SUR L'EXISTENCE DU CÔNE TANGENT À UN COURANT POSITIF FERMÉ

Mongi BLEL , Faculté des Sciences de Monastir,
Jean-Pierre DEMAILLY , Université de Grenoble I,
Mokhtar MOUZALI , Université de Grenoble I

Résumé. — Soit T un courant positif fermé sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$. Nous montrons que T admet un cône tangent (limite de la famille de ses homothétiques), dès que les masses projectives $\nu_T(r)$ convergent assez vite vers $\nu_T(0)$ pour que $(\nu_T(r)-\nu_T(0))/r$ soit localement sommable en $r=0$. Cette condition suffisante est optimale : nous construisons des courants de bidegré $(1,1)$ n'ayant pas de cône tangent, tels que l'intégrale de $(\nu_T(r)-\nu_T(0))/r$ soit aussi peu divergente qu'on le souhaite. Lorsque T est le courant d'intégration sur un ensemble analytique, on vérifie que $\nu_T(r)-\nu_T(0)=\mathrm{O}(r^\varepsilon)$, ce qui redonne le théorème de Thie-King sur l'existence du cône tangent.

Abstract. — **On the existence of the tangent cone to a closed positive current.**

Let T be a closed positive current on a neighborhood of 0 in $\mathbf{C}^n$. It is shown that T admits a tangent cone (limit of the family of its homothetic currents), provided that the projective masses $\nu_T(r)$ converge fast enough to $\nu_T(0)$ in order that $(\nu_T(r)-\nu_T(0))/r$ be locally sommable at $r=0$. This sufficient condition is optimal : we construct currents of bidegree $(1,1)$ which have no tangent cone, such that the integral of $(\nu_T(r)-\nu_T(0))/r$ is as slowly divergent as we wish. When T is the current of integration over an analytic set, it is shown that $\nu_T(r)-\nu_T(0)=\mathrm{O}(r^\varepsilon)$. This gives a new proof of Thie-King's existence theorem for the tangent cone.

1. Notations et principaux résultats.

Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{C}^n$. Nous renvoyons le lecteur à P. Lelong [Le] ou à [L-G] pour les définitions et résultats fondamentaux concernant les courants positifs fermés. Si h_a désigne l'homothétie complexe de rapport $a\in\mathbb{C}^\star$, on s'intéresse au problème de l'existence d'une limite faible pour la famille de courants $(h_a^\star T)$ lorsque $|a|$ tend vers 0 . Une telle limite, si elle existe, est appelée *cône tangent* au courant T . La question de savoir si le cône tangent existe toujours a été soulevée par plusieurs auteurs, en particulier R. Harvey [Ha] en 1975.

Mentionnons les principaux résultats connus à ce jour. Lorsque T est le courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique $A\subset B(R)$, on sait que le cône tangent existe et coïncide avec le courant d'intégration sur le cône tangent géométrique à A , muni de multiplicités convenables sur chacune de ses composantes irréductibles : ce résultat a été démontré par P. Thie [Th] en 1967 et R. King [Kg] en 1971. Très récemment, C.O. Kiselman [Km] a montré que la réponse générale est négative, en construisant une fonction plurisousharmonique

u telle que le courant $i\partial\overline{\partial}u$ n'a pas de cône tangent. Simultanément, et suite à une suggestion du deuxième auteur, le premier auteur de ce travail obtenait une condition suffisante d'existence du cône tangent : voir [Bl1] pour une méthode simple relative au cas des courants de bidegré $(1,1)$, et [Bl2] pour le cas général. Le présent travail reprend en partie le preprint [Bl2] et la Thèse de 3ème Cycle du troisième auteur : outre la condition suffisante déjà mentionnée, nous obtenons une deuxième condition suffisante plus naturelle et montrons que les techniques de [Bl1], [Bl2] pour les homothéties de rapport réel s'appliquent aussi au cas des homothéties de rapport complexe. Nous utiliserons les notations classiques :

$$\alpha = i\partial\overline{\partial}\log|z| \ , \quad \beta = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2 \ ,$$

$$(\star) \qquad T = 2^{-q}i^{q^2}\sum_{|I|=|J|=q} T_{I,J}\, dz_I\wedge d\overline{z}_J \ , \quad q = n-p \ .$$

La *mesure trace* de T est par définition la mesure positive

$$(\star\star) \qquad \sigma_T = T\wedge\frac{\beta^p}{p!} = \sum_{|I|=q} T_{I,I}\ .\ \tau$$

où $\tau = 2^{-n}idz_1\wedge d\overline{z}_1\wedge\ldots\wedge idz_n\wedge d\overline{z}_n$. On pose enfin $\sigma_T(r) = \sigma_T\big(B(r)\big)$, où $B(r)$ désigne la boule euclidienne ouverte de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{C}^n$, et on considère la *masse projective*

$$(\star\star\star) \qquad \nu_T(r) = \frac{\sigma_T(r)}{\pi^p r^{2p}/p!} \ ,$$

quotient de $\sigma_T(r)$ par le volume de la boule de rayon r dans $\mathbb{C}^p$. On sait d'après Lelong [Le] que $\nu_T(r)$ est fonction croissante de r . La limite $\nu_T(0) = \lim_{r\to 0+}\nu_T(r)$ est appelée *nombre de Lelong* de T au point 0 . Notre principal résultat est le :

Théorème 1. — *Le cône tangent à T au point 0 existe pourvu que la masse projective de T vérifie l'une ou l'autre des deux conditions :*

$$\text{(a)} \quad \int_0^{r_0}\frac{\sqrt{\nu_T(r)-\nu_T(r/2)}}{r}\,dr < +\infty \ , \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{r_0}\frac{\nu_T(r)-\nu_T(0)}{r}\,dr < +\infty$$

pour r_0 assez petit.

La condition (a) est celle obtenue dans [Bl1] et [Bl2], tandis que (b) est celle obtenue dans [Mz]. Les conditions (a) et (b) mesurent toutes deux la manière dont $\nu_T(r)$ converge vers sa limite quand r tend vers 0 . Il est facile de voir néanmoins qu'aucune des deux conditions n'implique l'autre. La construction de Kiselman [Km] permet de voir que la condition (b) est en un certain sens optimale :

Théorème 2. — *Supposons $n\geqslant 2$ et soit $\eta :]0,1]\longrightarrow]0,1]$ une fonction continue croissante telle que $\lim_{r\to 0}\eta(r) = 0$. Alors il existe une fonction plurisousharmonique u sur $\mathbb{C}^n$ telle que le courant $T = i\partial\overline{\partial}u$ n'a pas de cône tangent, bien que*

$$\int_0^1 \eta(r)\,\frac{\nu_T(r)-\nu_T(0)}{r}\,dr < +\infty \ .$$

Nous obtenons en fait un résultat plus précis, analogue à celui de [Km], montrant que l'ensemble limite de $(h_a^\star T)$ peut être une partie fermée connexe quelconque dans l'ensemble des courants coniques de nombre de Lelong égal à $\nu_T(0)$. Par ailleurs, le théorème 1 redonne le résultat de Thie-King affirmant l'existence du cône tangent à un courant d'intégration sur un ensemble analytique; dans ce cas, la convergence des intégrales (a) et (b) est assurée par l'estimation suivante :

Théorème 3. — *Pour tout ensemble analytique A de dimension pure p fermé dans Ω , le courant $[A]$ vérifie une estimation*

$$\nu_{[A]}(r) - \nu_{[A]}(0) \leqslant Cr^\varepsilon$$

pour r assez petit, avec des constantes $C, \varepsilon > 0$ convenables.

Des calculs plus poussés utilisant les techniques de Barlet [Ba] permettraient sans doute de montrer que $\nu_{[A]}(r) - \nu_{[A]}(0)$ admet un développement asymptotique en fonction des puissances de r et de $\log r$, mais nous n'avons pas cherché à obtenir ce résultat ici.

