Mémoire de la Société Mathématique de France, n°19
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 113, 1985, fascicule 2

Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines

par Jean-Pierre Demailly

Université de Grenoble I, Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S. n°188
BP 74, F-38402 Saint-Martin d'Hères, France

Résumé. À toute fonction d'exhaustion plurisousharmonique continue φ sur un espace de Stein, nous associons une collection de mesures positives portées par les surfaces de niveau de φ, et définies à l'aide des opérateurs de Monge-Ampère au sens de Bedford et Taylor. Nous montrons que ces mesures jouent un rôle fondamental dans l'étude des propriétés de croissance et de convexité des fonctions plurisousharmoniques ou holomorphes. Lorsque le volume de Monge-Ampère de la variété est fini, un théorème d'algébricité de type Siegel s'applique aux fonctions holomorphes à croissance φ-polynomiale. Nous en déduisons que la finitude du volume de Monge-Ampère, associée à une minoration convenable de la courbure de Ricci, est une condition géométrique nécessaire et suffisante caractérisant les variétés algébriques affines.

Abstract. To every continuous plurisubharmonic exhaustion function φ on a Stein space, we associate a collection of positive measures with support in the level sets of φ, defined by means of the Monge-Ampère operators in the sense of Bedford and Taylor. We show that these measures play a prominent part in the study of growth and convexity properties of plurisubharmonic or holomorphic functions. When the variety has finite Monge-Ampère volume, an algebraicity theorem of Siegel type holds for holomorphic functions with φ-polynomial growth. From this result, we deduce that the finiteness of Monge-Ampère volume, together with a suitable lower bound of the Ricci curvature, is a necessary and sufficient geometric condition characterizing affine algebraic varieties.

0037-9484/85 02 1 $ 14.50

Table des matières

0. Introduction.

La présente étude se place dans le cadre général des espaces analytiques complexes. La première section est donc consacrée à une définition des formes différentielles, courants positifs et fonctions plurisousharmoniques sur un espace complexe X éventuellement singulier. Étant donné un plongement local de X dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, nous définissons les formes différentielles sur X comme les restrictions à X des formes « ambiantes » sur Ω ; les espaces de courants s'en déduisent par dualité comme dans le cas lisse.

Définition 0.1. – *Soit une fonction* $V : X \to [-\infty, +\infty[$.

(a) *V sera dite plurisousharmonique (psh en abrégé) sur X si V est localement restriction à X de fonctions psh sur l'espace ambiant $\mathbb{C}^N$.*

(b) *V sera dite faiblement psh si V est localement intégrable et majorée sur X, et si $dd^cV \geqslant 0$.*

Notation : on pose ici

$$d^c = i(\overline{\partial} - \partial), \quad \textit{de sorte que} \quad dd^c = 2i\,\partial\overline{\partial}.$$

Toute fonction psh est alors faiblement psh, mais en général une fonction faiblement psh ne s'identifie pas nécessairement presque partout à une fonction psh. Nous montrons toutefois que les deux notions coïncident lorsque l'espace X est localement irréductible. La démonstration de ce résultat fait usage de deux ingrédients : d'une part la caractérisation des fonctions psh due à Fornaess et Narasimhan [FN], d'autre part un théorème de prolongement des fonctions psh bornées à travers le lieu singulier de X (qui utilise la résolution des singularités). Nous étudions également la transformation des courants positifs fermés et des fonctions psh par image directe propre.

Dans le §2, nous reprenons essentiellement la méthode développée par Bedford et Taylor [BT2] pour donner un sens au courant positif $dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k$ lorsque les φ_j sont des fonctions psh localement bornées, et nous la généralisons au cas où l'une des fonctions (soit φ_i par exemple) n'est pas localement bornée. Les inégalités classiques de Chern-Levine-Nirenberg peuvent alors s'énoncer comme suit :

Théorème 0.2. – *Pour tout ouvert $\omega \Subset X$ et tout compact $K \subset \omega$ il existe des constantes C_1, C_2 ne dépendant que de ω et K telles qu'on ait les majorations de masse suivantes :*

(a) $\displaystyle\int_K \|dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k\| \leqslant C_1\|\varphi_1\|_{L^1(\omega)}\|\varphi_2\|_{L^\infty(\omega)} \cdots \|\varphi_k\|_{L^\infty(\omega)}$,

(b) $\displaystyle\int_K \|\varphi_1\, dd^c\varphi_2 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k\| \leqslant C_2\|\varphi_1\|_{L^1(\omega)}\|\varphi_2\|_{L^\infty(\omega)} \cdots \|\varphi_k\|_{L^\infty(\omega)}$.

Nous montrons finalement dans cette situation la continuité séquentielle des opérateurs de Monge-Ampère

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \longmapsto dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k \quad \text{et} \quad \varphi_1\, dd^c\varphi_2 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k$$

pour des suites décroissantes $\varphi_1^\nu, \ldots, \varphi_k^\nu$ de fonctions psh .

On suppose maintenant que X est un espace de Stein et que X est muni d'une fonction psh continue exhaustive $\varphi : X \to [-\infty, R[$. Nous noterons alors

$$B(r) = \big\{z \in X\,;\ \varphi(z) < r\big\}, \qquad S(r) = \big\{z \in X\,;\ \varphi(z) = r\big\}, \qquad r \in [-\infty, R[$$

les « pseudoboules » et « pseudosphères » associées à φ. A ces données, nous montrons qu'on peut associer de manière naturelle une collection de mesures positives μ_r, portées par les sphères $S(r)$, que nous appelons mesures de Monge-Ampère associées à φ . Celles-ci sont définies simplement par

$$\mu_r(h) = \int_{S(r)} h\,(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi, \qquad n = \dim X,$$

lorsque φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et lorsque r est valeur régulière de φ. Dans le cas où φ est seulement continue, on est amené à utiliser la définition de Bedford-Taylor pour $(dd^c)^n$ et à poser

$$\mu_r = \big(dd^c \max(\varphi, r)\big)^n - \mathbb{1}_{X \smallsetminus B(r)}(dd^c\varphi)^n.$$

On a alors une formule générale de type Jensen-Lelong, dont la démonstration est conséquence immédiate des théorèmes de Stokes et de Fubini (cf. §3).

Théorème 0.3. – *Toute fonction psh V sur X est μ_r-intégrable quel que soit $r < R$, et on a la formule*

$$\int_{-\infty}^{r} dt \int_{B(t)} dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} = \mu_r(V) - \int_{B(r)} V(dd^c\varphi)^n.$$

On montre de plus que les mesures μ_r dépendent continûment de φ relativement aux suites décroissantes. Ceci permet de voir comme dans le cas $\mathcal{C}^\infty$ que la famille (μ_r) est la famille de mesures faiblement continue à gauche qui désintègre le courant positif $(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d\varphi \wedge d^c\varphi$ sur les sphères $S(r)$.

Les mesures μ_r ainsi construites jouissent d'un certain nombre de propriétés naturelles importantes pour l'étude de la croissance et de la convexité des fonctions psh .

Le paragraphe 4 étudie la mesure « résiduelle » $\mu_{-\infty} = \mathbb{1}_{S(-\infty)}(dd^c\varphi)^n$, portée par l'ensemble polaire $S(-\infty)$. D'après (0.3), la mesure $\mu_{-\infty}$ peut aussi se définir comme la limite faible de μ_r, quand r tend vers $-\infty$. En nous inspirant de nos travaux antérieurs [De4, De5] , nous montrons que la mesure $\mu_{-\infty}$ ne dépend essentiellement que du comportement asymptotique de φ au voisinage de $S(-\infty)$. De ce résultat découle l'inégalité classique

$$(dd^\varphi)^n \geqslant 2^n \sum_{x \in X} \nu(\varphi, x)^n\,\delta_x, \tag{0.4}$$

où $\nu(\varphi, x)$ désigne le nombre de Lelong de φ en tout point $x \in X$, et δ_x la mesure de Dirac en x (en un point singulier x, cette mesure doit être comptée avec multiplicité égale à la multiplicité de X en x).

Au §5 , nous montrons que les mesures μ_r vérifient le principe du maximum vis à vis des fonctions psh, à savoir que pour toute fonction psh V on a l'égalité :

$$\sup_{B(r)} V = \text{sup essentiel de } V \text{ relativement à } \mu_r. \tag{0.5}$$

Le fait remarquable est que l'égalité a lieu bien que le support de μ_r puisse être très lacunaire dans $S(r)$, comme par exemple dans le cas où les pseudoboules $B(r)$ sont des polyèdres analytiques.

Le paragraphe 6 généralise à la présente situation les propriétés de convexité classiques dues à P. Lelong, relatives aux moyennes de fonctions psh sur les boules, sphères, polydisques .... Nous montrons que l'hypothèse géométrique naturelle qui sous-tend la validité des propriétés de convexité est le fait que la fonction φ soit solution de l'équation de Monge-Ampère homogène $(dd^c\varphi)^n \equiv 0$. De façon précise :

Théorème 0.6. – *On suppose que $(dd^c\varphi)^n \equiv 0$ sur l'ouvert $\{\varphi > A\}$. Soit V une fonction psh sur X. Alors le sup de V sur $B(r)$, les moyennes $\mu_r(V)$, et plus généralement les moyennes en norme L^p, $r \mapsto [\mu_r(V_+^p)]^{1/p}$, sont fonctions convexes croissantes de $r \in \,]A, R]$.*

La vérification de ce résultat s'obtient par des calculs élémentaires de dérivées secondes, faisant intervenir la formule de Jensen 0.3 et les théorèmes de Stokes et de Fubini. Plus généralement, nous démontrons une version avec « paramètre » du théorème 0.6, relative aux mesures $\mu_{y,r}$ sur les fibres $\pi^{-1}(y)$ d'une fibration holomorphe $\pi : X \to Y$. La fonction psh φ donnée sur X est supposée exhaustive sur les fibres et telle que $(dd^c\varphi)^n \equiv 0$ sur l'ouvert $\{\varphi > A\}$, où n est la dimension des fibres. Alors les moyennes $\mu_{y,r}(V)$ et les moyennes en norme L^p sont fonctions faiblement psh du couple (y, z) sur $Y \times \mathbb{C}$, si l'on pose $r = \operatorname{Re} z$. On en tire aisément l'extension suivante du théorème 0.6 aux espaces produits.

Théorème 0.7. – *Soient $X_1, \ldots, X_k$ des espaces de Stein, munis de fonctions psh continues exhaustives $\varphi_j : X_j \to [-\infty, R_j[$ telles que $(dd^c\varphi_j)^{n_j} \equiv 0$ sur l'ouvert $\{\varphi_j > A_j\}$, $n_j = \dim X_j$. Alors, si V est psh sur $X_1 \times \cdots \times X_k$, la moyenne en norme L^p*

$$M_V^p(r_1, \ldots, r_k) = \Big[\mu_{r_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{r_k}(V_+^p)\Big]^{1/p}$$

est convexe simultanément en les variables $(r_1, \ldots, r_k) \in \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \,]A_j, R_j[$.

Dans les paragraphes 7 et 8 , nous faisons l'hypothèse additionnelle que le volume de X est à croissance modérée à l'infini (le « rayon » R est ici supposé égal à $+\infty$). De façon précise, nous supposons que

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \|\mu_r\| = 0. \tag{0.8}$$

Sous cette hypothèse, la formule de Jensen 0.3 implique l'inégalité fondamentale suivante :

$$\int_X dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} \leqslant \liminf_{r \to +\infty} \frac{1}{r}\, \mu_r(V_+), \tag{0.9}$$

de laquelle découle un certain nombre de résultats concernant la croissance des fonctions psh ou la distribution des valeurs des fonctions holomorphes (comme le suggère l'article de N. Sibony et P.M. Wong [SW]). En particulier, toute fonction psh ou holomorphe bornée sur X est constante.

Étant donné une fonction holomorphe f sur X , nous définissons d'autre part le « degré » de f relativement à φ par

$$\delta_\varphi(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\, \mu_r(\log_+|f|), \tag{0.10}$$

et nous disons que f est φ-polynomiale si $\delta_\varphi(f)$ est fini. L'inégalité (0.9) entraîne alors que l'ordre d'annulation de f en un point régulier $a \in X$ vérifie l'estimation :

$$\mathrm{ord}_a(f) \leqslant C(a)\, \delta_\varphi(f).$$

Par un raisonnement élémentaire d'algèbre linéaire dû à Siegel, il en résulte le théorème d'algébricité suivant (on suppose X irréductible).

Théorème 0.11. – *Soit $K_\varphi(X)$ le corps des fonctions méromorphes de la forme f/g où f et g sont φ-polynomiales. Alors :*

(a) $0 \leqslant \deg\mathrm{tr}_{\mathbb{C}} K_\varphi(X) \leqslant \dim_{\mathbb{C}} X$;

(b) *Si* $\deg\mathrm{tr}_{\mathbb{C}} K_\varphi(X) = \dim_{\mathbb{C}} X$, *alors le corps $K_\varphi(X)$ est de type fini.*

Comme cas particulier de ce théorème, nous retrouvons le résultat de W. Stoll [St1] caractérisant les variétés algébriques dans $\mathbb{C}^N$ par la propriété que la croissance de l'aire est minimale.

