GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d″-cohomologie.* Note de **Jean-Pierre Demailly,** présentée par Pierre Lelong.

En utilisant la méthode de E. Witten, nous démontrons des inégalités de Morse asymptotiques pour la d''-cohomologie des puissances tensorielles d'un fibré hermitien en droites au-dessus d'une variété complexe compacte : la dimension du H^q est majorée par une intégrale de la (1, 1)-forme de courbure, étendue à l'ensemble des points d'indice q. La preuve repose sur un théorème spectral qui décrit la distribution asymptotique du spectre de l'opérateur de Schrödinger associé à un grand champ magnétique. Comme application, nous obtenons de nouvelles caractérisations géométriques des espaces de Moišezon, qui améliorent la solution récente donnée par Y. T. Siu de la conjecture de Grauert-Riemenschneider.

ANALYTIC GEOMETRY. — Magnetic fields and Morse inequalities for d''-cohomology.

Using E. Witten's method, we prove asymptotic Morse inequalities for the d''-cohomology of tensor powers of a hermitian line bundle over a compact complex manifold: the H^q-dimension is bounded above by an integral of the (1, 1)*-curvature form, extended to the set of points of index q. The proof rests upon a spectral theorem which describes the asymptotic distribution of the spectrum of the Schrödinger operator associated to a large magnetic field. As an application, we find new geometric characterizations of Moišezon spaces, which improve Y. T. Siu's recent solution of the Grauert-Riemenschneider conjecture.*

1. Inégalités de Morse. — Soit X une variété $\mathbb{C}$-analytique compacte de dimension n, F en fibré vectoriel holomorphe de rang r et E un fibré holomorphe en droite hermitien de classe $\mathscr{C}^\infty$ au-dessus de X. Soit $D = D' + D''$ la connexion canonique de E et $c(E) = D^2$ la forme de courbure de cette connexion. Désignons par $X(q)$, $0 \leqq q \leqq n$, l'ouvert des points de X d'indice q, i. e. l'ouvert des points $x \in X$ en lesquels la forme de courbure $ic(E)(x)$ a exactement q valeurs propres <0 et $(n-q)$ valeurs propres >0. On pose enfin $X(\leqq q) = \bigcup_{j \leqq q} X(j)$.

Théorème 1. — *Lorsque k tend vers $+\infty$ on a pour tout $q = 0, 1, \ldots, n$ les inégalités asymptotiques suivantes :*

(*a*) *Inégalités de Morse :*

$$\dim H^q(X, E^k \otimes F) \leqq r \frac{k^n}{n!} \int_{X(q)} (-1)^q \left(\frac{i}{2\pi} c(E)\right)^n + o(k^n).$$

(*b*) *Inégalités de Morse fortes :*

$$\sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \dim H^j(X, E^k \otimes F) \leqq r \frac{k^n}{n!} \int_{X(\leqq q)} (-1)^q \left(\frac{i}{2\pi} c(E)\right)^n + o(k^n).$$

(*c*) *Formule de Riemann-Roch asymptotique :*

$$\sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim H^q(X, E^k \otimes F) = r \frac{k^n}{n!} \int_{X} \left(\frac{i}{2\pi} c(E)\right)^n + o(k^n).$$

Les estimations 1 (*a*), (*b*) sont nouvelles à notre connaissance, même dans le cas des variétés projectives. L'égalité asymptotique 1 (*c*), quant à elle, est une version affaiblie du théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch, qui est lui-même un cas particulier du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer.

L'existence d'une majoration du type 1 (*a*) était conjecturée par Y. T. Siu ([7], [8]), à qui nous avons d'ailleurs emprunté une partie des techniques utilisées ici. La preuve du théorème 1 repose sur la méthode analytique introduite récemment par E. Witten ([9], [10]) pour redémontrer les inégalités de Morse classiques sur une variété différentiable compacte. Dans notre situation, le rôle de la fonction de Morse est tenu par le choix de