2. Formule de Lelong-Jensen et conséquences.

Soit T un courant de bidimension (p,p) défini sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et $T_{I,J}$ ses coefficients comme dans $(\star)$. Rappelons que T est dit (faiblement) positif si $T \wedge iu_1 \wedge \overline{u}_1 \wedge \ldots \wedge iu_p \wedge \overline{u}_p$ est une mesure positive pour tout système de $(1,0)$–formes u_j de classe C^∞ . Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1. — *Soit $\lambda_I = \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_q}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels $\geqslant 0$ quelconques. Pour tout courant positif T de bidimension (p,p) , les mesures coefficients $T_{I,J}$ vérifient l'inégalité :*

$$\lambda_I \lambda_J |T_{I,J}| \leqslant 2^p \sum_M \lambda_M^2 T_{M,M} \ ,$$

où M décrit l'ensemble des multi-indices tels que $M \supset I \cap J$ et $M \subset I \cup J$, avec $|M| = q = n - p$.

Démonstration. — Soient I, J tels que $|I| = |J| = q$. Posons $K = \complement I$, $L = \complement J$, avec $|K| = |L| = p$. Alors

$$T_{I,J}.\tau = \pm T \wedge 2^{-p} i^{p^2} dz_K \wedge d\overline{z}_L = \sum_{\lambda \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^p} \varepsilon_\lambda \, T \wedge \gamma_\lambda \ ,$$

avec $\varepsilon_\lambda = \pm 1$ ou $\varepsilon_\lambda = \pm i$ et

$$\gamma_\lambda = \bigwedge_{s=1}^{p} \frac{i}{8} (dz_{k_s} + i^{\lambda_s} dz_{\ell_s}) \wedge \overline{(dz_{k_s} + i^{\lambda_s} dz_{\ell_s})} \ .$$

En effet, on peut écrire :

$$dz_K \wedge d\overline{z}_L = \pm (dz_{k_1} \wedge d\overline{z}_{\ell_1}) \wedge \cdots \wedge (dz_{k_p} \wedge d\overline{z}_{\ell_p}) \ .$$

Le résultat découle alors de l'identité de polarisation :

$$4dz_k \wedge d\overline{z}_\ell = (dz_k + dz_\ell) \wedge (\overline{dz_k + dz_\ell}) - (dz_k - dz_\ell) \wedge (\overline{dz_k - dz_\ell})$$
$$+ i(dz_k + idz_\ell) \wedge (\overline{dz_k + idz_\ell}) - i(dz_k - idz_\ell) \wedge (\overline{dz_k - idz_\ell}) \ .$$

Chaque terme $T \wedge \gamma_\lambda$ est une mesure positive, donc

$$|T_{I,J}|.\tau \leqslant \sum_\lambda T \wedge \gamma_\lambda = T \wedge \bigwedge_{s=1}^{p} \left\{ \sum_{\lambda_s \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \frac{i}{8}(dz_{k_s} + i^{\lambda_s} dz_{\ell_s}) \wedge (\overline{dz_{k_s} + i^{\lambda_s} dz_{\ell_s}}) \right\}$$
$$\leqslant T \wedge \bigwedge_{s=1}^{p} \Big(\frac{i}{2} dz_{k_s} \wedge d\overline{z}_{k_s} + \frac{i}{2} dz_{\ell_s} \wedge d\overline{z}_{\ell_s} \Big)$$
$$\leqslant T \wedge 2^{|K\cap L|} \sum_{N \subset K \cup L} 2^{-p} i^{p^2} dz_N \wedge d\overline{z}_N \leqslant 2^p \sum_{I \cap J \subset M} T_{M,M}.\tau \ ,$$

avec $M = \complement N \supset \complement K \cap \complement L = I \cap J$ et $T \wedge 2^{-p} i^{p^2} dz_N \wedge d\overline{z}_N = T_{\complement N, \complement N}.\tau = T_{M,M}.\tau$. Ainsi, pour tout courant T positif, on a

$$|T_{I,J}| \leqslant 2^p \sum_{|M|=q \ , \ M \supset I \cap J} T_{M,M} \ .$$

Appliquons cette inégalité au courant $S = \Lambda^\star T$, où Λ est l'isomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ défini par :

$$\Lambda : \quad \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \ , \qquad z_j \longmapsto \lambda_j z_j \ ,$$

avec $\lambda_j > 0$. Dans ce cas, $S_{I,J} = \lambda_I \lambda_J T_{I,J}(\Lambda z)$. Comme $\Lambda^\star T$ est positif, l'inégalité précédente se traduit par

$$\lambda_I \lambda_J |T_{I,J}| \leqslant 2^p \sum_{M \supset I \cap J} \lambda_M^2 T_{M,M} \ .$$

Ceci reste vrai à la limite pour $\lambda_k \geqslant 0$, et le lemme s'obtient en prenant $\lambda_k = 0$ pour $k \notin I \cup J$. □

Soit maintenant T un courant positif fermé défini sur un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{C}^n$ et $B(R)$ la plus grande boule de centre 0 contenue dans Ω . Pour $0 < r_1 < r_2 < R$, la formule classique de Lelong-Jensen [Le] s'écrit

$$\nu_T(r_2) - \nu_T(r_1) = \frac{1}{\pi^p} \int_{B(r_2)\setminus B(r_1)} T \wedge \alpha^p \ . \tag{2.2}$$

La fonction $r \mapsto \nu_T(r)$, définie sur $]0, R[$, est donc positive croissante; sa limite en 0 , notée $\nu_T(0)$, est appelée *nombre de Lelong* de T en 0 . Pour $r \leqslant r_0 < R$, on obtient la majoration

$$\sigma_T(r) = \int_{B(r)} T \wedge \beta^p \leqslant C r^{2p} \ , \qquad C = \frac{\pi^p}{p!} \nu_T(r_0) \ .$$

En remplaçant T par le courant homothétique $h_a^\star T$, dont le domaine de définition $a^{-1}\Omega$ contient la boule $B(R/|a|)$, on trouve

$$\sigma_{h_a^\star T}(r) = |a|^{-2p} \sigma_T(|a| r) \ , \qquad \nu_{h_a^\star T}(r) = \nu_T(|a| r) \quad \text{si} \ \ |a| < R/r \ ,$$

et les formules précédentes impliquent :

$$(2.3) \qquad \frac{1}{\pi^p}\int_{B(r_2)\setminus B(r_1)} h_a^\star T\wedge\alpha^p = \nu_T(|a|r_2)-\nu_T(|a|r_1) \quad \text{si } |a|<R/r_2 \ ,$$

$$(2.4) \qquad \int_{B(r)} h_a^\star T\wedge\beta^p \leqslant Cr^{2p} \quad \text{si } |a|\leqslant r_0/r \ .$$

Il résulte de (2.4) que la famille de courants $(h_a^\star T)$ est uniformément bornée en masse sur tout compact de $\mathbb{C}^n$ pour $|a|$ assez petit. Les résultats de compacité usuels pour la topologie faible des courants impliquent alors :

CONSÉQUENCE 2.5. — *De toute suite $(h_{a_k}^\star T)$ avec $|a_k|$ tendant vers 0 , on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. Le courant T admet un cône tangent si et seulement si toutes ces sous-suites ont même limite.*

LEMME 2.6. — *Soit Θ un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur $\mathbb{C}^n$. Il y a équivalence entre les quatre propriétés suivantes :*

(a) *Θ est invariant par les homothéties h_a de rapport $a\in\mathbb{C}^\star$;*
(b) *Θ est invariant par les homothéties h_r de rapport $r>0$;*
(c) *$\Theta\wedge\alpha^p=0$ sur $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$;*
(d) *Θ est l'extension à $\mathbb{C}^n$ de l'image réciproque d'un courant positif fermé θ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ par la projection $\pi:\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{P}^{n-1}$.*

Un tel courant sera appelé un courant conique.