La deuxième partie B de ce travail est consacrée à une caractérisation des variétés algébriques affines par un critère géométrique « intrinsèque », faisant intervenir la finitude du volume de Monge-Ampère et une minoration de la courbure de Ricci. De façon précise, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 0.12. – *Soit X une variété analytique complexe, lisse, connexe, de dimension n. Alors X est analytiquement isomorphe à une variété algébrique affine X_{alg} si et seulement si X vérifie la condition* (c) *ci-dessous et si X possède une fonction d'exhaustion φ strictement psh de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :*

(a) $\mathrm{Vol}(X) = \int_X (dd^c\varphi)^n < +\infty$;

(b) *La courbure de Ricci de la métrique $\beta = dd^c(e^\varphi)$ admet une minoration de la forme*

$$\mathrm{Ricci}(\beta) \geqslant -\frac{1}{2} dd^c\psi,$$

avec $\psi \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R})$, où $\psi \leqslant A\varphi + B$ et A, B sont des constantes $\geqslant 0$;

(c) *Les espaces de cohomologie de degré pair $H^{2q}(X,\mathbb{R})$ sont de dimension finie.*

L'anneau des fonctions régulières de la structure algébrique X_{alg} est alors donné par l'intersection $K_\varphi(X) \cap \mathcal{O}(X)$.

À la suite des travaux de W. Stoll sur les variétés strictement paraboliques (cf. [St2] et [Bu]), D. Burns a posé le problème de la caractérisation des variétés algébriques affines en termes de fonctions d'exhaustion ayant des propriétés particulières, vérifiant par exemple la condition d'homogénéité $(dd^c\varphi)^n \equiv 0$ en dehors d'un compact. Le théorème 0.12 apporte une réponse partielle à ce problème. Il s'inscrit d'autre part dans la lignée des conditions suffisantes obtenues par Mok, Siu et Yau [SY], [MSY], [Mok1,2,3], bien que nos hypothèses soient sensiblement différentes de celles des travaux précédemment cités. Notre argumentation est d'ailleurs analogue dans ses grandes lignes à la démarche suivie par [Mok1,2,3].

Le paragraphe 10 démontre la nécessité des conditions 0.12 (a,b,c) pour tout ensemble algébrique $X \subset \mathbb{C}^N$. La fonction φ est alors donnée par $\varphi(z) = \log(1 + |z|^2)$, de sorte que la métrique $dd^c\varphi$ coïncide avec la métrique de Fubini-Study de l'espace projectif $\mathbb{P}^N$. Grâce à un calcul explicite de la courbure de Ricci, nous vérifions que l'inégalité de courbure (b) a lieu avec $\psi = \log \sum_{K,L} |J_{K,L}|^2$, où les $J_{K,L}$ désignent les déterminants jacobiens associés à un système d'équations polynomiales de X. Nous montrons de plus par un contre-exemple que la condition de courbure (b) est bien indispensable.

La preuve de la suffisance des conditions (a,b,c) fait l'objet des §11,12,13 . Le schéma général de la démonstration est le suivant, Grâce aux estimations L^2 de Hörmander-Nakano-Skoda pour l'opérateur $\overline{\partial}$ et grâce à l'hypothèse (b), on construit un système $F = (f_1, \ldots, f_N)$ de fonctions holomorphes φ-polynomiales qui, en dehors d'un ensemble analytique $S \subset X$, définit un plongement de $X \smallsetminus S$ dans $\mathbb{C}^N$. Sous l'hypothèse (a) de finitude du volume, le théorème d'algébricité 0.11 implique que le degré de transcendance des fonctions $f_1, \ldots, f_N$ est égal à $n = \dim X$. Le morphisme F envoie par conséquent X dans une variété algébrique $M \subset \mathbb{C}^N$ de dimension n.

La principale difficulté qui subsiste est alors de prouver que le plongement est quasi-surjectif, c'est-à-dire que l'ouvert $\Omega = F(X \smallsetminus S)$ est un ouvert de Zariski de M. Nous obtenons ce résultat en montrant d'abord que la $(1,1)$-forme $F_*(dd^c\varphi)$ se prolonge en un courant positif fermé T de masse finie sur M, tel que $T = 0$ sur $M \smallsetminus \Omega$; compte tenu des estimations de masse qui résultent de la construction, ceci se fait essentiellement par la méthode d'intégration par parties développée par H. Skoda [Sk5] et H. El Mir [EM]. Afin de donner un aperçu de la suite du raisonnement, regardons le cas déjà significatif où $N = n$, i.e. le cas $M = \mathbb{C}^n$. Il existe alors une fonction psh V sur $\mathbb{C}^n$ à croissance minimale, i.e. $V(z) \leqslant C_1 \log_+ |z| + C_0$, telle que $dd^cV = T$. Par construction, la fonction $\tau = V - \varphi \circ F^{-1}$ est pluriharmonique sur Ω, de plus τ tend vers $-\infty$ en tout point de $\partial\Omega$. Il en résulte que l'ensemble fermé $M \smallsetminus \Omega$ est pluripolaire. Pour montrer que $M \smallsetminus \Omega$ est en fait un ensemble algébrique, notre méthode consiste à vérifier, en utilisant de nouveau le théorème d'algébricité 0.11, que la 1-forme holomorphe $h = \partial\tau$ se prolonge en une forme méromorphe rationnelle sur $M = \mathbb{C}^n$.

Dans le cas où M est une variété algébrique affine quelconque, le lien qui existe dans $\mathbb{C}^n$ entre les $(1,1)$-courants positifs fermés T de masse projective finie et les fonctions psh à croissance minimale ne s'applique plus. On peut toutefois montrer (voir l'appendice §15) que l'inéquation différentielle $dd^cV \geqslant T$ se résout toujours sur M avec une solution psh V telle que le courant $dd^cV - T$ soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à croissance polynomiale. La fin de la démonstration est alors presque identique. L'hypothèse (c), quant à elle, sert à démontrer que la « topologie de Zariski » sur X est quasi-compacte, et donc que X peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts de la forme $X \smallsetminus S$ (cf. §13). Nous ne savons pas en fait si l'hypothèse (c) est réellement indispensable.

Signalons enfin que le théorème 0.12 peut s'étendre aux espaces complexes à singularités isolées (cf. §9), mais l'extension au cas quelconque soulève des difficultés qui seront étudiées au §14.

A. Mesures de Monge-Ampère et croissance des fonctions plurisousharmoniques.

1. Courants et fonctions plurisousharmoniques sur les espaces complexes.

Le but de ce paragraphe est de donner une définition des courants et des fonctions psh sur un espace analytique complexe éventuellement singulier. Le lecteur qui souhaite ne considérer dans la suite que le cas lisse peut sauter directement au §2.

Soit X un espace complexe réduit de dimension pure n, X_{reg} (resp. X_{sing}) l'ensemble de ses points réguliers (resp. singuliers). Comme les définitions que nous allons considérer sont locales, on peut sans restriction supposer que X s'identifie à un sous-ensemble analytique fermé d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ au moyen d'un plongement $j : X \to \Omega$.

On définit alors l'espace $\mathcal{C}^k_{p,q}(X)$ des (p,q)-formes de classe $\mathcal{C}^k$ sur X, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, comme l'image du morphisme de restriction

$$j* : \mathcal{C}^k_{p,q}(\Omega) \to \mathcal{C}^k_{p,q}(X_{\mathrm{reg}}),$$

munie de la topologie quotient. Si $j_1 : X \to \Omega_1 \subset \mathbb{C}^{N_1}$ est un autre plongement, il existe (localement) des applications holomorphes $f : \Omega \to \mathbb{C}^{N_1}$ et $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}^N$ telles que $j_1 = f \circ j$ et $j = g \circ j_1$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_1"'] & f^{-1}(\Omega_1) \subset \Omega \arrow[d, "\mathrm{Id} \times f"] \\ \Omega_1 \supset g^{-1}(\Omega) \arrow[r, "g \times \mathrm{Id}"'] & \Omega \times \Omega_1, \end{tikzcd}$$

montre alors que les morphismes j et j_1 induisent bien le même espace-image $\mathcal{C}^k_{p,q}(X)$, car $\mathrm{Id} \times f$ et $g \times \mathrm{Id}$ sont des plongements lisses fermés.

Définition 1.1. – *On désigne par $\mathcal{D}_{p,q}(X)$ (resp. $\mathcal{D}^k_{p,q}(X)$) l'espace des (p,q)-formes sur X de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. $\mathcal{C}^k$) et à support compact, muni de la topologie limite inductive. L'espace dual $\mathcal{D}'_{p,q}(X)$ est par définition l'espace des courants de bidimension (p,q) et de* *bidegré* $(n-p, n-q)$ *sur* X. *Les courants appartenant au sous-espace* $[\mathcal{D}^k_{p,q}(X)]'$ *seront dits courants d'ordre* k.

Si $T \in [\mathcal{D}^k_{p,q}(X)]'$, le courant $j_*T \in [\mathcal{D}^k_{p,q}(\Omega)]'$ défini par

$$\langle j_*T, v\rangle = \langle T, j * v\rangle$$

pour toute forme $v \in \mathcal{D}^k_{p,q}(\Omega)$, est à support dans $j(\Omega)$. Néanmoins, pour $k \geqslant 1$, un courant $\theta \in [\mathcal{D}^k_{p,q}(\Omega)]'$ à support dans $j(\Omega)$ ne provient pas nécessairement d'un courant T défini sur X, même si X est lisse.

Les opérateurs différentiels d, ∂, $\overline{\partial}$ usuels et l'opérateur de multiplication extérieure par une forme $\mathcal{C}^\infty$ sont d'autre part étendus par dualité aux courants, exactement comme dans le cas lisse. Il serait particulièrement intéressant de savoir calculer en général les groupes de cohomologie locale des opérateurs d et $\overline{\partial}$; nous ne savons même pas en fait si ces groupes sont toujours nuls dans le cas de singularités quelconques.

Définition 1.2. – *Un courant* $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ *sera dit (faiblement) positif si le courant de bidegré* (n, n)

$$T \wedge i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge i\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p$$

est une mesure $\geqslant 0$ *pour tout système de* $(1,0)$*-formes* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* X.

Il revient au même de dire que le courant j_*T est $\geqslant 0$ sur Ω ; en particulier, un courant $T \geqslant 0$ sur X est nécessairement d'ordre 0.

Soit maintenant $F : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques X, Y de dimensions respectives n, m. Pour s'assurer que le morphisme image réciproque

$$F^* : \mathcal{C}^k_{p,q}(Y) \to \mathcal{C}^k_{p,q}(X)$$

est bien défini, il suffit de vérifier le lemme suivant :

Lemme 1.3. – *Soit* $j : Y \to \Omega \subset \mathbb{C}^N$ *un plongement et* $\alpha \in \mathcal{C}^k_{p,q}(\Omega)$ *une forme telle que* $\alpha_{|Y_{\mathrm{reg}}} = 0$. *Alors* $F^*\alpha_{|x_{\mathrm{reg}}} = 0$.

Démonstration. On peut supposer X lisse et connexe. Si $F(X) \not\subset Y_{\mathrm{sing}}$, alors $F^{-1}(Y_{\mathrm{reg}})$ est dense dans X et le résultat s'ensuit par continuité. La seule difficulté est donc le cas où $F(X) \subset Y_{\mathrm{sing}}$. En raisonnant par récurrence sur la dimension de Y et en décomposant F sous la forme

$$X \xrightarrow{F} Y_{\mathrm{sing}} \hookrightarrow Y$$

on voit qu'il suffit de considérer au lieu de F le cas du morphisme d'inclusion $Y_{\mathrm{sing}} \hookrightarrow Y$. Le lemme 1.3 résulte alors de la continuité de α et du lemme suivant :

Lemme 1.4. – *Soit* a *un point régulier sur* Y_{sing}. *Alors il existe une suite de points* $\{a_\nu\} \subset Y_{\mathrm{reg}}$, *convergeant vers* a, *telle que dans la grasmannienne des* m*-plans de* $\mathbb{C}^N$ *l'espace tangent* $T_{a_\nu}Y_{\mathrm{reg}}$ *converge vers un plan contenant* T_aY_{sing}.

Démonstration. C'est une conséquence de l'existence de stratifications de Whitney de Y, voir [Wh1] et [Wh2]. □

Supposons que le morphisme $F : X \to Y$ soit propre. On définit alors l'application image directe

$$F_* : [\mathcal{D}^k_{p,q}(X)]' \longrightarrow [\mathcal{D}^k_{p,q}(Y)]'$$

par dualité, en posant pour tout courant $T \in [\mathcal{D}^k_{p,q}(X)]'$ et toute forme $\alpha \in \mathcal{D}^k_{p,q}(Y)$

$$\langle F_*T, \alpha\rangle = \langle T, F^*\alpha\rangle.$$

Si T est $\geqslant 0$, il en est clairement de même pour F_*T. De plus, le morphisme image directe F_* commute avec les opérateurs d, d^c, ∂, $\overline{\partial}$. Si T est $\geqslant 0$ fermé, F_*T est donc aussi $\geqslant 0$ fermé.

Venons en maintenant à la définition des fonctions psh .

Définition 1.5. – *Soit $V : X \to [-\infty, +\infty[$ une fonction qui n'est identiquement $-\infty$ sur aucun ouvert de X. On dira que V est plurisousharmonique sur X (psh en abrégé) si, pour tout plongement local $j : X \hookrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}^N$, V est localement restriction d'une fonction psh sur Ω.*

J.E. Fornaess et R. Narasimhan ont donné la caractérisation fondamentale suivante des fonctions psh sur un espace complexe.

Théorème 1.6 ([FN], th. 5.3.1) **–** *Une fonction $V : X \to [-\infty, +\infty[$ est psh sur X si et seulement si :*

(a) *V est semi-continue supérieurement ;*

(b) *Pour toute application holomorphe $f : \Delta \to X$ du disque unité dans X, $V \circ f$ est sous-harmonique ou identiquement égale à $-\infty$ sur Δ.*

Grâce à ce résultat, on peut aisément généraliser le théorème de prolongement de Brelot au cas des espaces complexes.