0249-6291/85/03010119 $ 2.00 © Académie des Sciences

la métrique hermitienne sur E. On munit d'autre part X et F de métriques hermitiennes arbitraires, qui interviendront seulement dans les termes $o(k^n)$. Étant donné un réel $\lambda \geqq 0$, on considère le sous-complexe $\mathscr{H}_k^{\bullet}(\lambda)$ du complexe de Dolbeault $\mathscr{C}_{0,\bullet}^{\infty}(X, E^k \otimes F)$ des $(0, q)$-formes de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur X à valeurs dans $E^k \otimes F$, engendré par les fonctions propres du laplacien antiholomorphe Δ'' dont les valeurs propres sont $\leqq k\lambda$. Les groupes de cohomologie du complexe $\mathscr{H}_k^{\bullet}(\lambda)$ sont alors isomorphes aux groupes $H^q(X, E^k \otimes F)$, de sorte qu'il suffit de savoir borner la dimension $h_k^q(\lambda) = \dim \mathscr{H}_k^q(\lambda)$. On utilise pour cela une formule de type Weitzenböck :

$$\frac{2}{k}\int_X \langle \Delta'' u, u \rangle = \int_X \frac{1}{k} |\nabla u + S u|^2 - \langle V u, u \rangle + \frac{1}{k} \langle \Theta u, u \rangle, \tag{2}$$

dérivée de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne [3]. ∇ désigne ici la connexion hermitienne naturelle sur le fibré $\Lambda^{0,q} T^* X \otimes E^k \otimes F$ (qui *n'est pas* en général un fibré holomorphe) et S, Θ sont des opérateurs linéaires d'ordre 0 provenant de la torsion de la métrique hermitienne sur X et de la courbure du fibré F. S et Θ n'opèrent que sur la composante $\Lambda^{0,q} T^* X \otimes F$ et sont indépendants de k. Enfin, si :

$$ic(E) = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

est l'écriture de la forme de courbure de E dans une base orthonormée $(\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n)$ de TX, et si :

$$u = \sum_{|J|=q,\ 1 \leqq l \leqq r} u_{J,l} \, d\bar{z}_J \otimes e_l \in \Lambda^{0,q} T^* X \otimes E^k \otimes F,$$

V est l'endomorphisme hermitien défini relativement à un repère orthonormé $(e_1, \ldots, e_r)$ de $E^k \otimes F$ par :

$$\langle V u, u \rangle = 2^q \sum_{J,l} (\alpha_{\complement J} - \alpha_J) |u_{J,l}|^2, \tag{3}$$

avec $\alpha_J = \sum_{j \in J} \alpha_j$. L'étude des valeurs propres de Δ'' se trouve donc ramenée à l'étude du spectre de l'opérateur autoadjoint $\nabla^* \nabla$ associé à une connexion hermitienne réelle ∇.

2. Distribution asymptotique du spectre de l'opérateur de Schrödinger. — Soit (M, g) une variété riemannienne $\mathscr{C}^{\infty}$ de dimension réelle n, E, F des fibrés vectoriels hermitiens de rangs respectifs 1, r au-dessus de X. Soit ∇ une connexion hermitienne sur E (resp. sur F) et ∇_k la connexion induite sur $E^k \otimes F$. On étudie alors le spectre de la forme quadratique :

$$Q_k(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{k} |\nabla_k u|^2 - \langle V u, u \rangle \right) d\sigma, \qquad u \in L^2(\Omega, E^k \otimes F), \tag{4}$$

pour le problème de Dirichlet, où Ω est un ouvert relativement compact de M et où V est un endomorphisme hermitien continu de F. D'un point de vue physique, ceci revient à étudier le spectre de l'opérateur de Schrödinger $(1/k)(\nabla_k^* \nabla_k - k V)$ associé au « champ électrique » $k V$ et au champ magnétique $k B$, où $B = i \nabla^2$ n'est autre que la forme de courbure de la connexion sur E. C'est dans la présence de ce champ magnétique que réside notre apport principal vis-à-vis de la méthode de E. Witten ([9], [10]) (dans le cas de la cohomologie de De Rham la courbure est toujours nulle puisque $d^2 = 0$). En tout point $x \in X$, soient $V_1(x) \leqq V_2(x) \leqq \ldots \leqq V_r(x)$ les valeurs propres de V, soit $2s = 2s(x) \leqq n$ le rang de $B(x)$ et $B_1(x) \geqq \ldots \geqq B_s(x) > 0$ les modules des valeurs propres non nulles de l'endomorphisme antisymétrique associé. On définit une fonction $\nu_{B(x)}(\lambda)$ du couple $(x, \lambda) \in M \times \mathbb{R}$, continue à droite en λ, en posant :

$$(5)\qquad \nu_B(\lambda) = \frac{2^{s-n}\pi^{-n/2}}{\Gamma((n/2)-s+1)} B_1 \ldots B_s \sum_{(p_1, \ldots, p_s) \in \mathbb{N}^s} [\lambda - \sum (2p_j+1) B_j]_+^{(n/2)-s},$$

avec la convention $\lambda_+^0 = 0$ si $\lambda < 0$, $\lambda_+^0 = 1$ si $\lambda \geqq 0$. Enfin, si $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$ désignent les valeurs propres de Q_k (comptées avec multiplicité), on considère la fonction de dénombrement :

$$N_k(\lambda) = \text{card}\{j;\ \lambda_j \leqq \lambda\}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