Démonstration. — Il est évident que (d) implique (a) et que (a) implique (b). Sous l'hypothèse (b), la fonction ν_Θ est constante, et la formule (2.2) montre que la propriété (c) est vérifiée. Reste à voir que (c) entraîne (d). Plaçons-nous par exemple sur l'ouvert de $\mathbb{C}^n$ défini par $z_n\neq 0$ et utilisons les coordonnées projectives

$$w_1=\frac{z_1}{z_n}\ ,\ \ldots\ ,\ w_{n-1}=\frac{z_{n-1}}{z_n}\ ,\quad w_n=z_n\ .$$

Dans ces coordonnées, α s'écrit $\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\log(1+|w_1|^2+\ldots+|w_{n-1}|^2)$ et un calcul classique montre que

$$\alpha\geqslant(1+|w'|^2)^{-2}\beta' \quad \text{où} \quad \beta'=\frac{i}{2}\,\partial\overline{\partial}(|w_1|^2+\ldots+|w_{n-1}|^2)\ .$$

Soient $\Theta_{I,J}$ les coefficients de Θ dans les coordonnées (w_j) . L'hypothèse $\Theta\wedge\alpha^p=0$ et la formule

$$\Theta\wedge\frac{\beta'^p}{p!}=\sum_{I\ni n}\Theta_{I,I}\ .\ \tau$$

entraînent $\Theta_{I,I}=0$ pour $I\ni n$. Le lemme 2.1 appliqué avec $\lambda_n\geqslant 0$ quelconque et $\lambda_1=\ldots=\lambda_{n-1}=1$ donne $\Theta_{I,J}=0$ si I et J contiennent n et

$$\lambda_n|\Theta_{I,J}|\leqslant 2^p\sum_{M\not\ni n}\Theta_{M,M}$$

si un seul des deux indices I ou J contient n . On a donc $\Theta_{I,J} = 0$ dans ce cas aussi. L'hypothèse $d\Theta = 0$ implique maintenant $\partial\Theta_{I,J}/\partial w_n = \partial\Theta_{I,J}/\partial\overline{w}_n = 0$ pour tous I, J , c'est-à-dire que Θ dépend uniquement des variables $w_1, \ldots, w_{n-1}$. Comme la projection $\pi : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ s'écrit $(w_1, \ldots, w_n) \longmapsto (w_1, \ldots, w_{n-1})$ dans les coordonnées (w_j) , on voit que $\Theta_{\restriction \mathbb{C}^n \setminus \{0\}}$ est bien l'image réciproque par π d'un courant positif fermé θ défini sur $\mathbb{P}^{n-1}$. $\square$

Proposition 2.7. — *Toute valeur d'adhérence Θ de la famille $(h_a^\star T)$ est un courant conique.*

Démonstration. — Comme $\nu_T(r)$ a une limite en 0 , la formule (2.3) implique en effet $\Theta \wedge \alpha^p = 0$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. $\square$

Corollaire 2.8. — *Si (a_k) , (b_k) sont deux suites de nombres complexes non nuls tendant vers 0 telles que les quotients $|a_k|/|b_k|$ et $|b_k|/|a_k|$ restent bornés, alors $h_{a_k}^\star T - h_{b_k}^\star T$ converge faiblement vers 0 sur $\mathbb{C}^n$.*

Démonstration. — Grâce à des extractions de sous-suites, on se ramène à la situation où $(h_{a_k}^\star T)$, $(h_{b_k}^\star T)$ admettent des limites faibles Θ_1 , Θ_2 , et où de plus $c_k = b_k/a_k$ converge vers une limite $c \in \mathbb{C}^\star$. Pour toute forme test φ , on a alors

$$\langle h_{a_k}^\star T, \varphi\rangle = \langle h_{1/c_k}^\star h_{b_k}^\star T, \varphi\rangle = \langle h_{b_k}^\star T, h_{c_k}^\star \varphi\rangle \longrightarrow \langle \Theta_2, h_c^\star \varphi\rangle$$

car $h_{c_k}^\star \varphi$ tend vers $h_c^\star \varphi$ en topologie C^∞ . La limite est égale à $\langle \Theta_2, \varphi\rangle$ d'après la proposition 2.7, par conséquent $\Theta_1 = \Theta_2$. $\square$

Il résulte du corollaire 2.8 que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la famille $(h_a^\star T)$ ne change pas si on se restreint aux homothéties de rapport réel positif.

3. Conditions suffisantes d'existence du cône tangent.

La majoration (2.4) montre que la famille $(h_a^\star T)$ est de masse uniformément petite au voisinage de l'origine. On en déduit que $(h_a^\star T)$ converge faiblement sur $\mathbb{C}^n$ si et seulement si $(h_a)^\star T$ converge faiblement au voisinage de tout point $z^0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Après une homothétie et un changement unitaire de coordonnées, nous pouvons supposer que $z^0 = (0, \ldots, 0, z_n^0)$ et $1/2 < z_n^0 < 1$. Nous utiliserons de nouveau les coordonnées projectives et poserons

$$\begin{aligned} &w_1 = \frac{z_1}{z_n} \ , \ \ldots \ , \ w_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{z_n} \ , \ \ w_n = z_n \ , \\ &T = 2^{-q} i^{q^2} \sum_{|I|=|J|=q} T_{I,J}\, dw_I \wedge d\overline{w}_J \ . \end{aligned}$$

Dans ces coordonnées, l'homothétie h_a s'écrit

$$(3.1) \qquad h_a : w = (w', w_n) \longmapsto (w', a w_n) \ , \qquad w' = (w_1, \ldots, w_{n-1}) \ ,$$

de sorte que les coefficients de $h_a^\star T$ sont donnés par

$$
(3.2) \qquad T_{I,J}^a(w) = \begin{cases} T_{I,J}(w', aw_n) & \text{si } n \notin I \ , \quad n \notin J \ , \\ a\, T_{I,J}(w', aw_n) & \text{si } n \in I \ , \quad n \notin J \ , \\ \overline{a}\, T_{I,J}(w', aw_n) & \text{si } n \notin I \ , \quad n \in J \ , \\ |a|^2\, T_{I,J}(w', aw_n) & \text{si } n \in I \ , \quad n \in J \ . \end{cases}
$$

Lemme 3.3. — *Soit U le voisinage du point z^0 défini par les inégalités $|z_n| > 1/2$ et $|z| < 1$. On considère la fonction*

$$
\gamma(r) = \nu_T(r) - \nu_T(r/2) \ , \qquad r \in]0, R[\ .
$$

Soit $r_0 < R$. Il existe des constantes $C_1, C_2, C_3 \geqslant 0$ telles que pour $|a| \leqslant r_0$ les mesures $T_{I,J}^a$ admettent les majorations de masse

$$
\int_U |T_{I,J}^a| \leqslant \begin{cases} C_1 & \textit{pour tous } I, J \ , \\ C_2\, \gamma(|a|) & \textit{si } n \in I \textit{ et } n \in J \ , \\ C_3 \sqrt{\gamma(|a|)} & \textit{si } n \in I \textit{ ou } n \in J \ . \end{cases}
$$

Démonstration. — Comme $\overline{U}$ est compact dans la carte définie par les coordonnées (w_j) et comme la $(1,1)$–forme β est définie positive, on a une minoration $\beta \geqslant C_4 i\partial\overline{\partial}|w|^2$ sur $\overline{U}$. L'inégalité (2.4) avec $r = 1$ entraîne que $\int_U \sum T_{I,I}^a$ est bornée par une constante C_5 indépendante de a pour $|a| \leqslant r_0$. Par ailleurs, nous avons vu que

$$
\alpha \geqslant C_6 \beta' \quad \text{sur} \quad U \ , \qquad \text{avec} \quad \beta' = \frac{i}{2}\, \partial\overline{\partial}(|w_1|^2 + \ldots + |w_{n-1}|^2) \ .
$$