Théorème 1.7. – *Soient X un espace complexe localement irréductible et $Y \subset X$ un sous-ensemble analytique d'intérieur vide dans X. Soit V une fonction psh sur $X \smallsetminus Y$, localement majorée au voisinage de Y. Alors il existe une fonction psh V^* sur X qui prolonge V, unique, donnée par*

$$V * (y) = \limsup_{x \in X \smallsetminus Y,\ x \to y} V(x), \qquad y \in Y.$$

Démonstration.

(a) *Unicité de V^*.* Comme V^* est semi-continue supérieurement, on a pour tout $y \in Y$

$$V^*(y) = \limsup_{x \in X \smallsetminus Y,\ x \to y} V^*(x) \geqslant \limsup_{x \in X \smallsetminus Y,\ x \to y} V(x).$$

Inversement, choisissons une application holomorphe $f : \Delta \to X$ telle que $f(0) = y$ et $f(\Delta) \not\subset Y$. Alors 0 est isolé dans $f^{-1}(Y)$, et comme $V^* \circ f$ est psh sur Δ, il vient

$$V^(y) = V^*(f(0)) = \limsup_{t \neq 0,\ t \to 0} V(f(t)) \leqslant \limsup_{x \in X \smallsetminus Y,\ x \to y} V(x).$$

(b) *Plurisousharmonicité de V^*.* Le résultat est local sur X. D'après le théorème de désingularisation de Hironaka [Hi], il existe un espace lisse X' et une modification propre $\sigma : X' \to X$; par définition, σ est propre et induit en dehors d'un ensemble analytique $Z \subset X$ un isomorphisme

$$\sigma : X' \smallsetminus \sigma^{-1}(Z) \xrightarrow{\sim} X \smallsetminus Z.$$

Pour tout $x \in X$, la fibre $\sigma^{-1}(x)$ est compacte et connexe. En effet, si $\sigma^{-1}(x)$ était non connexe, le point x aurait un voisinage ouvert U irréductible (X est supposé localement irréductible), tel que $\sigma^{-1}(U)$ soit non connexe ; mais alors $U \smallsetminus Z$ serait connexe et $\sigma^{-1}(U) \smallsetminus \sigma^{-1}(Z)$ non connexe, ce qui est absurde. La fonction $V \circ \sigma$ est psh sur $X' \smallsetminus \sigma^{-1}(Y)$ et localement majorée au voisinage de $\sigma^{-1}(Y)$. D'après le théorème de Brelot relatif au cas lisse, $V \circ \sigma$ se prolonge en une fonction psh V' sur X'. La fonction V' est nécessairement constante sur les fibres $\sigma^{-1}(x)$, donc V' induit par passage au quotient une fonction V^* semi-continue supérieurement sur X. Montrons maintenant que V^* est psh sur X en utilisant le théorème 1.7. Étant donné un germe d'application holomorphe $f : (\Delta, 0) \to (X, x)$, il existe dans X' un germe de courbe (Γ', x') au-dessus de l'image $\Gamma = f(\Delta)$, donc il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et un germe $f' : (\Delta, 0) \to (X', x')$ tels que $f(t^k) = \sigma(f'(t))$. Par suite $V^*(f(t^k)) = V'(f'(t))$ est psh sur $(\Delta, 0)$, ce qui entraîne que $V^* \circ f$ est aussi psh. □

Proposition 1.8. – *Toute fonction psh V sur X est localement intégrable pour la mesure aire de X (relative à un plongement quelconque $j : X \to \Omega \subset \mathbb{C}^N$).*

Démonstration. V étant localement majorée par définition, on peut supposer $V \leqslant 0$. Quitte à faire une rotation des coordonnées, il existe en tout point de X un plongement local $j : X \hookrightarrow P$ sur un polydisque de $\mathbb{C}^N$ tel qu'on ait des projections $\pi^I : X \to P^I$ propres à fibres finies sur les n-plans de coordonnées z_j, $j \in I$, $I \subset \{1, \ldots, N\}$, $|I| = n$. Ainsi, pour tout I, il existe un ensemble analytique $S_I \subset P^I$ tel que la restriction $\pi^I : X \smallsetminus (\pi^I)^{-1}(S_I) \to P^I \smallsetminus S_I$ soit un revêtement fini. La fonction $\pi^I_* V$ définie par

$$\pi^I_* V(y)(y) = \sum_{x \in (\pi^I)^{-1}(y)} V(x)$$

est psh $\leqslant 0$ sur $P^I \smallsetminus S_I$, donc se prolonge en une fonction psh V_I sur P^I tout entier. Comme la mesure aire de X est donnée par

$$d\sigma_X = \sum_{|I|=n} (\pi^I)^* d\lambda_{\mathbb{C}^n},$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue, la conclusion résulte alors du fait que les V_I sont localement intégrables sur P^I. □

La proposition 1.8 montre qu'on peut considérer toute fonction psh sur X comme un courant de bidegré $(0, 0)$. Par régularisation d'un prolongement local de V à $\mathbb{C}^N$ et passage à la limite décroissante, on vérifie aisément que le $(1, 1)$-courant $dd^c V = 2i\partial\overline{\partial} V$ est positif sur X.

Définition 1.9. – *Une fonction localement intégrable V sur X sera dite faiblement psh si V est localement majorée et si $dd^c V \geqslant 0$ au sens des courants.*

Contrairement au cas lisse, l'hypothèse que V soit localement majorée est fondamentale. Considérons par exemple la. courbe paramétrée $(z_1, z_2) = (t^2, t^3)$ dans $\mathbb{C}^2$; la fonction $V(t) = \mathrm{Re}(l/t)$ n'y est pas localement majorée en 0, cependant on peut vérifier que $dd^cV = 0$ au sens des courants (cf. définition 1.1). Observons d'autre part qu'une fonction faiblement psh ne s'identifie pas nécessairement presque partout à une fonction psh, comme le montre l'exemple de la fonction définie sur la courbe $z_1z_2 = 0$ de $\mathbb{C}^2$ par $V(z_1, 0) = 1$, $V(0, z_2) = 0$ si $z_2 \neq 0$. On a toutefois le résultat suivant :

Théorème 1.10. – *Étant donné une fonction $V : X \to [-\infty + \infty[$, il y a équivalence entre les propriétés* (a), (b), (c) *ci- dessous :*

(a) *V est faiblement psh sur X .*

(b) *V coïncide presque partout avec une fonction V_{reg} psh sur X_{reg}, localement majorée au voisinage de X_{sing}.*

(c) *Il existe une fonction psh $\tilde{V}$ sur la normalisation $\tilde{X}$ de X , telle que $\tilde{V} = V \circ \pi$ presque partout, où $\pi : \tilde{X} \to X$ est le morphisme naturel.*

Pour que V soit égale presque partout à une fonction psh sur X, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée : pour tout $a \in X$, on désigne par $V^*(a)$ la limite supérieure essentielle de $V(x)$ quand $x \in X$ tend vers a et par (X_j, a) les composantes irréductibles du germe (X, a) ; alors

$$\limsup_{x \in X_j\,;\, x \to a} \mathrm{ess}\ V(x) = V^*(a), \quad \forall j.$$

Sous cette hypothèse V^* est psh sur X et $V = V^*$ presque partout.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b). Cette implication résulte aussitôt de la définition 1.9 et du cas bien connu où X est lisse.

(b) $\Rightarrow$ (a). Soit $h_1 = \ldots = h_m = 0$ des équations locales de X_{sing} dans X. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction

$$V_\varepsilon = \begin{cases} V_{\mathrm{reg}} + \varepsilon \log\left(|h_1|^2 + \cdots + |h_m|^2\right) & \text{sur } X_{\mathrm{reg}} \\ -\infty & \text{sur } X_{\mathrm{sing}} \end{cases}$$

est psh sur X d'après le théorème 1.6. On a donc $dd^cV_\varepsilon \geqslant 0$. Comme dd^cV_ε converge faiblement vers dd^cV quand ε tend vers 0, il s'ensuit que $dd^cV \geqslant 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c). La fonction $V_{\mathrm{reg}} \circ \pi$ est psh sur $\tilde{X} \smallsetminus \pi^{-1}(X_{\mathrm{sing}}) = \pi^{-1}(X_{\mathrm{reg}})$, localement majorée au voisinage de $\pi^{-1}(X_{\mathrm{sing}})$, et $\tilde{X}$ est localement irréductible. Le théorème 1.7 montre que $V_{\mathrm{reg}} \circ \pi$ se prolonge en une fonction psh V sur X .

(c) $\Rightarrow$ (b) résulte du fait que $\pi : \tilde{X} \smallsetminus \pi^{-1}(X_{\mathrm{sing}}) \to X_{\mathrm{reg}}$ est un isomorphisme.

En ce qui concerne la dernière affirmation, la condition que nous avons donnée pour la plurisousharmonicité de V^* est évidemment nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, on observe que l'ensemble des composantes irréductibles (X_j, a) est en correspondance bijective avec l'ensemble des points a_j de $\tilde{X}$ situés au-dessus de a (ceci résulte par exemple de Narasimhan [Nar], prop. VI.2) et que

$$\tilde{V}(a_j) = \limsup_{x \in X_j\ ,\ x \to a} \text{ess}\ V(x).$$

On a donc par hypothèse $V^* \circ \pi = \tilde{V}$ en tout point de X ; comme toute application holomorphe $f : \Delta \to X$ se relève en une application $\tilde{f} : \Delta \to \tilde{X}$, la plurisousharmonicité de $\tilde{V}$ entraîne celle de V^*. □

Corollaire 1.11. – *Si X est localement irréductible et si V est faiblement psh sur X, alors la fonction définie par*

$$V^*(a) = \limsup_{x \to a} \text{ess}\ V(x), \qquad a \in X,$$

est psh sur X et $V = V^*$ presque partout.

Corollaire 1.12. – *Si $V : X \to [-\infty, +\infty[$ est continue et faiblement psh, alors V est psh.*

Pour terminer cette section, nous examinons la transformation des fonctions psh par image directe.

Proposition 1.13. – *Soit $F : X \to Y$ un morphisme propre surjectif à fibres finies.*

(a) *Si V est une fonction faiblement psh sur X, la fonction F_*V définie par*

$$F_*V(y) = \sum_{x \in F^{-1}(y)} V(x)$$

est faiblement psh sur Y et de plus

$$dd^c(F_*V) = F_*(dd^cV).$$

(b) *On suppose de plus que Y est localement irréductible. Si V est psh et si la somme $\sum_{x \in F^{-1}(y)} V(x)$ est comptée avec multiplicités, alors F_*V est psh sur Y.*

Démonstration.

(a) On sait que F est un revêtement ramifié, i.e. il existe un ensemble analytique $Z \subset$ Y tel que

$$F : X \smallsetminus F^{-1}(Z) \to Y \smallsetminus Z$$

soit un revêtement de variétés lisses. On voit alors que la définition de F_*V coïncide avec celle donnée pour les images directes de courants. Il est clair que F_*V est localement majorée sur Y, et la propriété $dd^c(F_*V) = F_*dd^cV \geqslant 0$ résulte du fait que F_* commute avec les opérateurs d et d^c.

(b) Sous l'hypothèse X localement irréductible, le cardinal de la fibre $F^{-1}(y)$, $y \in Y \smallsetminus Z$, est localement constant au voisinage d'un point de Z. Si de plus V est continue,

F_*V se prolonge par continuité sur Y à travers Z, et le corollaire 1.12 montre que F_*V est psh. Dans le cas général, il existe pour toute fibre $F^{-1}(y) = \{x_1, \ldots x_m\}$ des voisinages arbitrairement petits O_j de x_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, et un voisinage U de y tels que $F^{-1}(U) = O_1 \cup \ldots \cup O_m$. Écrivons V comme limite décroissante de fonctions psh continues V_k sur un tel voisinage $F^{-1}(V)$. Il vient

$$F_*V = \lim_{k \to +\infty} F_*V_k \quad \text{sur } U,$$

par suite F_*V est psh. □

2. Opérateurs $(dd^c)^k$ et inégalités de Chern-Levine-Nirenberg.

Dans cette section, nous rappelons la définition des opérateurs de Monge-Ampère $(dd^c)^k$ introduits par Bedford et Taylor [BT1], [BT2]. Cette définition permet de donner un sens au courant $dd^cV_1 \wedge \ldots \wedge dd^cV_k$, lorsque les V_j sont des fonctions psh bornées. Nous aurons besoin ici de considérer le cas un peu plus général où l'une des fonctions V_j peut ne pas être bornée, et nous redonnerons dans ce cadre une démonstration des inégalités de Chern-Levine-Nirenberg [CLN]. Enfin, nous étudions comme dans [BT2] la continuité de l'opérateur $(dd^c)^k$ relativement aux limites décroissantes de fonctions psh.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ des fonctions psh localement bornées sur X et V une fonction psh quelconque. D'après Bedford-Taylor [BT2] on peut définir le courant $\geqslant 0$ fermé $dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k$ par récurrence sur k en posant

$$dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k = dd^c\big(\varphi_k\, dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_{k-1}\big). \tag{2.1}$$

La positivité du second membre est évidente par hypothèse de récurrence si $\varphi_k \in \mathcal{C}^\infty(X)$; le cas général s'en déduit par régularisation de φ_k et passage à la limite faible dans l'espace des courants.