THÉORÈME 6. — *Si $\partial\Omega$ est de mesure nulle, il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, constitué des points de discontinuité de la fonction de répartition spectrale, tel que :*

$$\lim_{k \to +\infty} k^{-n/2} N_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{r} \int_\Omega \nu_B(V_j + \lambda)\, d\sigma,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}$.

Pour démontrer le théorème 6, on commence par étudier le cas simple où $M = \mathbb{R}^n$ avec un champ magnétique constant B et avec $V = 0$. Lorsque Ω est un cube, on sait alors expliciter les fonctions propres par une transformation de Fourier partielle qui ramène le problème à celui classique de l'oscillateur harmonique en une variable. L'idée de ce calcul nous a été fortement inspirée par les articles [1] et [2] de Y. Colin de Verdière. L'extension du résultat au cas d'un champ magnétique quelconque reprend une idée de Siu [7], consistant à utiliser un pavage de Ω par des cubes assez petits. Notre méthode est néanmoins très différente de celle de Siu, puisque nous travaillons directement sur les formes harmoniques alors que Siu se ramène aux cochaînes holomorphes via l'isomorphisme de Dolbeault. On gagne ainsi beaucoup en précision sur les estimations cherchées. La taille des cubes doit être ici choisie d'un ordre de grandeur intermédiaire entre $k^{-1/2}$ et $k^{-1/4}$, par exemple $k^{-1/3}$: $k^{-1/2}$ est en effet la longueur d'onde des premières fonctions propres, et en dessous de cette longueur l'action du champ magnétique B n'est pas perceptible; au-dessus de $k^{-1/4}$, l'oscillation de B est au contraire trop forte. On utilise finalement le principe du minimax pour comparer les valeurs propres sur Ω aux valeurs propres sur les cubes.

Démonstration du théorème 1. — Si on pose $h_k^q = \dim H^q(X, E^k \otimes F)$, alors il est clair que $h_k^q \leqq h_k^q(\lambda) = \dim \mathcal{H}_k^q(\lambda)$ pour tout $\lambda \geqq 0$, et un résultat élémentaire classique d'algèbre homologique donne de même l'inégalité de Morse forte :

$$(7)\qquad h_k^q - h_k^{q-1} + \ldots + (-1)^q h_k^0 \leqq h_k^q(\lambda) - h_k^{q-1}(\lambda) + \ldots + (-1)^q h_k^0(\lambda).$$

Le théorème 6 entraîne alors d'après (2) et (3) l'estimation :

$$h_k^q(\lambda) = rk^n \sum_{|J|=q} \int_X \nu_B(2\lambda + \alpha_{\complement J} - \alpha_J)\, d\sigma + o(k^n),$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}$, avec $B = ic(E) = \sum \alpha_j dx_j \wedge dy_j$. Faisons tendre $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}$ vers 0 par valeurs > 0. L'inégalité (7) nous donne :

$$(8)\qquad h_k^q - h_k^{q-1} + \ldots + (-1)^q h_k^0 \leqq k^n (I^q - I^{q-1} + \ldots + (-1)^q I^0) + o(k^n),$$

où I^q désigne l'intégrale de courbure :

$$I^q = r \sum_{|J|=q} \int_X \nu_B(\alpha_{\complement J} - \alpha_J)\, d\sigma.$$

Par substitution dans (5), on voit que pour tout $x \in X$ on a $\nu_B(\alpha_{\complement J} - \alpha_J) = 0$ sauf si $x \in X(q)$ et $J = J(x) = \{j;\ \alpha_j(x) < 0\}$, auquel cas :

$$\nu_B(\alpha_{\complement J} - \alpha_J) = (2\pi)^{-n} |\alpha_1 \ldots \alpha_n|.$$