L'inégalité (2.3) avec $r_1 = 1/2$ et $r_2 = 1$ entraîne donc

$$
\int_U \sum_{I \ni n} T_{I,I}^a \leqslant C_7\big(\nu_T(|a|) - \nu_T(|a|/2)\big) = C_7\, \gamma(|a|) \quad \text{ si } \ |a| < R \ .
$$

La majoration pour $T_{I,J}^a$ quelconque résulte alors du lemme 2.1. Montrons-le par exemple dans le dernier cas, en supposant $n \in I$, $n \notin J$. Si nous choisissons $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 1$, il vient

$$
\lambda_n \int_U |T_{I,J}^a| \leqslant 2^p \int_U \Big(\sum_{M \not\ni n} T_{M,M}^a + \lambda_n^2 \sum_{M \ni n} T_{M,M}^a \Big) \leqslant 2^p \big(C_5 + C_7 \lambda_n^2 \gamma(|a|)\big) \ .
$$

L'inégalité cherchée s'obtient en prenant $\lambda_n = \gamma(|a|)^{-1/2}$. □

Nous cherchons maintenant des conditions assurant que $h_a^\star T$ admet une limite faible sur U quand $|a|$ tend vers 0 . Le lemme 3.3 montre que le coefficient $T_{I,J}^a$ tend vers 0 en masse dès que I ou J contient n . Il suffit donc d'étudier la convergence faible des mesures $T_{I,J}^a$ lorsque $n \notin I$ et $n \notin J$. Soit φ une fonction C^∞ à support compact dans U . Pour $I, J \not\ni n$, on considère la fonction

$$
f_{I,J}(a) = \int_U T_{I,J}^a(w) \varphi(w)\, d\tau(w) = \int_U T_{I,J}(w', aw_n) \varphi(w)\, d\tau(w) \ .
$$

La fonction $f_{I,J}$ est de classe C^∞ sur le disque pointé $0 < |a| < R$ et bornée au voisinage de 0 . Le problème consiste à voir si $f_{I,J}(a)$ admet une limite quand $|a|$ tend vers 0 . Pour cela, l'idée est de rechercher une estimation des dérivées $\partial f_{I,J}/\partial a$, $\partial f_{I,J}/\partial \overline{a}$ ou $\partial^2 f_{I,J}/\partial a\partial \overline{a}$ au voisinage de 0 . Par dérivation sous le signe somme

$$\frac{\partial f_{I,J}}{\partial a} = \int_U w_n \frac{\partial T_{I,J}}{\partial w_n}(w', aw_n)\varphi(w)\, d\tau(w) \ .$$

Le coefficient de $dw_{I\cup\{n\}} \wedge d\overline{w}_J$ dans dT est donné par

$$(-1)^q \frac{\partial T_{I,J}}{\partial w_n} + \sum_{1\leqslant k\leqslant q} (-1)^{k-1} \frac{\partial T_{I(k),J}}{\partial w_{i_k}} \qquad \text{avec} \quad I(k) = (I \setminus \{i_k\}) \cup \{n\} \ .$$

Ce coefficient est nul car $dT = 0$ et on a $T_{I(k),J}(w', aw_n) = a^{-1} T^a_{I(k),J}(w)$, d'où

$$\frac{\partial T_{I,J}}{\partial w_n}(w', aw_n) = \frac{1}{a} \sum_{1\leqslant k\leqslant q} (-1)^{q+k} \frac{\partial T^a_{I(k),J}}{\partial w_{i_k}}(w) \ .$$

Substituons maintenant cette relation dans l'intégrale donnant $\partial f_{I,J}/\partial a$ et intégrons par parties. Il vient

$$\frac{\partial f_{I,J}}{\partial a} = \frac{1}{a} \sum_{1\leqslant k\leqslant q} (-1)^{q+k-1} \int_U w_n T^a_{I(k),J} \frac{\partial \varphi}{\partial w_{i_k}}\, d\tau(w) \ .$$

On a naturellement la formule conjuguée

$$\frac{\partial f_{I,J}}{\partial \overline{a}} = \frac{1}{\overline{a}} \sum_{1\leqslant \ell\leqslant q} (-1)^{q+\ell-1} \int_U \overline{w}_n T^a_{I,J(\ell)} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{w}_{j_\ell}}\, d\tau(w) \ .$$

En redérivant cette deuxième égalité par la première formule, on obtient

$$\frac{\partial^2 f_{I,J}}{\partial a\partial \overline{a}} = \frac{1}{|a|^2} \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant q} (-1)^{k+\ell} \int_U |w_n|^2 T^a_{I(k),J(l)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_{i_k}\partial \overline{w}_{j_\ell}}\, d\tau(w) \ .$$

La fonction φ et ses dérivées sont bornées sur U . Comme $n \in I(k)$ et $n \in J(\ell)$, le lemme 3.3 fournit les majorations suivantes :

CONSÉQUENCE 3.4. — *Il existe des constantes $C_1, C_2 \geqslant 0$ telles que*

$$\Big|\frac{\partial f_{I,J}}{\partial a}\Big| + \Big|\frac{\partial f_{I,J}}{\partial \overline{a}}\Big| \leqslant C_1 \frac{\sqrt{\gamma(|a|)}}{|a|} \ , \qquad \Big|\frac{\partial^2 f_{I,J}}{\partial a\partial \overline{a}}\Big| \leqslant C_2 \frac{\gamma(|a|)}{|a|^2} \qquad \textit{pour} \quad 0 < |a| \leqslant r_0 \ .$$

Pour exploiter ce résultat, nous énonçons maintenant deux lemmes élémentaires permettant d'affirmer l'existence de la limite $\lim_{|a|\to 0} f(a)$ à partir d'estimations sur les dérivées de f .

LEMME 3.5. — *Soit f une fonction de classe C^1 définie sur le disque pointé $0 < |a| \leqslant r_0$. On suppose qu'il existe une fonction mesurable $u :]0, r_0] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que*

$$|df(a)| \leqslant u(|a|) \ , \qquad \textit{avec} \quad \int_0^{r_0} u(r)dr < +\infty \ .$$

Alors $f(a)$ admet une limite quand $|a|$ tend vers 0 .

Démonstration. — D'après le critère de Cauchy, il suffit de montrer que $|f(a_1) - f(a_2)|$ tend vers 0 lorsque $a_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $a_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ tendent vers 0. On suppose $r_1 \leqslant r_2$, et on considère les points $b_1 = re^{i\theta_1}$, $b_2 = re^{i\theta_2}$ avec $r \in]0, r_2[$. Le théorème des accroissements finis et l'inégalité triangulaire entraînent

$$\begin{aligned}
|f(a_j) - f(b_j)| &\leqslant \int_{[r,r_j]} u(t)\,dt \leqslant \int_0^{r_2} u(t)\,dt \ , \qquad j = 1, 2 \ , \\
|f(b_2) - f(b_1)| &\leqslant \int_{[\theta_1,\theta_2]} u(r)\,rd\theta \leqslant \pi r u(r) \ , \\
|f(a_1) - f(a_2)| &\leqslant 2 \int_0^{r_2} u(t)\,dt + \pi r_2 u(r) \ .
\end{aligned}$$

Prenons la valeur moyenne des termes de la dernière ligne pour $r \in]0, r_2[$. Il vient $|f(a_1) - f(a_2)| \leqslant (2 + \pi) \int_0^{r_2} u(t)\,dt$, ce qui tend vers 0 lorsque r_2 tend vers 0. $\square$

LEMME 3.6. — *Soit f une fonction de classe C^2 définie sur le disque pointé $0 < |a| \leqslant r_0$. On suppose que f est bornée et qu'il existe une fonction mesurable $u :]0, r_0] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que*

$$|\Delta f(a)| \leqslant u(|a|) \ , \qquad \text{avec} \qquad \int_0^{r_0} r|\log r| u(r) dr < +\infty \ .$$

Alors $f(a)$ admet une limite quand $|a|$ tend vers 0 .