Soit $\Omega = \{\rho < 0\}$ un ouvert relativement compact dans X, défini par une fonction ρ strictement psh $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage Ω' de Ω et telle que $d\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$. Pour tout réel $a > 0$ et tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$ on pose

$$\beta_k = |\rho|^{k+a}(dd^c\rho)^{n-k} + (k+a)|\rho|^{k-1+a} d\rho \wedge d^c\rho \wedge (dd^c\rho)^{n-k-1}$$

et on désigne par $\|v\|_p$ la norme L^p d'une fonction v sur Ω relativement à la mesure β_0, $p \in [1, +\infty]$. La masse du courant (2.1) admet alors les estimations suivantes (cf. [CLN]).

Théorème 2.2. *Soient $V, V_1, \ldots, V_k$ des fonctions psh sur X telles que $V \leqslant 0$ et $V_1 \geqslant 0, \ldots, V_k \geqslant 0$ sur Ω. Alors il existe des constantes $C_j = C_j(k, a) \geqslant 0$, $j = 1, 2, 3$, telles que*

(a) $\displaystyle\int_\Omega \beta_{k+1} \wedge dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k \leqslant C_1 \|V\|_1 \|\varphi_1\|_\infty \cdots \|\varphi_k\|_\infty.$

(b) $\displaystyle\int_\Omega \beta_k \wedge |V|\, dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k \leqslant C_2 \|V\|_1 \|\varphi_1\|_\infty \cdots \|\varphi_k\|_\infty.$

(c) $\displaystyle\int_\Omega \beta_k \wedge dd^cV_1 \wedge \ldots \wedge dd^cV_k \leqslant C_3 \|V_1\|_k \|V_2\|_k \cdots \|V_k\|_k.$

Démonstration. Grâce au lemme d'approximation 2.4 ci-dessous, on peut supposer que les V_j et φ_j sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} d^c\beta_k &= -2(k+a)\,|\rho|^{k-1+a}\, d^c\rho \wedge (dd^c\rho)^{n-k}, \\ dd^c\beta_k &= 2(k+a)\Big[-|\rho|^{k-1+a}\,(dd^c\rho)^{n-k+1} + (k-1+a)\, d\rho\wedge d^c\rho\wedge (dd^c\rho)^{n-k}\Big], \end{aligned}$$

d'où l'inégalité entre formes

$$|dd^c\beta_k| \leqslant 2(k+a)\beta_{k-1}.$$

Notons I_k, J_k les intégrales (a), (b) respectivement et $\psi_k = dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_k$. D'après la formule d'intégration par parties du lemme 2.5 et compte tenu que

$$\beta_{k+1|\partial\Omega} = d^c\beta_{k+1|\partial\Omega} = 0,$$

il vient

$$\begin{aligned} I_k &= \int_\Omega dd^c\beta_{k+1}\wedge\varphi_k\, dd^cV\wedge\psi_{k-1} \\ &\leqslant 2(k+1+a)\,\|\varphi_k\|_\infty \int_\Omega \beta_k\wedge dd^cV\wedge\psi_{k-1} = 2(k+1+a)\,\|\varphi_k\|_\infty I_{k-1}, \\ I_0 &= \int_\Omega V\, dd^c\beta_1 \\ &\leqslant 2(1+a)\int_\Omega |V|\,|\rho|^a (dd^c\rho)^n \leqslant 2(1+a)\,\|V\|_1. \end{aligned}$$

Ceci démontre (a) par récurrence avec $C_1(k.a) = 2^{k+1}(1+a)\ldots(k+1+a)$, l'inégalité étant d'ailleurs vérifiée même si $a=0$. D'autre part si $k\geqslant 1$ on obtient

$$\begin{aligned} J_k &= \int_\Omega -\varphi_k dd^c(V\beta_k)\wedge\psi_{k-1} \\ &= \int_\Omega -\varphi_k\big(V\, dd^c\beta_k + \beta_k\wedge dd^cV + 2\, dV\wedge d^c\beta_k\big)\wedge\psi_{k-1} \\ &= \int_\Omega \varphi_k\big(V\, dd^c\beta_k - \beta_k\wedge dd^cV\big)\wedge\psi_{k-1} + 2V\, d\varphi_k\wedge d^c\beta_k\wedge\psi_{k-1} \end{aligned}$$

en intégrant par parties le terme $-2\varphi_k\, dV\wedge d^c\beta_k\wedge\psi_{k-1}$ à la deuxième ligne. On suppose maintenant $\varphi_k > 0$ et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la composante de bidegré $(n-k+1, n-k+1)$ du courant

$$2d\varphi_k\wedge d^c\beta_k = -4(k+a)\,|\rho|^{k-1+a} d\varphi_k\wedge d^c\rho\wedge (dd^c\rho)^{n-k},$$

ce qui donne le majorant

$$\Big[4(k+a)^2\varphi_k|\rho|^{k-2+a} d\rho\wedge d^c\rho + |\rho|^{k+a}\frac{d\varphi_k\wedge d^c\varphi_k}{\varphi_k}\Big]\wedge (dd^c\rho)^{n-k}.$$

Il en résulte

$$J_k \leqslant \int_\Omega \varphi_k |V| \Big[-dd^c\beta_k + 4(k+a)^2|\rho|^{k-2+a} d\rho\wedge d^c\rho\wedge (dd^c\rho)^{n-k}\Big]\wedge\psi_{k-1}$$
$$+\int_\Omega |V|\,|\rho|^{k+a}(dd^c\rho)^{n-k}\wedge \frac{d\varphi_k\wedge d^c\varphi_k}{\varphi_k}\wedge\psi_{k-1}.$$

La forme entre crochets dans la première intégrale est égale à

$$2(k+a)\Big[|\rho|^{k-1+a}(dd^c\rho)^{n-k+1}+(k+1+a)|\rho|^{k-2+a}d\rho\wedge d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{n-k}\Big]\leqslant C_4\beta_{k-1}$$

avec $C_4 = C_4(k,a) = \frac{2(k+a)(k+1+a)}{k-1+a}$. On obtient donc finalement

$$J_k \leqslant C_4\|\varphi_k\|_\infty J_{k-1} + \int_\Omega |V|\,\beta_k\wedge\psi_{k-1}\wedge\frac{d\varphi_k\wedge d^c\varphi_k}{\varphi_k}.$$

Notons J_k' l'intégrale obtenue en remplaçant φ_k par $\varphi_k' = \exp(B\varphi_k)$ dans J_k et posons $M = \|\varphi_k\|_\infty$. Il vient

$$dd^c\varphi' = e^{B\varphi_k}\big(B\,dd^c\varphi_k + B^2\,d\varphi_k\wedge d^c\varphi_k\big)\geqslant B\,e^{-BM}dd^c\varphi_k + \frac{d\varphi_k'\wedge d^c\varphi_k'}{\varphi_k'},$$
$$B\,e^{-BM}J_k\leqslant J_k' - \int_\Omega |V|\,\beta_k\wedge\psi_{k-1}\wedge\frac{d\varphi_k'\wedge d^c\varphi_k'}{\varphi_k'}\leqslant C_4(k,a)\,e^{BM}J_{k-1}.$$

Comme $\inf_{B>0}\frac{1}{B}e^{2BM} = 2eM = 2e\,\|\varphi_k\|_\infty$, ceci achève la démonstration de (b) par récurrence sur k, avec la constante

$$C_2(k,a) = (4e)^k\,\frac{k+a}{a}\,(2+a)\cdots(k+1+a).$$

Pour démontrer (c), supposons d'abord que $V_1 = V_2 = \ldots = V_k = v \geqslant 0$. Comme

$$\Big(dd^c v^{\frac{k}{k-1}}\Big)^{k-1}\geqslant v\Big(\frac{k}{k-1}\,dd^c v\Big)^{k-1},$$

une intégration par parties nous donne

$$\int_\Omega\beta_k\wedge(dd^cv)^k = \int_\Omega dd^c\beta_k\wedge v\,(dd^cv)^{k-1}\leqslant 2(k+a)\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{k-1}\int_\Omega\beta_{k-1}\wedge\Big(dd^cv^{\frac{k}{k-1}}\Big)^{k-1}.$$

Par récurrence sur k cette inégalité entraîne à son tour

$$\int_\Omega\beta_k\wedge(dd^cv)^k\leqslant 2^k(1+a)...(k+a)\frac{(k-1)!}{k^{k-1}}\int_\Omega\beta_0v^k.$$

Remplaçons maintenant v par

$$v = \frac{V_1}{\|V_1\|_k}+\cdots+\frac{V_k}{\|V_k\|_k}.$$

Il vient

$$\frac{k!}{\|V_1\|_k \cdots \|V_k\|_k} \int_\Omega \beta_k \wedge dd^cV_1 \wedge \ldots \wedge dd^cV_k \leqslant 2^k(1+a)...(k+a)\frac{(k-1)!}{k^{k-1}} \int_\Omega \beta_0 v^k$$

tandis que $\|v\|_k \leqslant k$. L'inégalité (c) s'ensuit avec

$$C_3(k,a) = 2^k(1+a)\ldots(k+a). \qquad \square$$

Une conséquence immédiate du théorème 2.2 (b) est que le courant $V\, dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k$ est de masse localement finie sur X ; en particulier on retrouve le résultat suivant dû à Bedford-Taylor [BT2].

Corollaire 2.3. – *Les mesures coefficients de $dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k$ ne chargent pas les ensembles pluripolaires $\{V = -\infty\}$.* □

L'espace X étant de Stein, il existe d'après J.E. Fornaess et R. Narasimhan [FN] des suites décroissantes V_m, $\varphi_{j,m}$ de fonctions psh $\mathcal{C}^\infty$ sur X telles que

$$V_m \to V, \qquad \varphi_{j,m} \to \varphi_j \qquad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Lemme 2.4. – *Il existe des suites strictement croissantes d'entiers $m(\nu)$, $m_1(\nu)$, … , $m_k(\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$, telles qu'au sens de la convergence faible des mesures on ait au choix l'une ou l'autre des propriétés de convergence ci-dessous* :

(a) $dd^cV_{m(\nu)} \wedge dd^c\varphi_{1,m_1(\nu)} \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_{k,m_k(\nu)} \longrightarrow dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k$

(b) $V_{m(\nu)} \wedge dd^c\varphi_{1,m_1(\nu)} \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_{k,m_k(\nu)} \longrightarrow V \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k$.

Démonstration. D'après le théorème 2.2 déjà démontré dans le cas des fonctions psh $\mathcal{C}^\infty$ les suites (a), (b) sont localement bornées en masse, et les parties bornées de l'espace des courants d'ordre 0 sont métrisables pour la topologie faible. Dans le cas (a) on observe que

$$\varphi_{k,m} dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_{k-1} \longrightarrow \varphi_k dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_{k-1}$$

par convergence monotone de $\varphi_{k,m}$ quand $m \to +\infty$; en passant au dd^c on a donc

$$dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_{k-1} \wedge dd^c\varphi_{k,m} \longrightarrow dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_{k-1} \wedge dd^c\varphi_k.$$

La topologie étant métrisable, on peut choisir successivement $m_k(\nu) = \nu$ puis $m_{k-1}(\nu)$, … , $m_1(\nu)$, $m(\nu)$ par récurrence sur ν (resp. $m(\nu) = \nu$ puis $m_1(\nu)$, … , $m_1(\nu)$ dans le cas (b)) pour obtenir la convergence souhaitée. □

Énonçons ici en vue de références ultérieures le lemme d'intégration par parties que nous avons utilisé.

Lemme 2.5. – *Si u et v sont des formes de classe $\mathcal{C}^2$ de bidegrés respectifs (p,q) et $(n-p-1, n-q-1)$ avec $p+q$ pair, alors*

$$\int_\Omega u \wedge dd^cv = \int_{\partial\Omega} u \wedge d^cv - d^cu \wedge v.$$

Il suffit en effet d'appliquer le théorème de Stokes à la forme

$$d\big(u \wedge d^c v - d^c u \wedge v\big) = u \wedge dd^c v - dd^c u \wedge v + du \wedge d^c v + d^c u \wedge dv$$

et d'observer que

$$du \wedge d^c v = i(\partial u \wedge \overline{\partial} v - \overline{\partial} u \wedge \partial v) = -d^c u \wedge dv. \qquad \square$$

En adaptant les techniques de [BT2] à la situation présente, nous montrons maintenant la continuité de l'opérateur $(dd^c)^k$ par rapport aux limites décroissantes de fonctions psh.

Théorème 2.6. – *Soient $\{\varphi_j^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathrm{loc}}(X)$ et $\{V^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ des suites décroissantes de fonctions psh telles que*

$$\varphi_j = \lim_{\nu\to+\infty} \varphi_j^\nu \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(X), \qquad V = \lim_{\nu\to+\infty} V^\nu \not\equiv -\infty.$$

Au sens de la convergence faible des mesures, on a alors

(a) $dd^c V^\nu \wedge dd^c \varphi_1^\nu \wedge \ldots \wedge dd^c \varphi_k^\nu \longrightarrow dd^c V \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c \varphi_k$,

(b) $V^\nu \wedge dd^c \varphi_1^\nu \wedge \ldots \wedge dd^c \varphi_k^\nu \longrightarrow V \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c \varphi_k$,

(c) $\varphi_k^\nu dd^c V^\nu \wedge dd^c \varphi_1^\nu \wedge \ldots \wedge dd^c \varphi_{k-1}^\nu \longrightarrow \varphi_k \wedge dd^c V \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c \varphi_k$.

Nous prouverons le théorème 2.6 simultanément avec la propriété suivante qui en est un corollaire.

Corollaire 2.7. –

(a) $dd^c\big(V \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c \varphi_k\big) = dd^c V \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c \varphi_k$.