Le théorème 1 résulte maintenant de l'égalité :

$$\text{(9)} \qquad I^q = r \int_{X(q)} (2\pi)^{-n} (-1)^q \alpha_1 \ldots \alpha_q \, d\sigma = \frac{r}{n!} \int_{X(q)} (-1)^q \left(\frac{i}{2\pi} c(E)\right)^n.$$

Les calculs ci-dessus signifient intuitivement que les formes harmoniques de $H^q(X, E^k \otimes F)$ se concentrent asymptotiquement sur $X(q)$, et qu'en chaque point $x \in X(q)$ leur direction tend à s'aligner sur le q-sous-espace de $T_x X$ correspondant à la partie négative de $ic(E)(x)$.

3. Caractérisation géométrique des variétés de Moišezon. — Soit X un espace analytique irréductible compact de dimension n. On sait d'après Siegel [6] que le degré de transcendance $a(X)$ du corps des fonctions méromorphes de X vérifie $0 \leqq a(X) \leqq n$. Lorsque $a(X) = n$, on dit que X est un espace de Moišezon. La conjecture de Grauert-Riemenschneider [5] affirme que X est de Moišezon si et seulement si il existe un faisceau $\mathscr{E}$ quasi-positif de rang 1 sans torsion au-dessus de X. Par désingularisation, on se ramène au cas où X est lisse et où $\mathscr{E}$ est le faisceau des sections d'un fibré en droites E semi-positif, de courbure $ic(E) > 0$ sur un ouvert dense de X. Siu ([7], [8]) a résolu récemment la conjecture, et l'a renforcée en supposant seulement $ic(E)$ semi-positive et >0 en au moins un point. Le théorème 1 permet de trouver une condition géométrique plus faible encore.

Théorème 10. — *Pour qu'une variété $\mathbb{C}$-analytique compacte connexe* X *soit de Moišezon, il suffit que* X *possède un fibré en droites hermitien* E *tel que* $\int_{X(\leqq 1)} (ic(E))^n > 0$.

Pour $q = 1$, l'inégalité 1 (b) implique en effet :

$$\dim H^0(X, E^k) \geqq \frac{k^n}{n!} \int_{X(\leqq 1)} \left(\frac{i}{2\pi} c(E)\right)^n - o(k^n).$$

Un résultat élémentaire de Siu [7] reposant sur les méthodes de Siegel donne d'autre part $\dim H^0(X, E^k) \leqq \text{Cte}.\, k^{a(X)}$, d'où $a(X) = n$.

Remise le 13 mai 1985.

Références bibliographiques

[1] Y. Colin de Verdiere, Minoration de sommes de valeurs propres et conjecture de Polya, *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*, Grenoble-Chambéry, 1984-1985.

[2] Y. Colin de Verdiere, *L'asymptotique de Weyl pour des bouteilles magnétiques bidimensionnelles*, Prépublication, n° 33, Université de Grenoble-I.

[3] J.-P. Demailly, Sur l'identité de Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne [*Séminaire P. Lelong-P. Dolbeault-H. Skoda (Analyse)* 1983/1984 (*Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag)].

[4] J.-P. Demailly, Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie *Ann. Inst. Fourier*, 1986 (à paraître).

[5] H. Grauert et O. Riemenschneider, Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf Komplexen Raüme, *Invent. Math.*, 11, 1970, p. 263-292.

[6] C. L. Siegel, Meromorphe Funktionen auf kompakten Mannigfaltigkeiten, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.*, n° 4, 1955, p. 71-77.

[7] Y. T. Siu, A vanishing theorem for semi-positive line bundles over non-Kähler manifolds, *J. Diff. Geom.*, 19, 1984, p. 431-452.

[8] Y. T. Siu, Some recent results in complex manifold theory related to vanishing theorems for the semi-positive case, *Survey article in the Proceedings of the Bonn Meeting on Complex Analysis*, 1984.

[9] E. Witten, Supersymmetry and Morse Theory, *J. Diff. Geom.*, 17, 1982, p. 661-692.

[10] E. Witten, *Holomorphic Morse inequalities*, Preprint, Princeton University, 1983.

Institut Fourier, Université de Grenoble-I,
L.A. n° 188 *associé au C.N.R.S.*, B.P. n° 74, 38402 *Saint-Martin d'Hères*
et *les Alloves*, 17, *rue Saint-Exupéry*,
38400 *Saint-Martin-d'Hères.*