Démonstration. — Quitte à modifier f en la multipliant par une fonction plateau égale à 1 au voisinage de 0 , il n'est pas restrictif de supposer que f est définie sur $\mathbb{C}^\star$ et à support dans le disque ouvert $|a| < r_0$, avec $|r_0| < 1/2$. Comme $\int_0^{r_0} u(r) r dr$ converge d'après l'hypothèse, la fonction $g(a) = \Delta f(a)$, $a \in \mathbb{C}^\star$, est intégrable sur $\mathbb{C}$. Par ailleurs f est bornée, donc f définit une distribution sur $\mathbb{C}$. On note $\Delta f \in \mathcal{D}'(\mathbb{C})$ le Laplacien de f au sens des distributions.

La distribution $\Delta f - g$ a son support contenu dans $\{0\}$ et elle est au plus d'ordre 2 car f et g sont d'ordre 0 , par suite

$$\Delta f - g = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} C_\alpha \delta_0^{(\alpha)} \ ,$$

où $\delta_0^{(\alpha)}$ désigne la dérivée $\partial^{|\alpha|} / \partial a^{\alpha_1} \partial \overline{a}^{\alpha_2}$ de la masse de Dirac en 0. Effectuons une convolution avec la solution élémentaire $E = \frac{1}{2\pi} \log |a|$. Il vient

$$f - E \star g = C_{0,0} \frac{1}{2\pi} \log |a| - \frac{C_{1,0}}{4\pi a} - \frac{C_{0,1}}{4\pi \overline{a}} - \frac{C_{2,0}}{4\pi a^2} - \frac{C_{0,2}}{4\pi \overline{a}^2} + \frac{C_{1,1}}{4} \delta_0 \ .$$

Si nous montrons que $E \star g$ est une fonction continue sur $\mathbb{C}$, alors comme f est bornée et ne porte pas de masse en 0 , il en résultera que tous les coefficients C_α sont nuls; par suite $f = E \star g$ et en particulier f sera continue en 0 .

Soit $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{C})$ une famille de fonctions tronquantes au voisinage de 0 :

$$\rho_\varepsilon(a) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |a| > \varepsilon \\ 0 & \text{pour } |a| < \varepsilon/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \rho_\varepsilon \leqslant 1 \ .$$

Puisque la fonction $\rho_\varepsilon g$ est continue à support compact dans $\mathbb{C}$, la convolée $E \star (\rho_\varepsilon g)$ est continue sur $\mathbb{C}$. Il suffit donc de montrer que $E \star (\rho_\varepsilon g)$ converge uniformément vers $E \star g$ sur le disque $|a| < 1/2$, quand ε tend vers 0 . Comme $|g(z)| \leqslant u(|z|)$ et comme la fonction $1-\rho_\varepsilon(z)$ est à support dans le disque $|z| \leqslant \varepsilon$, nous avons pour $\varepsilon < 1/2$:

$$\left|E * \big((1-\rho_\varepsilon)g\big)(a)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|z|\leqslant\varepsilon} -\log|a-z|\, u(|z|)\, d\lambda(z)$$

car le logarithme est toujours négatif. L'égalité de moyenne pour la fonction harmonique $z \longmapsto \log|a-z|$ avec $|z| = r < |a|$ et pour $a \longmapsto \log|a-z|$ avec $|a| < r$ donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|a - re^{i\theta}|\, d\theta = \max\{\log|a|, \log r\} \ .$$

Il en résulte

$$\left|E * \big((1-\rho_\varepsilon)g\big)(a)\right| \leqslant \int_0^\varepsilon \min\{-\log|a|, -\log r\}\, u(r)\, rdr \leqslant \int_0^\varepsilon r|\log r|\, u(r)\, dr \ ,$$

donc $E \star \big((1-\rho_\varepsilon)g\big)$ converge bien uniformément vers 0 sur le disque $|a| < 1/2$. □

Démonstration du théorème 1. — Nous avons vu que $(h_a^\star T)$ admet une limite faible si et seulement si la fonction

$$f_{I,J}(a) = \int_U T^a_{I,J}(w)\, \varphi(w)\, d\tau(w)$$

admet une limite quand $|a|$ tend vers zéro, pour tous $I, J \not\ni n$ et toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. D'après les estimations 3.4 et les lemmes 3.5, 3.6, il suffit que la fonction $\gamma(r) = \nu_T(r) - \nu_T(r/2)$ vérifie l'une des deux conditions :

$$\text{(a)} \quad \int_0^{r_0} \frac{\sqrt{\gamma(r)}}{r}\, dr < +\infty \ , \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{r_0} \frac{|\log r|\, \gamma(r)}{r}\, dr < +\infty \ .$$

La condition (a) est précisément celle donnée dans le §1. On a par ailleurs

$$\begin{aligned}\int_0^{r_0} \frac{\nu_T(r) - \nu_T(0)}{r}\, dr &= \int_0^{r_0} \frac{\sum \gamma(r2^{-k})}{r}\, dr = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{r_0 2^{-k}} \frac{\gamma(r)}{r}\, dr \\ &= \int_0^{r_0} \Big[\frac{\log(2r_0/r)}{\log 2}\Big] \frac{\gamma(r)}{r}\, dr \ ,\end{aligned}$$

où [ ] désigne la partie entière. Ceci montre l'équivalence de la condition (b) avec celle du §1. □

Remarque 3.7. — On peut voir facilement qu'aucune des deux conditions (a) et (b) n'implique l'autre. Prenons en effet $T = i\partial\overline{\partial}u$ avec $u = \chi(\log|z|)$ où $\chi :]-\infty, t_0[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe croissante. On sait alors que $r^{-1}\nu_T(r)$ est la dérivée à gauche de la valeur moyenne de u sur la sphère de rayon r , d'où

$$\nu_T(r) = \chi'(\log r - 0) \ .$$

Le choix $\chi(t) = (\log|t|)^{-1}$ sur $]-\infty, -1[$ donne $\nu_T(0) = 0$ et

$$\nu_T(r) = |\log r|^{-1}(\log|\log r|)^{-2}\ , \qquad \gamma(r) \simeq \log 2 |\log r|^{-2}(\log|\log r|)^{-2}$$

donc (a) diverge et (b) converge. De même, il existe une fonction χ affine par morceaux telle que

$$\nu_T(r) = \frac{1}{k^2} \quad \text{sur }]e^{-k^2}, e^{-(k-1)^2}]\ , \quad k \geqslant 1\ , \quad \text{d'où}$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\nu_T(r) - \nu_T(r/2)}}{r}\,dr = \sum_{k=1}^{+\infty} \log 2 \sqrt{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}} < +\infty\ ,$$

$$\int_0^1 \frac{\nu_T(r) - \nu_T(0)}{r}\,dr = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \log \frac{e^{-(k-1)^2}}{e^{-k^2}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{k^2} = +\infty\ .$$

4. Optimalité de la condition suffisante (b).

Soit K_p l'ensemble des courants positifs fermés coniques de bidimension (p,p) et de nombre de Lelong égal à 1 ; c'est une partie convexe métrisable et faiblement compacte dans l'espace des courants. Si T est un courant positif fermé sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, l'ensemble limite de la famille $(h_a^\star T)$ est donné par

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{\{h_a^\star T\,;\, 0 < |a| < 2^{-k}\}}\ .$$

Comme chaque facteur de l'intersection est une partie compacte connexe de l'espace des courants, l'ensemble limite est une partie *compacte connexe*, contenue dans $\nu_T(0).K_p$. Inversement, pour $p = 1$, C.O. Kiselman [Km] a montré que toute partie fermée connexe $M \subset K_1$ peut être réalisée comme ensemble limite des homothétiques d'un courant T de bidegré $(1,1)$. Notre objectif est de démontrer le théorème suivant, qui contient le théorème 2 et précise le résultat de Kiselman.