(b) *Les courants $V \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c \varphi_k$ et $dd^c V \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c \varphi_k$ sont symétriques en $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.*

Démonstration. En utilisant le lemme 2.4 et un procédé évident de suite diagonale, on se ramène au cas où V^ν, φ_1^ν, … , φ_k^ν sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme les propriétés 2.6 (a,b,c) sont locales, on peut sans perte de généralité se placer dans un ouvert $\Omega = \{\rho < 0\} \Subset X$. On va maintenant se ramener à la situation où φ_j, φ_j^ν sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\partial\Omega$ et nulles sur $\partial\Omega$, de manière à pouvoir appliquer la formule de Stokes sans termes de bord. Soit $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto \lambda(u,v)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ convexe croissante en u et v, qui coïncide avec $\max(u,v)$ pour $|u-v| > 1$. Alors $\tilde\varphi_j^\nu = \lambda\big(\varphi_j^\nu - \frac{2}{\varepsilon}, \varepsilon^{-2}\rho\big)$ est psh $\mathcal{C}^\infty$, de plus pour $\varepsilon > 0$ assez petit on a

$$\begin{cases} \tilde\varphi_j^\nu = \varphi_j^\nu - \frac{2}{\varepsilon} & \text{sur} \ \ \Omega_{3\varepsilon} = \{\rho < -3\varepsilon\}, \\ \tilde\varphi_j^\nu = \varepsilon^{-2}\rho & \text{sur} \ \ \overline{\Omega} \smallsetminus \Omega_\varepsilon = \{-\varepsilon \leqslant \rho \leqslant 0\}. \end{cases}$$

On peut donc finalement supposer que $\varphi_j^\nu = \varphi_j = \varepsilon^{-2}\rho$ sur la «couronne» $\overline{\Omega} \smallsetminus \Omega_\varepsilon$ (et ceci quels que soient j, ν).

Preuve de 2.6 (a). On raisonne par récurrence sur k. D'après (2.1) il suffit de prouver que

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int_\Omega \varphi_k^\nu\, dd^cV^\nu\wedge dd^c\varphi_1^\nu\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_{k-1}^\nu\wedge dd^c\psi$$

$$= \int_\Omega \varphi_k\, dd^cV\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_{k-1} \tag{2.8}$$

pour toute forme $\psi\in\mathcal{C}^\infty_{n-k-1,n-k-1}(\overline{\Omega})$ telle que $\psi_{|\partial\Omega}=0$ (noter que par hypothèse $\varphi^\nu_{k|\partial\Omega}=0$). Quitte à remplacer ψ successivement par $\rho(dd^c\rho)^{n-k-1}$ et $\psi{+}A\rho(dd^c\rho)^{n-k-1}$, $A\gg 0$, on peut supposer $dd^c\psi\geqslant 0$ sur $\overline{\Omega}$. L'inégalité $\leqslant$ dans (2.8) résulte alors simplement de l'hypothèse de récurrence

$$dd^cV^\nu\wedge dd^c\varphi_1^\nu\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_{k-1}^\nu \longrightarrow dd^cV\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_{k-1}$$

et du théorème de convergence monotone. Pour prouver l'inégalité $\geqslant$ inverse, on effectue des intégrations par parties successives au moyen du lemme 2.5 :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \varphi_k\, dd^cV\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_{k-1}\wedge dd^c\psi\\
&\qquad\leqslant \int_\Omega \varphi_k^\nu\, dd^cV\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_{k-1}\wedge dd^c\psi\\
&\qquad= \int_\Omega \varphi_{k-1}\, dd^cV\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_{k-2}\wedge dd^c\varphi_k^\nu\wedge dd^c\psi\\
&\qquad\leqslant \int_\Omega \varphi_{k-1}^\nu\, dd^cV\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_{k-2}\wedge dd^c\varphi_k^\nu\wedge dd^c\psi\\
&\qquad= \cdots\leqslant \int_\Omega \varphi_1^\nu\, dd^cV\wedge dd^c\varphi_2^\nu\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_k^\nu\wedge dd^c\psi\\
&\qquad= \int_\Omega V\, dd^c\varphi_1^\nu\wedge dd^c\varphi_2^\nu\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_k^\nu\wedge dd^c\psi\\
&\qquad\qquad\qquad - \int_{\partial\Omega} V\, d^c\varphi_1^\nu\wedge dd^c\varphi_2^\nu\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_k^\nu\wedge dd^c\psi\\
&\qquad\leqslant \int_\Omega V^\nu\, dd^c\varphi_1^\nu\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_k^\nu\wedge dd^c\psi - \varepsilon^{-2k}\int_{\partial\Omega} V\, d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{k-1}\wedge dd^c\psi\\
&\qquad= \int_\Omega \varphi_k^\nu\, dd^cV^\nu\wedge dd^c\varphi_1^\nu\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_k^\nu\wedge dd^c\psi\\
&\qquad\qquad\qquad - +\varepsilon^{-2k}\int_{\partial\Omega} (V^\nu - V)\, d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{k-1}\wedge dd^c\psi.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale tend vers 0 par convergence monotone, ce qui achève la preuve de 2.6 (a).

Preuve de 2.7 (a). Conséquence immédiate de 2.4 (b) et 2.6 (a).

Preuve de 2.6 (b). L'inégalité 2.2 (b) entraîne que la suite $V^\nu\, dd^c\varphi_1^\nu\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_k^\nu$ est de masse localement uniformément bornée sur X. De plus toute valeur d'adhérence T de cette suite est telle que

$$T\leqslant V\, dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_k,$$

avec égalité sur $\Omega \smallsetminus \Omega_\varepsilon$ (là où $\varphi_j^\nu = \varphi_j = \varepsilon^{-2}\rho$). D'après 2.6 (a) et 2.7 (a) on a d'autre part

$$dd^cT = dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k = dd^c\big(V\, dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k\big).$$

Distinguons maintenant deux cas suivant la valeur de l'entier k.

Si $k \leqslant n-1$, le lemme 2.5 appliqué avec $v = \rho(dd^c\rho)^{n-k-1}$ entraîne que le courant positif

$$u = V\, dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k - T$$

est nul sur Ω.

Si $k = n$, on peut considérer V, φ_1, ... , φ_k comme des fonctions sur $X \times \mathbb{C}$ ne dépendant pas de la dernière variable, et appliquer le résultat 2.6 (b) déjà connu à $X \times \mathbb{C}$. La démonstration de 2.6 (c) est identique. □

Remarque 2.9. – Si φ_j est $\geqslant 0$, on peut écrire

$$d\varphi_j \wedge d^c\varphi_j = \frac{1}{2} dd^c\varphi_j^2 - \varphi_j\, dd^c\varphi_j\ ;$$

par conséquent, le théorème de convergence faible 2.6 reste valable pour tout produit de V ou dd^cV par des $(1,1)$-formes du type $dd^c\varphi_j$, $d\varphi_j \wedge d^c\varphi_j$, ou encore (par polarisation) $d\varphi_i \wedge d^c\varphi_j + d\varphi_j \wedge d^c\varphi_i$.

Remarque 2.10. – Le lecteur trouvera une intéressante discussion sur le problème de la définition et de la continuité de l'opérateur de Monge-Ampère dans [Ki] et [Ce]. En particulier, il est possible d'étendre certains des résultats précédents au cas où les fonctions φ_j ne sont plus nécessairement bornées, à condition de faire une hypothèse de compacité sur les pôles des φ_j. Nous supposerons qu'il existe un compact $K \subset X$ tel que $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ soient localement bornées sur $X \smallsetminus K$. Alors la définition (2.1), le lemme 2.4 (a) et le théorème 2.6 (a) restent valables.

Pour le voir, on observe que le problème se pose uniquement au voisinage de K. Soit ρ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ strictement psh et ω un ouvert tels que $K \subset \omega \Subset \Omega = \{\rho < 0\} \Subset X$. Quitte à remplacer φ_j par

$$\begin{cases} \varphi_j - \frac{2}{\varepsilon} & \text{sur } \omega, \\ \varepsilon^{-2}\rho & \text{sur } X \smallsetminus \Omega, \\ \max\big(\varphi_j - \frac{2}{\varepsilon}, \varepsilon^{-2}\rho\big) & \text{sur } \Omega \smallsetminus \omega, \end{cases}$$

on peut supposer $\varphi_j = \varepsilon^{-2}\rho$ au voisinage de $\partial\Omega$. Démontrons d'abord par récurrence que $\varphi_k\, dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_{k-1}$ (et donc aussi $dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k$) est de masse localement finie si $k \leqslant n-1$. Pour tout $a < 0$ on a en effet, avec la notation $\varphi_{k,a} = \max(\varphi_k, a)$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\varphi_{k,a}|\, dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_{k-1} \wedge (dd^c\rho)^{n-k}\\ &= \int_\Omega |\rho|\, dd^c\big(\varphi_{k,a} dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_{k-1}\big) \wedge (dd^c\rho)^{n-k-1}\\ &\leqslant C \int_\Omega dd^c\big(\varphi_{k,a} dd^cV \wedge dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_{k-1}\big) \wedge (dd^c\rho)^{n-k-1}\\ &= C\varepsilon^{-2k} \int_\Omega dd^cV \wedge (dd^c\rho)^{n-1} < +\infty,\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du théorème de Stokes. La démonstration de 2.4 (a) et 2.6 (a) se fait alors sans aucune modification.

3. Mesures de Monge-Ampère et formule de Jensen.

A toute fonction φ psh continue et exhaustive sur un espace de Stein, nous allons associer de manière canonique une famille de mesures positives portées par les ensembles de niveau de φ. Ces mesures apparaissent naturellement lorsqu'on cherche à étendre la formule de Jensen en plusieurs variables. Les principales idées de ce paragraphe reposent sur les calculs faits par P. Lelong [Le1] pour montrer l'existence des nombres de Lelong d'un courant positif fermé. Nous reprenons pour l'essentiel les notations de [De4], [De5] (voir aussi l'article de H. Skoda [Sk1]).

On considère un espace de Stein X de dimension pure n, réduit, muni d'une fonction psh continue $\varphi : X \to [-\infty, R[$, où $R \in\,]-\infty, +\infty]$. Pour tout $r < R$ on note

$$B(r) = \big\{z \in X\,;\ \varphi(z) < r\big\}, \qquad \overline{B}(r) = \big\{z \in X\,;\ \varphi(z) \leqslant r\big\}$$

les « pseudoboules » ouvertes et fermées associées à φ (on prendra garde au fait que $\overline{B}(r)$ n'est pas nécessairement l'adhérence de $B(r)$!) . On suppose que φ est *exhaustive*, c'est-à-dire que les pseudoboules $\overline{B}(r)$, $r < R$, sont *compactes*. On pose enfin pour tout $r \in [-\infty, R[$

$$S(r) = \big\{z \in X\,;\ \varphi(z) = r\big\} = \overline{B}(r) \smallsetminus B(r),$$
$$\varphi_r = \max(\varphi, r), \qquad \alpha = dd^c\varphi = 2i\,\partial\overline{\partial}\varphi.$$

Le courant $(dd^c\varphi_r)^n$ est bien défini grâce à (2.1) si $r > -\infty$, et si $r = -\infty$, $(dd^c\varphi_r)^n = (dd^c\varphi)^n$ existe d'après la remarque 2.10.

Lemme 3.1. – *L'application $r \mapsto (dd^c\varphi_r)^n$ est continue de $[-\infty, R[$ dans l'espace des mesures sur X muni de la topologie faible.*

Démonstration. La continuité à droite résulte du théorème 2.6 (a), tandis que la continuité à gauche s'obtient en écrivant

$$(dd^c\varphi_r)^n = \big(dd^c \max(\varphi - r, 0)\big)^n. \qquad \square$$

Comme $(dd^c\varphi_r)^n$ est nul sur $B(r)$ et coïncide avec $(dd^c\varphi)^n$ sur $X \smallsetminus \overline{B}(r)$, la continuité à gauche entraîne

$$(dd^c\varphi_r)^n \geqslant \mathbb{1}_{X \smallsetminus B(r)} (dd^c\varphi)^n,$$

où $1\!\!1_A$ désigne la fonction caractéristique d'une partie $A \subset X$. Les résultats ci-dessous découlent aussitôt de ces remarques et justifient la définition suivante.

Théorème et définition 3.2. – *On appellera mesures de Monge-Ampère associées à φ les familles de mesures positives (μ_r), $(\overline{\mu}_r)$ portées par $S(r)$, $r \in [-\infty, R[$, définies par*

$$\mu_r = (dd^c\varphi_r)^n - 1\!\!1_{X \smallsetminus B(r)}(dd^c\varphi)^n,$$
$$\overline{\mu}_r = (dd^c\varphi_r)^n - 1\!\!1_{X \smallsetminus \overline{B}(r)}(dd^c\varphi)^n.$$

La famille μ_r (resp. $\overline{\mu}_r$) est faiblement continue à gauche (resp. à droite), et on a les relations

$$\overline{\mu}_r = \lim_{\rho \to r+0} \mu_\rho, \qquad \mu_r = \lim_{\rho \to r-0} \overline{\mu}_\rho,$$
$$\overline{\mu}_r = 1\!\!1_{S(r)}(dd^c\varphi_r)^n = \mu_r + 1\!\!1_{S(r)}(dd^c\varphi)^n.$$

Soit $D_\varphi \subset [-\infty, R[$ l'ensemble au plus dénombrable des réels r tels que $S(r)$ soit négligeable pour la mesure $(dd^c\varphi)^n$ sur X. Alors $\overline{\mu}_r = \mu_r$ pour tout $r \notin D_\varphi$, et les applications $r \mapsto \mu_r$, $r \mapsto \overline{\mu}_r$ sont continues en tout point $r \notin D_\varphi$. □

Nous remercions vivement E. Bedford de nous avoir suggéré cette définition, qui simplifie celle que nous avions utilisé dans une version antérieure de ce travail. En tout point où φ est régulière, μ_r et $\overline{\mu}_r$ peuvent se décrire par une forme différentielle simple sur l'hypersurface $S(r)$.

