de Y .

On peut conjecturer que le théorème 4.14 est encore vrai sans l'hypothèse de continuité höldérienne de e^φ , mais comme la plupart des poids φ intéressants vérifient cette hypothèse, il nous semble que la généralisation ainsi obtenue ne serait pas très significative.

Bibliographie

[B-T] E. BEDFORD and B.A. TAYLOR. — *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math., **149** (1982), 1–41.

[Bo] E. BOMBIERI. — *Algebraic values of meromorphic maps*, Invent. Math., **10** (1970), 267–287 and *Addendum*, Invent. Math. **11** (1970), 163–166.

[C-L-N] S.S. CHERN, H.I. LEVINE and L. NIRENBERG. — *Intrinsic norms on a complex manifold*, Global Analysis (papers in honor of K.Kodaira), p.119-139, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1969.

[De1] J.-P. DEMAILLY. — *Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **32** (1982), 37–66.

[De2] J.-P. DEMAILLY. — *Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines*, Mém. Soc. Math. France (N.S.), **19** (1985), 1–124.

[Hi] H. HIRONAKA. — *Resolution of singularities of an algebraic variety I,II*, Ann. of Math., **79** (1964), 109–326.

[Hö] L. HÖRMANDER. — *An introduction to Complex Analysis in several variables*, 2nd edition, North-Holland Math. libr., vol.7, Amsterdam, London, 1973.

[Ki1] C.O. KISELMAN. — *The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions*, Invent. Math., **49** (1978), 137–148.

[Ki2] C.O. KISELMAN. — *Densité des fonctions plurisousharmoniques*, Bull. Soc. Math. France, **107** (1979), 295–304.

[Ki3] C.O. KISELMAN. — *Un nombre de Lelong raffiné,*communication orale aux Journées Complexes du Sud de la France (mai 1986).

[Le1] P. LELONG. — *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 239–262.

[Le2] P. LELONG. — *Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans* $\mathbf{C}^n$, J. Analyse Math. Jerusalem, **12** (1964), 365–407.

[Le3] P. LELONG. — *Plurisubharmonic functions and positive differential forms*, Gordon and Breach, New-York, and Dunod, Paris, 1969.

[Re1] R. REMMERT. — *Projectionen analytischer Mengen*, Math. Annalen, **130** (1956), 410–441.

[Re2] R. REMMERT. — *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume*, Math. Annalen, **133** (1957), 328–370.

[Siu] Y.T. SIU. — *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math., **27** (1974), 53–156.

[Sk] H. SKODA. — *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbf{C}^n$, Bull. Soc. Math. France, **100** (1972), 353–408.

[Th] P. THIE. — *The Lelong number of a point of a complex analytic set*, Math. Annalen, **172** (1967), 269–312.