THÉORÈME 4.1. — *Soit M une partie fermée connexe de K_1 . Pour toute fonction continue croissante $\eta :]0,1] \longrightarrow]0,1]$ telle que $\lim_{t\to 0}\eta(t) = 0$, il existe une fonction plurisousharmonique u sur $\mathbb{C}^n$ telle que le courant $T = i\partial\overline{\partial}u$ vérifie*

$$\int_0^1 \eta(r)\,\frac{\nu_T(r) - \nu_T(0)}{r}\,dr < +\infty$$

et telle que l'ensemble limite de la famille $(h_a^\star T)$ soit égal à M .

LEMME 4.2. — *Pour toute partie fermée connexe $M \subset K_1$, il existe une suite de fonctions $v_k \in C^\infty(\mathbb{P}^{n-1})$ telle que $\|v_{k+1} - v_k\|_\infty$ tende vers zéro et telle que $i\partial\overline{\partial}(\log|z| + v_k \circ \pi)$ soit une suite de courants positifs dont l'ensemble limite est égal à M .*

Démonstration. — Soit δ une distance définissant la topologie de K_1 . Comme deux points quelconques d'un espace métrique compact connexe peuvent être reliés par une chaîne de points arbitrairement proches, il existe une suite de courants (Θ_k) dense dans M telle que $\delta(\Theta_k, \Theta_{k+1})$ tend vers zéro. On sait que le potentiel canonique

$$f_k(z) = \frac{(2\pi)^{-n}}{n-1} \int_{\mathbb{C}^n} \Big(\frac{1}{(1+|\zeta|^2)^{n-1}} - \frac{1}{|z-\zeta|^{2n-2}}\Big)\Theta_k(\zeta) \wedge (i\partial\overline{\partial}|\zeta|^2)^{n-1}$$

vérifie $i\partial\overline{\partial} f_k = \Theta_k$. Un calcul simple utilisant l'invariance de Θ_k par homothéties montre que $f_k(az) - f_k(z)$ est une constante. Cette constante est égale à $\log|a|$ parce que le nombre de Lelong de f_k en 0 est 1 . Par suite $f_k(z) - \log|z|$ est invariante par homothéties, c'est-à-dire que $f_k(z) - \log|z| = w_k(\pi(z))$ où w_k est une fonction sur l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}$. Par construction $\Theta_{k+1} - \Theta_k$ converge faiblement vers 0 , donc il en est de même pour $f_{k+1} - f_k$ et $w_{k+1} - w_k$. Soit $\rho_\varepsilon(g) = \varepsilon^{-n^2}\rho(|g|^2/\varepsilon^2)$ une famille de noyaux régularisants sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(n)$ du groupe unitaire. Il suffit de prendre pour v_k une convolution sphérique $v_k = \rho_{\varepsilon_k} \star w_k$ définie par

$$v_k(z) = \int_{g\in\mathfrak{u}(n)} \rho_{\varepsilon_k}(g)\, w_k(e^g(z))\, dg\ .$$

Comme $\partial\rho_\varepsilon(g)/\partial\varepsilon = \mathrm{O}(\varepsilon^{-n^2-1})$, la différence $||\rho_{\varepsilon_{k+1}} - \rho_{\varepsilon_k}||_\infty$ tend vers 0 dès que $\varepsilon_{k+1}^{-n^2} - \varepsilon_k^{-n^2}$ tend vers 0 . Ceci a lieu par exemple si $\varepsilon_k = \psi(k)^{-1/n^2}$ où ψ est une fonction croissante telle que $\lim_{t\to+\infty}\psi(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty}\psi'(t) = 0$. Dans ce cas, $||(\rho_{\varepsilon_{k+1}} - \rho_{\varepsilon_k}) \star w_k||_\infty$ tend vers 0 car la norme L^1 des fonctions w_k sur $\mathbb{P}^{n-1}$ est uniformément bornée. Par ailleurs la convergence faible de $w_{k+1} - w_k$ vers 0 entraîne que $||\rho_\varepsilon \star (w_{k+1} - w_k)||_\infty$ tend vers 0 pour tout ε , donc $||\rho_{\varepsilon_{k+1}} \star (w_{k+1} - w_k)||_\infty$ tend vers 0 si $\varepsilon_k = \psi(k)^{-1/n^2}$ tend vers 0 suffisamment lentement. Alors

$$||v_{k+1} - v_k||_\infty \leqslant ||\rho_{\varepsilon_{k+1}} \star (w_{k+1} - w_k)||_\infty + ||(\rho_{\varepsilon_{k+1}} - \rho_{\varepsilon_k}) \star w_k||_\infty$$

tend vers 0 . De plus, la suite des régularisés $\rho_{\varepsilon_k} \star \Theta_k$ des courants positifs $\Theta_k = i\partial\overline{\partial} f_k = i\partial\overline{\partial}(\log|z| + w_k\circ\pi)$ est donnée par

$$\int_{g\in\mathfrak{u}(n)} \rho_{\varepsilon_k}(g)\, (e^g)^\star\Theta_k\, dg = i\partial\overline{\partial}(\rho_{\varepsilon_k} \star f_k) = i\partial\overline{\partial}(\log|z| + v_k\circ\pi)$$

et a les mêmes valeurs d'adhérence que la suite (Θ_k) . $\square$

Démonstration du théorème 4.1. — Soit v_k la suite de fonctions données par le lemme 4.2. Nous avons alors $||v_k||_\infty = \mathrm{o}(k)$ et nous pouvons supposer que $||v_{k+1} - v_k||_\infty < 1$ pour tout k . On pose

$$u_k(z) = (1+\delta_k)\log|z| + v_k(\pi(z)) - 3k\ , \qquad u(z) = \sup_{k\in\mathbb{N}} u_k(z)\ ,$$

où $\delta_k > 0$ est une suite telle que $\delta_{k+1} < \delta_k/5$. Pour $|z| < 1$, nous avons

$$u_{k+1} - u_k(z) = -(\delta_k - \delta_{k+1})\log|z| + (v_{k+1} - v_k)(\pi(z)) - 3$$
$$\begin{cases} < -\delta_k\log|z| - 2 \\ > -(4\delta_k/5)\log|z| - 4\ . \end{cases}$$

On a donc $u_k(z) > u_{k+1}(z)$ si $|z| > e^{-2/\delta_k}$ et $u_{k+1} > u_k(z)$ si $|z| < e^{-5/\delta_k}$, c'est-à-dire que les deux fonctions se "croisent" dans la couronne

$$\mathcal{C}_k : e^{-5/\delta_k} \leqslant |z| \leqslant e^{-2/\delta_k} .$$

De plus, ces couronnes sont deux à deux disjointes d'après le choix initial $\delta_{k+1} < \delta_k/5$. Il en résulte que u coïncide avec u_k dans la couronne $\mathcal{C}'_k$ séparant $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k-1}$, à savoir

$$\mathcal{C}'_k : e^{-2/\delta_k} < |z| < e^{-5/\delta_{k-1}} .$$

On a par ailleurs

$$\nu_{i\partial\overline{\partial}u_k}(r) = r\,\frac{d}{dr}\big(\text{valeur moyenne de } u_k \text{ sur } S(r)\big) = 1 + \delta_k$$

pour tout r , d'où

$$\nu_T(r) = 1 + \delta_k \quad \text{sur } \mathcal{C}'_k\ , \qquad 1 + \delta_{k+1} \leqslant \nu_T(r) \leqslant 1 + \delta_k \quad \text{sur } \mathcal{C}_k\ .$$

En découpant l'intégration sur $[0,1]$ selon la subdivision e^{-5/δ_k} et en posant $\delta_{-1} = +\infty$, on trouve

$$\int_0^1 \eta(r)\,\frac{\nu_T(r) - \nu_T(0)}{r}\,dr \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \eta(e^{-5/\delta_{k-1}})\,\delta_k\,\log\frac{e^{-5/\delta_{k-1}}}{e^{-5/\delta_k}} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} 5\eta(e^{-5/\delta_{k-1}})\ .$$

Il est clair que la série converge dès que la suite δ_k tend vers 0 assez vite.