Proposition 3.3. – *Soit $x \in X$ un point régulier au voisinage duquel φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et tel que $d\varphi(x) \neq 0$. On oriente $S(r)$ comme bord de $B(r)$. Alors les mesures μ_r et $\overline{\mu}_r$ sont définies au voisinage de x par la $(2n-1)$-forme volume $(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge \varphi_{|S(r)}$.*

Démonstration. Soit Ω un voisinage de x sur lequel $d\varphi \neq 0$, et h une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω. Écrivons

$$\max(r,t) = \lim_{\nu \to +\infty} \chi_\nu(t)$$

où χ_ν est une suite de régularisées par convolution de $t \mapsto \max(r,t)$. On peut faire en sorte que (χ_ν) soit une suite décroissante de fonctions convexes $\mathcal{C}^\infty$, telle que $0 \leqslant \chi'_\nu \leqslant 1$, avec $\lim \chi'_\nu(t)$ égal à 0 pour $t < r$ et égal à 1 pour $t > r$. Le théorème 2.6 (a) entraîne donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h\,(dd^c\varphi_r)^n &= \lim_{\nu \to +\infty} \int_\Omega h\,(dd^c\chi_\nu \circ \varphi)^n \\
&= \lim_{\nu \to +\infty} -\int_\Omega dh \wedge (dd^c\chi_\nu \circ \varphi)^{n-1} \wedge d^c(\chi_\nu \circ \varphi) \\
&= \lim_{\nu \to +\infty} -\int_\Omega \chi'_\nu(\varphi)^n\, dh \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi \\
&= -\int_{\Omega \smallsetminus B(r)} dh \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi \\
&= \int_{\Omega \cap S(r)} h\,(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi + \int_{\Omega \smallsetminus B(r)} h\,(dd^c\varphi)^n
\end{aligned}$$

d'après la formule de Stokes. On en déduit donc sur Ω l'égalité de mesures

$$(dd^c\varphi_r)^n = (dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi_{|S(r)} + \mathbb{1}_{\Omega \smallsetminus B(r)}(dd^c\varphi)^n. \qquad \square$$

Nous pouvons maintenant démontrer la formule de Jensen-Lelong que nous avions en vue.

Théorème 3.4. – *Soit V une fonction psh sur X. Alors V est μ_r-intégrable pour tout $r \in \,]-\infty, R[\,$. De plus*

$$\int_{-\infty}^{r} dt \int_{B(t)} dd^cV \wedge \alpha^{n-1} = \mu_r(V) - \int_{B(r)} V\,\alpha^n,$$

où $\alpha = dd^c\varphi$. Les deux membres sont finis si $\inf_X \varphi > -\infty$ *ou si* $\inf_{B(r)} V > -\infty$.

Démonstration. L'intégrabilité de V pour μ_r (et pour $\overline{\mu}_r$) résulte du fait que V est intégrable pour $(dd^c\varphi_r)^n$ d'après le théorème 2.2 (b). Notons aussi que les intégrales $\int_{B(t)} dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} \geqslant 0$ et $\int_{B(r)} V\,(dd^c\varphi)^n$ ont bien un sens en vertu de la remarque 2.10, la première étant d'ailleurs toujours convergente. La deuxième converge si $\inf_X \varphi > -\infty$ grâce à 2.2 (b), ou si $\inf_{B(r)} V > -\infty$ grâce à 2.10. Pour démontrer la formule 3.4, on suppose d'abord

$$\inf_X \varphi > -\infty \quad \text{et} \quad \inf_{B(r)} V > -\infty,$$

et on se donne $c > r$. Le théorème de Fubini implique

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{c} dt \int_{B(t)} dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} &= \int_{B(c)} \left[\int_{\{\varphi<t<c\}} dt\right] dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1}\\ &= \int_{B(c)} (c-\varphi)\, dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1}.\end{aligned}$$

D'après la formule de Stokes, on a l'égalité

$$\begin{aligned}&\int_{B(c)} d\Big[(c-\varphi)\, d^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} + V\,(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi\Big]\\ &\qquad = \int_{B(c)} d\Big[(c-\varphi_r)\, d^cV \wedge (dd^c\varphi_r)^{n-1} + V\,(dd^c\varphi_r)^{n-1} \wedge d^c\varphi\Big]\end{aligned}$$

puisque les courants à intégrer coïncident sur la couronne $B(c) \smallsetminus \overline{B}(r)$. Si on développe la première intégrale, il vient

$$\int_{B(c)} (c-\varphi)\, dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} + V\,(dd^c\varphi)^n + \int_{B(c)} (dV \wedge d^c\varphi - d\varphi \wedge d^cV) \wedge (dd^c\varphi)^{n-1}$$

et comme la composante de type $(1,1)$ de $dV \wedge d^c\varphi - d\varphi \wedge d^cV$ est nulle, la deuxième somme s'annule. Par suite

$$\int_{B(c)} (c-\varphi)\, dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} + V\,(dd^c\varphi)^n = \int_{B(c)} (c-\varphi_r)\, dd^cV \wedge (dd^c\varphi_r)^{n-1} + V\,(dd^c\varphi_r)^n.$$

Faisons maintenant tendre c vers r à droite. Comme $0 \leqslant c - \varphi_r \leqslant c - r$, il vient à la limite

$$\int_{\overline{B}(r)} (r - \varphi)\,(dd^c\varphi)^{n-1} + V\,(dd^c\varphi)^n = \int_{\overline{B}(r)} V\,(dd^c\varphi_r)^n = \overline{\mu}_r(V).$$

Compte tenu de (3.5) et de l'égalité $\overline{\mu}_r = \mu_r + \mathbb{1}_{S(r)}(dd^c\varphi)^n$, ceci démontre la formule 3.4 sous l'hypothèse restrictive que φ et V soient minorées. Dans le cas général, on peut écrire $V = \lim_{\nu\to+\infty} V_\nu$ où V_ν est une suite décroissante de fonctions psh $\mathcal{C}^\infty$ sur X (cf. [FN]). Soit $a < r$ fixé. D'après ce qui précède, en remplaçant φ par la fonction localement bornée φ_a, on obtient l'égalité

$$\mu_r(V_\nu) = \int_a^r dt \int_{B(t)} dd^cV_\nu \wedge (dd^c\varphi_a)^{n-1} + \int_{B(r)} V_\nu\,(dd^c\varphi_a)^n.$$

Un passage à la limite quand ν tend vers $+\infty$ donne

$$\mu_r(V) = \int_a^r dt \int_{B(t)} dd^cV \wedge (dd^c\varphi_a)^{n-1} + \int_{B(r)} V\,(dd^c\varphi_a)^n\ ;$$

en effet, la mesure $dd^cV_\nu \wedge (dd^c\varphi_a)^{n-1}$ converge faiblement vers $dd^cV \wedge (dd^c\varphi_a)^{n-1}$ grâce au théorème 2.6 (a), et cette mesure est évaluée sur la fonction continue $\mathbb{1}_{B(r)}(r - \varphi_a)$ d'après (3.5). Le théorème de Stokes montre que la mesure

$$dd^cV \wedge \big[(dd^c\varphi_a)^{n-1} - (dd^c\varphi)^{n-1}\big]$$

est d'intégrale nulle sur $B(t)$ pour tout $t > a$, donc on obtient

$$\int_a^r dt \int_{B(t)} dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} = \mu_r(V) - \int_{B(r)} V\,(dd^c\varphi_a)^n.$$

Cette formule entraîne que les fonctions continues $a \mapsto \int_{B(r)} V_\nu\,(dd^c\varphi_a)^n$ sont croissantes sur $[-\infty, r[$. Leur limite décroissante $a \mapsto \int_{B(r)} V\,(dd^c\varphi_a)^n$ est donc continue à droite, ce qui permet de passer à la limite en $a = -\infty$. $\square$

De la formule 3.4 on déduit aussitôt la formule analogue pour les mesures $\overline{\mu}_r$:

$$\int_{-\infty}^r dt \int_{B(t)} dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} = \overline{\mu}_r(V) - \int_{\overline{B}(r)} V\,(dd^c\varphi)^n. \tag{3.6}$$

En particulier pour $V = 1$ il vient :

Corollaire 3.7. – *Les masses totales de μ_r et $\overline{\mu}_r$ sont données par*

$$\|\mu_r\| = \int_{B(r)} (dd^c\varphi)^n = \int_{B(r)} \alpha^n, \qquad \|\overline{\mu}_r\| = \int_{\overline{B}(r)} (dd^c\varphi)^n = \int_{\overline{B}(r)} \alpha^n.$$

Dans toute la suite, nous laisserons au lecteur le soin de traduire les résultats obtenus dans le cas des mesures $\overline{\mu}_r$. Nous étudions maintenant la continuité des mesures μ_r en fonction de l'exhaustion φ.

Proposition 3.8. – *Soit $(\varphi^\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions psh continues convergeant vers φ sur X, et μ_r^ν les mesures de Monge-Ampère associées à φ^ν. Alors μ_r^ν converge faiblement vers μ_r pour tout $r \in\,]-\infty, R[\, \smallsetminus D_\varphi$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition 3.2, qui donne

$$\mu_r^\nu = (dd^c\varphi_r^\nu)^n - \mathbb{1}_{X\smallsetminus B(r)}(dd^c\varphi^\nu)^n$$

avec

$$\varphi_r^\nu = \max(\varphi^\nu, r), \qquad B_r^\nu = \big\{|z \in X\,;\ \varphi^\nu(z) < r\big\},$$

et d'observer que $B(r) = \bigcup B^\nu(r)$. Le théorème 2.6 (a) implique alors

$$(dd^c\varphi^\nu)^n \to (dd^c\varphi)^n, \qquad (dd^c\varphi_r^\nu)^n \to (dd^c\varphi_r)^n. \qquad \square$$

La proposition suivante montre que les mesures μ_r sont essentiellement les mesures de désintégration du courant $(dd^c\varphi)^{n-1}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi$ sur la famille des pseudosphères $S(r)$.

Proposition 3.9. – *Soit h une fonction borélienne bornée à support compact dans l'ouvert $X \smallsetminus S(-\infty)$. Alors*

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^R \mu_r(h)\,dr = \int_X h\,\alpha^{n-1}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi.$

(b) *Si de plus h est de classe $\mathcal{C}^1$, on a*

$$\mu_r(h)\,dr = \int_{B(r)} h\,\alpha^n + dh\wedge d^c\varphi\wedge\alpha^{n-1}.$$

Démonstration. (a) Les deux membres définissent des mesures positives opérant sur h. Il suffit donc de démontrer l'égalité lorsque h est continue à support compact. D'après la proposition 3.3 et le théorème de Fubini, la formule est vraie lorsque φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$: le théorème de Sard montre en effet que l'ensemble des valeurs critiques de φ est négligeable. Le cas général s'obtient alors en appliquant la proposition 3.8 à une suite φ^ν de régularisées de φ .

(b) D'après 3.3, la formule est vraie si φ est $\mathcal{C}^\infty$ et si r n'est pas valeur critique de φ. La proposition 3.8 étend le résultat au cas où φ est seulement continue, pourvu que $r \notin D_\varphi$. Il suffit alors d'observer que les deux membres sont des fonctions continues à gauche en r. $\square$

Soit $\chi :]-\infty, R[\, \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante non constante. Les mesures μ_r^* associées à l'exhaustion $\varphi^* = \chi\circ\varphi$ sont alors reliées aux mesures μ_r par la formule de changement de variable suivante :

Proposition 3.10. – *Pour tout $r \in\,]-\infty, R[\,$, on a les formules*

$$\mu^*_{\chi(r)} = \chi'_-(r)^n\,\mu_r, \qquad \overline{\mu}^*_{\chi(r)} = \chi'_+(r)^n\,\overline{\mu}_r$$

où χ'_+, χ'_- sont les dérivées à droite et à gauche de χ.

Démonstration. Les égalités résultent de la proposition 3.3 lorsque φ, χ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et lorsque r est valeur régulière de φ. La proposition 3.8 implique le cas général si $r \notin D_\varphi$, après passage à la limite décroissante sur φ et χ. Le résultat s'en déduit par continuité pour $r \in D_\varphi$. □

4. Mesure résiduelle de $(dd^c\varphi)^n$ sur $S(-\infty)$.

Si V est une fonction psh $\geqslant 0$, le théorème 3.4 montre que la fonction $r \mapsto \mu_r(V)$ est croissante $\geqslant 0$. De plus, comme l'intégrable double

$$\int_{-\infty}^{r} dt \int_{B(t)} dd^c V \wedge \alpha^{n-1} \leqslant \mu_r(V)$$

est convergente, il vient

$$\lim_{\rho \to -\infty} \mu_r(V) = \lim_{\rho \to -\infty} \int_{B(r)} V\, \alpha^n = \int_{S(-\infty)} V\, \alpha^n.$$

Théorème et définition 4.1. – *La mesure* $\overline{\mu}_{-\infty} = \mathbb{1}_{S(-\infty)}\alpha^n$ *portée par le compact* $S(-\infty)$ *sera appelée mesure résiduelle associée à* φ*. Pour toute fonction psh* $V \geqslant 0$ *sur* X *on a*

$$\overline{\mu}_{-\infty}(V) = \lim_{r \to -\infty} \mu_r(V),$$

et μ_r *tend faiblement vers* $\overline{\mu}_{-\infty}$ *quand* $r \to -\infty$*.*

La dernière affirmation résulte du théorème 3.2, ou du fait qu'on peut écrire toute fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'espace de Stein X sous la forme $h = h_1 - h_2$ avec h_1, $h_2 \geqslant 0$ psh de classe $\mathcal{C}^2$.