Nous allons voir maintenant que l'ensemble limite de la famille $(h_a^\star T)$ coïncide avec l'ensemble limite de la suite $i\partial\overline{\partial}u_k$, qui est égal à M d'après le lemme 4.2. Soit z^1 un point fixé sur la sphère unité de $\mathbb{C}^n$. Etant donné $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$, soit $k = k(a)$ un entier tel que $u(az^1) = u_k(az^1)$. Nous avons alors $az^1 \in \mathcal{C}_k \cup \mathcal{C}'_k \cup \mathcal{C}_{k-1}$, c'est-à-dire

$$e^{-5/\delta_k} \leqslant |a| \leqslant e^{-2/\delta_{k-1}} ,$$

en particulier $k = k(a)$ tend vers $+\infty$ quand $|a|$ tend vers 0 . La suite $1/k\delta_{k-1}$, qui est minorée par $5^{k-1}/k\delta_0$, tend donc vers $+\infty$. Pour z dans la couronne

$$\Gamma_k : e^{-1/k\delta_{k-1}} < |z| < e^{1/k\delta_{k-1}}$$

on voit facilement que $az \in \mathcal{C}'_{k+1} \cup \mathcal{C}_k \cup \mathcal{C}'_k \cup \mathcal{C}_{k-1} \cup \mathcal{C}'_{k-1}$, donc $u(az) = u_\ell(az)$ avec $\ell = k, k+1$ ou $k-1$. Or

$$u_\ell(az) - u_k(az) = (\delta_\ell - \delta_k)\log|az| + (v_\ell - v_k)(\pi(z)) - 3(\ell - k)\ ;$$

pour $z \in \Gamma_k$, l'écart de cette fonction avec sa valeur en z^1 est majoré par

$$|\delta_\ell - \delta_k|\,\frac{1}{k\delta_{k-1}} + 2||v_\ell - v_k||_\infty \leqslant \frac{1}{k} + 2\max\{||v_{k+1} - v_k||_\infty, ||v_{k-1} - v_k||_\infty\}\ .$$

L'écart de la fonction $u(az) - u_k(az) = \max\{u_\ell(az) - u_k(az)\}$ avec sa valeur (nulle) en z^1 est majoré par la même quantité tendant vers 0 , donc $||u \circ h_a - u_k \circ h_a||_{L^\infty(\Gamma_k)}$ tend vers 0 . Par application de l'opérateur $i\partial\overline{\partial}$, on voit que

$$h_a^\star(i\partial\overline{\partial}u) - h_a^\star(i\partial\overline{\partial}u_{k(a)}) = h_a^\star T - i\partial\overline{\partial}u_{k(a)}$$

tend vers zéro faiblement sur tout compact de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. $\square$

5. Cône d'un ensemble analytique.

Nous commencerons par rappeler quelques notions très classiques relatives à la construction géométrique du cône tangent d'un ensemble analytique. Soit $(A, 0)$ un germe d'ensemble analytique de dimension pure p dans $\mathbb{C}^n$. On suppose que A est défini par des équations $f_1(z) = \ldots = f_N(z) = 0$ dans un voisinage ouvert Ω de 0 . L'ensemble analytique E dans l'ouvert

$$U = \{(t, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n\,;\, tz \in \Omega\}$$

défini par les équations $f_j(tz) = 0$ est la réunion de $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ et des homothétiques $\{t\} \times t^{-1}A$ de A pour $t \in \mathbb{C}^\star$. Soit $E^\star$ la réunion des composantes irréductibles de E qui ne sont pas contenues dans $\{0\} \times \mathbb{C}^n$. Chacune de ces composantes E_j est de dimension $p+1$, donc $E^\star$ est un ensemble analytique de dimension pure $p+1$. De plus $E_j \setminus (\{0\} \times \mathbb{C}^n)$ est dense dans E_j , donc $E^\star = \bigcup E_j$ est l'adhérence de

$$E \setminus (\{0\} \times \mathbb{C}^n) = \bigcup_{t \in \mathbb{C}^\star} \{t\} \times t^{-1}A\ .$$

Le *cône tangent ensembliste* $C(A)$ est l'ensemble analytique de dimension pure p défini par

$$\{0\} \times C(A) = E^\star \cap (\{0\} \times \mathbb{C}^n)\ . \tag{5.1}$$

D'après ce qui précède, c'est exactement l'ensemble des limites des suites $t_k^{-1} z_k$ lorsque $z_k \in A$ et $t_k \in \mathbb{C}^\star$ tendent vers 0 .

Si $[A]$ désigne le courant d'intégration sur A , alors $h_r^\star[A] = [r^{-1}A]$ sur $r^{-1}\Omega$. Pour $B(R) \subset \Omega$ et $r < R$ nous avons :

$$\nu_{[A]}(r) = \nu_{[r^{-1}A]}(1) = \frac{1}{\pi^p} \int_{r^{-1}A \cap B(1)} \beta^p = \frac{1}{\pi^p} \int_{r^{-1}A \cap S(1)} \beta^{p-1} \wedge \frac{i}{2} \overline{\partial} |z|^2\ . \tag{5.2}$$

La dernière égalité résulte du théorème de Stokes, qui s'applique dès lors que r n'est pas valeur critique de la fonction $|z|$ sur A_{reg}; d'après le théorème de Sard l'ensemble de ces valeurs critiques forme un ensemble au plus dénombrable D . Considérons l'ensemble analytique réel $M = E^\star \cap (\mathbb{R} \times S(1))$ et, pour tous réels $r_1 < r_2 < R$, l'ensemble

$$M(r_1, r_2) = E^\star \cap (]r_1, r_2[\times S(1)) = M \cap (]r_1, r_2[\times \mathbb{C}^n)\ .$$

Nous avons $\dim_{\mathbb{R}} r^{-1}A \cap S(1) = 2p - 1$ et

$$M = \{0\} \times (C(A) \cap S(1)) \cup \bigcup_{r \in \mathbb{R}^\star} \{r\} \times (r^{-1}A \cap S(1))\ ,$$

de sorte que M est de dimension réelle pure $2p$. Pour $r_1, r_2 \notin D$, le bord $\partial M(r_1, r_2)$ s'identifie à $\bigcup_{j=1,2} \{r_j\} \times (r_j^{-1}A \cap S(1))$ et il est lisse aux points réguliers de $r_j^{-1}A$; la formule (5.2) et le théorème de Stokes donnent

$$\nu_{[A]}(r_2) - \nu_{[A]}(r_1) = \frac{1}{\pi^p} \int_{M(r_1, r_2)} \beta^p\ . \tag{5.3}$$

Cette formule reste vraie par continuité pour toutes valeurs $r_2 > r_1 \geqslant 0$. L'inégalité classique de Wirtinger montre que la $2p$–forme $(\beta^p/p!)_{\restriction M}$ est majorée en valeur absolue par le volume riemannien $2p$–dimensionnel de M . Nous obtenons en particulier :

$$\nu_{[A]}(r) - \nu_{[A]}(0) \leqslant \frac{p!}{\pi^p} \operatorname{Vol}_{2p}\big(M(0,r)\big) . \tag{5.4}$$

Le théorème 3 du §1 résulte maintenant aussitôt de l'inégalité (5.4) et du lemme élémentaire suivant.

Lemme 5.5. — *Soit M un ensemble analytique réel de dimension $\leqslant p$ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et soit g une fonction $\mathbb{R}$–analytique sur Ω . On pose*

$$M(0,r) = \{x \in M \,;\, 0 < g(x) < r\} .$$

Alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes $C, \varepsilon > 0$ telles que

$$\operatorname{Vol}_p\big(M(0,r) \cap K\big) \leqslant C r^\varepsilon .$$

Démonstration. — Le résultat est visiblement local. On peut supposer que M est un germe d'ensemble analytique irréductible au voisinage de 0 , dont l'idéal est engendré par un nombre fini de séries entières $h_k(x)$ convergentes sur le cube $|x_j| < R$, et que g est une série entière convergente sur ce cube. On suppose de plus $\dim_{\mathbb{R}} M = p$ et $g \not\equiv 0$ sur M , sinon il n'y a rien à démontrer. Soit $M_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}^n \,;\, h_k(z) = 0\}$ le complexifié de M dans le polydisque $|z_j| < R$ (voir par exemple R. Narasimhan [Na]). Pour R assez petit $M_{\mathbb{C}}$ est irréductible (de dimension complexe p). Après un changement éventuel des coordonnées réelles (x_j) , toutes les projections $\pi_J : z \longmapsto (z_{j_1}, \ldots, z_{j_p})$, $J = (j_1, \ldots, j_p)$, réalisent $M_{\mathbb{C}}$ comme revêtement ramifié au dessus du polydisque de rayon R de $\mathbb{C}^p$. Pour tout $J = (j_1, \ldots, j_p)$, soit $g_J(z_J)$ la fonction holomorphe égale au produit des valeurs $g(z)$ aux différents points $z \in M_{\mathbb{C}} \cap \pi_J^{-1}(z_J)$. Quitte à diminuer R , nous pouvons supposer g bornée, donc

$$\pi_J(M(0,r)) \subset \{(x_J) \in \mathbb{R}^p \,;\, |x_{j_k}| < R \text{ et } |g_J(x_J)| < Cr\} .$$

Comme le volume euclidien de $M(0,r)$ est majoré par la somme des aires de ses projections, on est ramené à démontrer le résultat suivant : si $u \not\equiv 0$ est une série entière convergente au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$, alors pour R assez petit l'ouvert

$$\{x \in \mathbb{R}^p \,;\, |x_j| < R \text{ et } |u(x)| < r\}$$

est de volume majoré par Cr^ε . Pour cela, il suffit de vérifier que $|u|^{-\varepsilon}$ est sommable au voisinage de 0 lorsque ε est assez petit. Si u est un polynôme de Weierstrass en x_p à coefficients analytiques en $x' = (x_1, \ldots, x_{p-1})$, nous avons

$$u(x) = \prod_{k=1}^m \big(x_p - \alpha_k(x')\big) , \qquad |u(x)|^{-\varepsilon} \leqslant \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |x_p - \alpha_k(x')|^{-m\varepsilon}$$

grâce à l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique. Le théorème de Fubini montre alors que $|u|^{-\varepsilon}$ est sommable pour $\varepsilon < 1/m$. □

Il résulte maintenant des théorèmes 1 et 3 que le courant $[A]$ admet un cône tangent $C([A])$. Comme tout compact disjoint de l'ensemble $C(A)$ est également disjoint de $r^{-1}A$ pour r assez petit, il est clair que le support de $C([A])$ est contenu dans le cône tangent ensembliste $C(A)$. D'après les théorèmes classiques de support (*cf.* H. Federer [Fe] et R. Harvey [Ha]), le courant $C([A])$ est un cycle analytique de dimension p :

$$C([A]) = \sum \lambda_j [Z_j] \ , \qquad \lambda_j \geqslant 0 \ ,$$

où les Z_j désignent les composantes irréductibles de $C(A)$. De plus, les multiplicités λ_j sont des entiers > 0 .

Pour le voir, plaçons-nous au voisinage d'un point z^0 de Z_j qui est régulier sur $C(A)$ et non contenu dans le cône tangent de $A_{\rm sing}$ (lequel est de dimension au plus $p-1$). Dans des coordonnées convenables $z = (z', z'')$ de $\mathbb{C}^n$, il existe un voisinage $V = V' \times V''$ de centre z^0 autour de Z_j tel que $C(A_{\rm sing}) \cap \overline{V} = \emptyset$ et tel que $C(A) \cap \overline{V} = Z_j \cap \overline{V}$ soit le graphe $z'' = u(z')$ d'une fonction holomorphe $u : \overline{V}' \longrightarrow V''$. Pour $r < r_0$ assez petit, l'intersection $r^{-1}A_{\rm sing}$ ne rencontre pas V , donc $r^{-1}A \cap V$ est lisse; comme $Z_j \cap (\overline{V}' \times \partial V'') = \emptyset$, on a de plus $r^{-1}A \cap (\overline{V}' \times \partial V'') = \emptyset$. Alors la projection $r^{-1}A \cap V \longrightarrow V''$ est propre et par conséquent c'est un revêtement ramifié fini de V'' . Soit $S \subset A$ le sous-ensemble analytique des points où la projection $z \mapsto z''$ n'est pas étale. Quitte à déplacer légèrement z^0 , on peut supposer que z^0 n'est pas sur le cône tangent $C(S)$ et choisir V assez petit pour que $r^{-1}S \cap V = \emptyset$ si $r < r_0$. Alors $r^{-1}A \cap V \longrightarrow V''$ est un revêtement étale fini de V'' , nécessairement trivial si V'' est un polydisque. Dans ce cas, $r^{-1}A \cap V$ se compose d'une réunion de graphes de fonctions holomorphes $u_{k,r} : V' \to V''$, $1 \leqslant k \leqslant m_j$. Ces fonctions convergent uniformément vers u quand r tend vers 0 , et leur nombre m_j reste constant par un argument évident de connexité. Il en résulte que la famille de courants $r^{-1}[A]_{\restriction V} = \sum_k [z''{=}u_{k,r}(z')]$ converge vers $m_j[z''{=}u(z')] = m_j[Z_j]_{\restriction V}$ et que $\lambda_j = m_j$. Nous avons donc redémontré le théorème classique suivant :

THÉORÈME 5.6 (Thie [Th], King [Kg]). — *Si A est un ensemble analytique de dimension p passant par 0 , le courant $[A]$ admet un cône tangent*

$$C([A]) = \sum m_j [Z_j]$$

où les Z_j sont les composantes irréductibles du cône tangent ensembliste $C(A)$ et où les multiplicités m_j sont des entiers positifs. L'entier m_j est égal au nombre de feuilles de $r^{-1}A$ dans un voisinage d'un point générique de Z_j , pour r assez petit.

Bibliographie

[Ba] D. Barlet. — *Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration sur les fibres*, Invent. Math., **68** (1982), 129–174.

[Bl1] M. Blel. — *Cône tangent à un courant positif fermé de type* $(1,1)$,C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (à paraître, preprint avril 1989).

[Bl2] M. Blel. — *Cône tangent à un courant positif fermé*,preprint de la Faculté des Sciences de Monastir, 1988.

[Fe] H. Federer. — *Geometric measure theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 153, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[Ha] R. Harvey. — *Holomorphic chains and their boundaries*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics of the Amer. Math. Soc., held in 1975 at Williamstown, **30**-1 (1977), 309–382.

[Kg] J.R. King. — *The currents defined by analytic varieties*, Acta. Math., **127** (1971), 185–220.

[Km] C.O. Kiselman. — *Tangents of plurisubharmonic functions*,preprint Uppsala University (Sweden), december 1988.

[Le] P. Lelong. — *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Dunod, Paris, Gordon & Breach, New-York, 1968.

[L-G] P. Lelong et L. Gruman. — *Entire functions of several complex variables*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 282, Springer-Verlag, 1982.

[Mz] M. Mouzali. — *Conditions suffisantes pour l'existence du cône tangent à un courant positif fermé*,Thèse de 3e Cycle Université de Grenoble I, mai 1989.

[Na] R. Narasimhan. — *Introduction to the theory of analytic spaces*, Lecture Notes in Math. n° 25, Springer-Verlag, 1966.

[Th] P. Thie. — *The Lelong number of a point of a complex analytic set*, Math. Annalen, **172** (1967), 269–312.