L'objet de ce paragraphe est d'énoncer quelques propriétés générales des mesures résiduelles $\overline{\mu}_{-\infty}$. Pour évaluer $\overline{\mu}_{-\infty}$ sur des exemples concrets, on dispose du théorème de comparaison suivant, inspiré des résultats de [De4], [De5] sur les nombres de Lelong.

Théorème 4.2. – *Soient* $\varphi_j : X \to [-\infty, R_j[$, $j = 1, 2$, *deux fonctions psh continues exhaustives et* $\mu_{r,j}$ *les mesures associées respectives sur* $S_j(r) = \{\varphi_j = r\}$*. On pose*

$$\ell = \liminf_{\varphi_1(z) \to -\infty} \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}.$$

Alors pour toute fonction psh $V \geqslant 0$*, on a l'inégalité*

$$\overline{\mu}_{-\infty,2}(V) \geqslant \ell^n\, \overline{\mu}_{-\infty,1}(V).$$

En particulier, si $\varphi_2 \sim \varphi_1$ *quand* $\varphi_1(z) \to -\infty$*, on a*

$$\overline{\mu}_{-\infty,2}(V) = \ell^n\, \overline{\mu}_{-\infty,1}(V).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\overline{\mu}_{-\infty,2}(V) \geqslant \ell^n \, \overline{\mu}_{-\infty,1}(V)$ sous l'hypothèse $\liminf \varphi_2/\varphi_1 > 1$. Fixons $r < R_2$ et posons $\varphi = \max(\varphi_1 - A, \varphi_2)$ où A est choisi assez grand pour que φ coïncide avec φ_2 au voisinage de $S_2(r)$. Soient μ_r les mesures associées à φ. L'hypothèse $\liminf \varphi_2/\varphi_1 > 1$ entraîne qu'il existe $t < r$ tel que φ coïncide avec $\varphi_1 - A$ sur $B_1(t) = \{\varphi_1 < t\}$. On obtient donc

$$\overline{\mu}_{-\infty,1}(V) = \lim_{t\to-\infty} \overline{\mu}_{t,1}(V) = \lim_{t\to-\infty} \overline{\mu}_t(V) \leqslant \mu_r(V) = \mu_{r,2}(V),$$

d'où

$$\overline{\mu}_{-\infty,1}(V) \leqslant \lim_{r\to-\infty} \overline{\mu}_{r,2}(V) = \overline{\mu}_{-\infty,2}(V). \qquad \square$$

Sous les hypothèses précédentes, on peut conjecturer que l'inégalité entre mesures $\overline{\mu}_{-\infty,2} \geqslant \ell^n \, \overline{\mu}_{-\infty,1}$ a toujours lieu, mais les conclusions du théorème 4.2 ne nous ont pas permis de le démontrer. Nous disposons toutefois du résultat particulier suivant :

Corollaire 4.3. – *Avec les notations du théorème* 4.2*, soit $A \subset S_1(-\infty)$ une partie borélienne qui est réunion de composantes connexes de $S_1(-\infty)$ et $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique de A. Alors pour toute fonction psh $V \geqslant 0$*

$$\overline{\mu}_{-\infty,2}(\mathbb{1}_A V) \geqslant \ell^n \, \overline{\mu}_{-\infty,1}(\mathbb{1}_A V).$$

En particulier, si $S_1(-\infty)$ est totalement discontinu, on a $\overline{\mu}_{-\infty,2} \geqslant \ell^n \, \overline{\mu}_{-\infty,1}$.

Démonstration. Il existe une suite croissante de compacts $K_\nu \subset A$ tels que l'on ait $\overline{\mu}_{-\infty,j}(A \smallsetminus K_\nu) < 2^{-\nu}$, $j = 1, 2$. La relation d'équivalence dont les classes sont les composantes connexes de $S_1(-\infty)$ est de graphe fermé ($S_1(-\infty)$ étant compact). Le saturé $\tilde{K}_\nu$ de K_ν est donc une partie compacte de A ; de plus $\tilde{K}_\nu$ est intersection d'une suite décroissante de parties à la fois ouvertes et fermées dans $S_1(-\infty)$ (cf. Bourbaki [Bo], chap. II, §4, n°4). On peut donc supposer que A est ouvert et fermé dans $S_1(-\infty)$. Il existe alors un ouvert $U \Subset X$ tel que $A = U \cap S_1(-\infty)$, $\partial U \cap S_1(-\infty) = \emptyset$. Soit $r_0 = \inf_{\partial U} \varphi_1 > -\infty$ et

$$\Omega = \big\{ z \in U \,;\ \varphi_1(z) < r_0 \big\}.$$

L'ouvert Ω est réunion de composantes connexes de $B_1(r_0)$, donc Ω est de Stein ; de plus $\varphi_1 : \Omega \to [-\infty, r_0[$ est exhaustive. Posons

$$\varphi_\nu = \max\big(\varphi_2, \nu(\varphi_1 - r_0 + 1)\big).$$

Pour $\nu > \sup_\Omega \varphi_2$, l'application $\varphi_\nu : \Omega \to [-\infty, \nu[$ est exhaustive, tandis que pour $\nu \geqslant \ell$ on a

$$\liminf_{\varphi_1(z)\to-\infty} \frac{\varphi_\nu(z)}{\varphi_1(z)} = \liminf \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \ell.$$

D'après le théorème 4.2 appliqué à φ_1 et φ_ν sur Ω, il vient

$$\overline{\mu}_{-\infty,\nu}(\mathbb{1}_\Omega V) \geqslant \ell^n \, \overline{\mu}_{-\infty,1}(\mathbb{1}_\Omega V).$$

Si ℓ est > 0 (seul cas intéressant à considérer) on a $S_2(-\infty) \supset S_1(-\infty)$, donc $S_\nu(-\infty) = S_1(-\infty)$ et $\Omega \cap S_1(-\infty) = U \cap S_1(-\infty) = A$. Par conséquent

$$(dd^c \varphi_\nu)^n(\mathbb{1}_A V) = \overline{\mu}_{-\infty,\nu}(\mathbb{1}_A V) \geqslant \ell^n \, \overline{\mu}_{-\infty,1}(\mathbb{1}_A V).$$

On observe maintenant que la suite φ_ν décroît vers φ_2 sur l'ouvert $B_1(r_0-1)$ quand $\nu\to+\infty$, donc $(dd^c\varphi_\nu)^n$ tend faiblement vers $(dd^c\varphi_2)^n$ sur $B_1(r_0-1)$ d'après 2.6 (a) et 2.10. Comme A est compact et que $A\subset S_1(-\infty)\subset B_1(r_0-1)$, et comme $\mathbb{1}_A V$ est semi-continue supérieurement, on en déduit à la limite

$$\overline{\mu}_{-\infty,2}(\mathbb{1}_A V)=(dd^c\varphi_2)^n(\mathbb{1}_A V)\geqslant \ell^n\,\overline{\mu}_{-\infty,1}(\mathbb{1}_A V).\qquad\square$$

Dans le calcul classique qui suit, nous aurons besoin d'évaluer la masse $\|\mu_{-\infty}\|$ à partir de la fonction $\varphi^*=e^\varphi$. À cet effet, on observe d'après la proposition 3.10 que $\mu_r^*=\mu_{\log r}$, d'où

$$\overline{\mu}_{-\infty}(1)=\lim_{r\to0} r^{-n}\mu_r^*(1)=\lim_{r\to0} r^{-n}\int_{\{\varphi^*<r\}}(dd^c\varphi^*)^n. \tag{4.4}$$

Proposition 4.5. – *Soit $\varphi=\log\varphi^*$ une fonction continue psh dans $\mathbb{C}^n$, où φ^* est homogène de degré $\ell>0$ et $(\varphi^*)^{-1}(0)=0$. Alors*

$$(dd^c\varphi)^n=(2\pi\ell)^n\delta_0$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.

Démonstration. L'homogénéité de φ^* implique $(dd^c\varphi)^n=0$ sur $\mathbb{C}^n\smallsetminus\{0\}$. Dans le cas particulier $\varphi^*(z)=|z|^2$, on trouve $(dd^c\varphi^*)^n=4^n\,n!\,d\lambda$ ($d\lambda$ = mesure de Lebesgue), d'où $\overline{\mu}_{-\infty}(1)=(4\pi)^n$ et $(dd^c\varphi)^n=\overline{\mu}_{-\infty}=(4\pi)^n\delta_0$. Le cas général résulte du théorème 4.2. $\square$

Exemple 4.6. – A titre d'illustration de ce qui précède, regardons le cas où $\varphi(z)=\log\max(|z_1|,\ldots,|z_n|)$ dans $\mathbb{C}^n$. Comme φ ne dépend que de $n-1$ variables au voisinage de tout point du complémentaire de la «diagonale» $\Delta=\{|z_1|=\cdots=|z_n|\}$, on en déduit par homogénéité de e^φ que $(dd^c\varphi)^{n-1}=0$ sur $\mathbb{C}^n\smallsetminus\Delta$. La proposition 3.7 montre alors que la mesure μ_r est à support dans le bord distingué

$$\Gamma(r)=\big\{|z_1|=\cdots=|z_n|=e^r\big\}=S(r)\cap\Delta$$

du polydisque $B(r)$. Comme μ_r est invariante par les rotations préservant $B(r)$, et comme $\|\mu_r\|=(2\pi)^n$ d'après 4.5, il en résulte que $\mu_r=d\theta_1\wedge\ldots\wedge d\theta_n$ avec $z_j=e^{r+i\theta_j}$, $1\leqslant j\leqslant n$. On obtient de plus :

$$\begin{aligned}&(dd^c\varphi)^n=(2\pi)^n\delta_0\,,\\&(dd^c\varphi)^{n-1}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi=dr\wedge d\theta_1\wedge\ldots\wedge d\theta_n\quad\text{sur }\Delta\smallsetminus\{0\}.\end{aligned}\qquad\square$$

Revenons maintenant au cas général. Soit $x\in X$ un point quelconque et $w=(w_1,w_2,\ldots,w_N)$ les N fonctions coordonnées relatives à un plongement d'un voisinage $U\subset X$ de x dans $\mathbb{C}^N$, tel que $w(x)=0$. Il existe un voisinage $\Omega\Subset U$ de x et $r_0<0$ tels que la fonction $\varphi_1(z)=\log|w(z)|^2:\Omega\to\,]\infty,r_0[$ soit exhaustive. La formule 4.4 donne alors (cf. [De5]) :

$$\overline{\mu}_{-\infty,1}(1)=(4\pi)^n\,\nu([X],x)$$

où $\nu([X],x)$ est le nombre de Lelong en x du courant d'intégration de X dans $\mathbb{C}^N$, égal d'après P. Thie [Th] à la multiplicité algébrique $m(X,x)$ de X au point x. On en conclut que

$$\overline{\mu}_{-\infty,1} = (4\pi)^n\, m(X,x)\, \delta_x\,. \tag{4.7}$$

Pour une fonction φ quelconque, on obtient le résultat suivant, qui est bien connu au moins dans le cas où X est lisse.

Corollaire 4.8. – *Désignons par $\nu(\varphi,x)$ le nombre de Lelong de φ en tout point $x \in X$. Alors*

$$(dd^c\varphi)^n \geqslant \overline{\mu}_{-\infty} \geqslant (2\pi)^n \sum_{x\in X} m(X,x)\,\nu(\varphi,x)^n\,\delta_x\,.$$

Démonstration. Avec les notations précédentes, l'une des définitions équivalentes des nombres de Lelong est la suivante :

$$\nu(\varphi,x) = \liminf_{z\to x} \frac{\varphi(z)}{\log|w(z)|}.$$

Posons alors $\varphi_1(z) = \chi(z)\log|w(z)|^2 + A\psi(z)$ où χ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω, $\chi \equiv 1$ au voisinage de x, ψ strictement psh de classe $\mathcal{C}^2$ sur X et $A > 0$ assez grand. D'après le corollaire 4.3 et la formule (4.7) il vient :

$$\liminf_{z\to x} \frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)} = \frac{1}{2}\nu(\varphi,x),$$

d'où

$$\overline{\mu}_{-\infty} \geqslant \Big(\frac{1}{2}\nu(\varphi,x)\Big)^n \overline{\mu}_{-\infty,1} \geqslant (2\pi)^n\, m(X,x)\,\nu(\varphi,x)^n\,\delta_x. \qquad \square$$

5. Principe du maximum.

Soit φ une fonction d'exhaustion psh continue sur un espace complexe X. Nous allons voir que les fonctions plurisousharmoniques sur X satisfont le principe du maximum relativement aux mesures de Monge-Ampère associées à φ.

Théorème 5.1. – *Si $B(r) = \{\varphi < r\} \neq \emptyset$, alors $\|\mu_r\| > 0$ et pour toute fonction V psh sur X on a :*

$$\sup_{B(r)} V = \textit{sup essentiel de } V \textit{ relativement à } \mu_r.$$

L'exemple 4.6 montre que l'hypothèse de plurisousharmonicité de V dans le théorème 5.1 est pertinente.

Démonstration. Il n'est pas restrictif de supposer $V \leqslant 0$. Nous allons alors montrer que $\sup_{B(r)} V = \|V\|_{L^\infty(\mu_r)}$ en appliquant la formule de Jensen à une fonction d'exhaustion φ' bien choisie.

Soit ψ une fonction strictement psh de classe $\mathcal{C}^2$ sur X, $z_0 \in B(r) \cap X_{\mathrm{reg}}$ un point régulier et $U \Subset B(r) \cap X_{\mathrm{reg}}$ un voisinage de z_0. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la fonction

$$\varphi'(z) = \max\big(\varphi(z), \varphi(z_0), r - \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon\psi(z)\big)$$

est égale à $\varepsilon\psi(z) + \mathrm{Cte}$ sur U et coïncide avec φ au voisinage de $S(r)$. La mesure μ_r peut donc aussi bien être définie par φ', ce qui donne

$$\begin{aligned}\mu_r(V) &= \int_{-\infty} r dt \int_{B(r)\cap\{\varphi'<t\}} dd^c V \wedge (dd^c\varphi')^{n-1} + \int_{B(r)} V\,(dd^c\varphi')^n \\ &\geqslant \varepsilon^n \int_U V\,(dd^c\psi)^n.\end{aligned}$$

En particulier $\|\mu_r\| = \mu_r(1) > 0$. Remplaçons maintenant V par V^p et faisons tendre p vers $+\infty$. Il vient :

$$V(z_0) \leqslant \lim_{p\to+\infty} \left[\int_U V^p\,(dd^c\psi)^n\right]^{1/p} \leqslant \lim_{p\to+\infty} \left[\varepsilon^{-n}\mu_r(V^p)\right]^{1/p} = \|V\|_{L^\infty(\mu_r)}.$$

On obtient par conséquent

$$\sup_{B(r)} V = \sup_{B(r)\cap X_{\mathrm{reg}}} V \leqslant \|V\|_{L^\infty(\mu_r)}.$$

Dans l'autre sens, l'inégalité

$$\|V\|_{L^\infty(\mu_r)} \leqslant \sup_{S(r)} V$$

est évidente. Si on prouve la continuité à gauche de la fonction $r \mapsto \|V\|_{L^\infty(\mu_r)}$ on aura donc

$$\|V\|_{L^\infty(\mu_r)} \leqslant \lim_{t<r,\, t\to r} L < nr) \sup_{S(t)} V \leqslant \sup_{S(r)} V.$$

Lemme 5.2. – *Pour toute fonction psh $V \geqslant 0$, l'application $r \mapsto \|V\|_{L^\infty(\mu_r)}$ est croissante et continue à gauche.*

Démonstration. La formule 3.4 montre que la fonction $r \mapsto \mu_r(V)$ est croissante et continue à gauche. Sur tout intervalle $]-\infty, r_0]$, $r_0 < R$, les fonctions

$$r \mapsto \big[\|\mu_{r_0}\|^{-1}\mu_r(V^p)\big]^{1/p}$$

sont donc croissantes et continues à gauche, et forment une famille croissante par rapport à p en vertu de l'inégalité de Hölder (la mesure $\|\mu_{r_0}\|^{-1}\mu_r$ est de masse $\leqslant 1$. La limite quand $p \to +\infty$, à savoir $r \mapsto \|V\|_{L^\infty(\mu_r)}$, est donc croissante et continue à gauche sur $]-\infty, r_0]$. $\square$

6. Propriétés de convexité des fonctions psh.

Un résultat bien connu de P .Lelong (cf. [Le1]) affirme que le sup, la moyenne et plus généralement la moyenne L^p d'une fonction psh sur la sphère euclidienne de rayon r dans $\mathbb{C}^n$ sont fonctions convexes de $\log r$. Nous nous proposons d'étendre ces propriétés à une situation beaucoup plus générale.

Soit X un espace de Stein de dimension pure n, $\varphi : X \to [-\infty, R[$ une fonction psh continue exhaustive. On suppose que φ est Monge-Ampère homogène, i.e. qu'il existe $A \in]-\infty, R[$ tel que

$$(dd^c\varphi)^n = 0 \quad \text{sur l'ouvert } \{\varphi > A\}. \tag{6.1}$$

Pour toute fonction psh V sur X et tout $r > A$ le théorème 3.4 montre alors que la dérivée à gauche

$$\frac{d}{dr_-}\,\mu_r(V) = \int_{B(r)} dd^cV \wedge \alpha^{n-1} \tag{6.2}$$

est positive croissante en r, d'où le

Théorème 6.3. – *La fonction valeur moyenne $r \mapsto M_V(r) = \mu_r(V)$ est convexe croissante sur $]A, R[$.*

Le cas classique évoqué au début correspond à la boule de rayon e^R dans $\mathbb{C}^n$ avec $\varphi(z) = \log|z|$, $A = -\infty$. Plus généralement, on a un résultat de convexité pour les moyennes en norme L^p définies par

$$M_V^p(r) = \Big[\mu_r(V_+^p)\Big]^{1/p}, \qquad p \in [1, +\infty[\,.$$

Théorème 6.4. – *La fonction $r \mapsto M_V^p(r)$ est convexe croissante sur $]A, R[$.*

Démonstration. Par régularisation on se ramène au cas où V est psh > 0 de classe $\mathcal{C}^\infty$. Étant donné $\varepsilon > 0$, considérons la fonction

$$h_\varepsilon(r) = \int_{r-\varepsilon}^{r} \mu_t(V^p)\,dt = \int_{B(r)\smallsetminus B(r-\varepsilon)} V^p\,\alpha^{n-1} d\varphi \wedge d^c\varphi\,dt, \qquad r \in\,]A+\varepsilon, R[$$

(la dernière égalité résulte de la proposition 3.9 (a)) . Comme $\mu_r(V^p) = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(r)$, il suffit de prouver que $h_\varepsilon^{1/p}$ est convexe pour tout $\varepsilon > 0$. On doit donc vérifier l'inégalité

$$h_\varepsilon h_\varepsilon'' - \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) h_\varepsilon'^2 \geqslant 0$$

où la dérivée seconde h_ε'' est, disons, calculée à gauche. D'après la proposition 3.9 (b) et l'hypothèse (6.1) il vient

$$\begin{aligned} h_\varepsilon'(r) &= \mu_r(V^p) - \mu_{r-\varepsilon}(V^p) \\ &= \int_{B(r)\smallsetminus B(r-\varepsilon)} d\big[V^p\,\alpha^{n-1} \wedge d^c\varphi\big] \\ &= \int_{B(r)\smallsetminus B(r-\varepsilon)} p\,V^{p-1}\,dV \wedge \alpha^{n-1} \wedge d^c\varphi. \end{aligned}$$

La formule (6.2) implique par ailleurs

$$h''_\varepsilon(r) = \int_{B(r)\smallsetminus B(r-\varepsilon)} dd^c(V^p)\wedge\alpha^{n-1}.$$

Grace à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$h'_\varepsilon(r)^2 \leqslant \int_{B(r)\smallsetminus B(r-\varepsilon)} V^p\,\alpha^{n-1}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi\ \cdot \int_{B(r)\smallsetminus B(r-\varepsilon)} p^2V^{p-2}\,dV\wedge d^cV\wedge\alpha^{n-1},$$

et la relation (6.5) cherchée découle de l'inégalité

$$dd^c(V^p) \geqslant 2p(p-1)\,V^{p-2}dV\wedge d^cV. \qquad \square$$

Corollaire 6.6. – *Les fonctions définies par*

(a) $M_V^{\exp}(r) = \log\mu_r(e^V)$,

(b) $M_V^\infty(r) = \sup_{B(r)} V$,

sont croissantes convexes sur $]A,R[$.

Démonstration. La propriété (a) résulte du théorème 6.4 et de l'égalité

$$\log\mu_r(e^V) = \lim_{p\to+\infty} p\left\{\left[\mu_r\Big(1+\frac{V}{p}\Big)_+^p\right]^{1/p} - 1\right\}.$$

Le principe du maximum (théorème 5.1) entraîne d'autre part

$$\sup_{B(r)} V = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\log\mu_r(e^{\lambda V})$$

par suite (b) est conséquence de (a). $\square$

En vue des applications à l'étude des espaces fibrés, nous démontrons maintenant une version avec paramètre du théorème 6.4. On se donne un morphisme $\pi : X \to Y$ d'espaces analytiques de dimensions pures $\dim X = m+n$, $\dim Y = m$ et des fonctions $\varphi : X \to [-\infty,+\infty[$ psh continue, $R : Y \to\ ]-\infty,+\infty])$ (resp. $A : Y \to [-\infty,+\infty[)$ semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) vérifiant les propriétés ci-dessous.

Hypothèses 6.7. –

(a) *π est surjectif, et les fibres $\pi^{-1}(y)$, $y\in Y$ sont de dimension pure n.*

(b) *π est un morphisme de Stein, i.e. Y possède un recouvrement ouvert $(\Omega_j)_{j\in J}$ tel que $\pi^{-1}(\Omega_j)$ soit de Stein pour tout $j\in J$.*

(c) *$\varphi(x) < R(\pi(x))$ et $A(y) < R(y)$ quels que soient $x\in X$, $y\in Y$.*

(d) *Pour tout $y\in Y$ et tout $r < R(y)$, il existe un voisinage U de y dans Y tel que $\pi^{-1}(U)\cap B(r) \Subset X$.*

(e) $(dd^c\varphi)^n \equiv 0$ *sur l'ouvert* $\{x \in X\,;\ \varphi(x) > A(\pi(x))\}$.

On note ici encore $B(r) = \{\varphi < r\}$, $S(r) = \{\varphi = r\}$ et $\alpha = dd^c\varphi$. Sous les hypothèses (c) et(d), le §3 permet d'associer à chaque fibre $\pi^{-1}(y)$ une famille de mesures $\mu_{y,r}$ portées par $\pi^{-1}(y) \cap S(r)$ pour $\in\ ]-\infty, R(y)[$. Étant donné une fonction psh V sur X on introduit les valeurs moyennes

$$\begin{aligned} M_V(y,r) &= \mu_{y,r}(V), \\ M_V^p(y,r) &= \big[\mu_{y,r}(V_+^p)\big]^{1/p} \quad \text{si } p \in [1,+\infty[, \\ M_V^{\exp}(y,r) &= \log \mu_{y,r}(e^V), \\ M_V^{\infty}(y,r) &= \sup_{\pi^{-1}(y)\cap B(r)} V. \end{aligned}$$

Proposition 6.8. – *Pour tout r fixé, les applications* $y \mapsto \mu_{y,r}(V)$ *et* $y \mapsto M_V^p(y,r)$ *sont faiblement psh au sens de la définition* 1.9 *sur l'ouvert* $\{y \in Y\,;\ A(y) < r < R(y)\}$.

Démonstration. Comme le résultat est local sur Y, l'hypothèse 6.7 (b) permet de supposer X, Y de Stein. Un passage à la limite décroissante nous ramène alors au cas où V est psh de classe $\mathcal{C}^\infty$; si $p > 1$ on peut supposer de plus $V > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire et $\chi :]r-\varepsilon, r[\to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty \geqslant 0$ non nulle à support compact. Par analogie avec le théorème 6.4, introduisons la fonction auxiliaire

$$h(y) = \int_{r-\varepsilon}^{r} \mu_{y,t}(V^p)\,\chi(t)\,dt = \int_{\pi^{-1}(y)} V^p\,\chi(\varphi)\,\alpha^{n-1} \wedge d\varphi \wedge d^c\varphi$$

définie sur l'ouvert

$$U_\varepsilon = \big\{y \in Y\,;\ A(y) + \varepsilon < r < R(y)\big\}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $h^{1/p}$ est faiblement psh sur U_ε. Si $p > 1$, il s'agit donc de montrer que

$$h\,dd^c h - \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) dh \wedge d^c h \geqslant 0.$$

Soient u, v, w des formes réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Y à support compact dans U_ε , de bidegrés respectifs (m,m), $(m,m-1) \oplus (m-1,m)$ et $(m-1,m-1)$. D'après le théorème de Fubini, qu'on applique d'abord en supposant φ de classe $\mathcal{C}^\infty$, il vient

$$\int_Y hu = \int_X V^p\,\chi(\varphi)\,\alpha^{n-1} \wedge d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge \pi^* u\ ;$$

le cas où φ est seulement continue s'en déduit par limite décroissante (théorème 2.6). On observe maintenant que l'intégrande est à support dans

$$\pi^{-1}(\operatorname{Supp} u) \cap \big(B(r) \smallsetminus B(r-\varepsilon)\big) \Subset X$$

(hypothèse 6.7 (d)) et que le courant $\chi(\varphi)\,\alpha^{n-1}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi$ est d-fermé (hypothèse 6.7 (e)). Au moyen d'une intégration par parties sur Y et d'une autre inverse sur X on obtient donc successivement

$$\int_Y dh\wedge v = \int_X d(V^p)\wedge\chi(\varphi)\,\alpha^{n-1}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi\wedge\pi^*v, \tag{6.9}$$

$$\int_Y dd^ch\wedge w = \int_X dd^c(V^p)\wedge\chi(\varphi)\,\alpha^{n-1}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi\wedge\pi^*w. \tag{6.10}$$

Supposons que la $(m-1,m-1)$-forme w soit $\geqslant 0$. L'égalité (6.10) ontre déjà que $\int_Y dd^ch\wedge w\geqslant 0$, donc $dd^ch\geqslant 0$ sur U_ε, ce qui résout le cas $p=1$. Dans le cas général $p>1$, soit γ une 1-forme réelle $\mathcal{C}^\infty$ sur Y et $\gamma^c=i(\gamma^{0,1}-\gamma^{1,0})$. L'égalité (6.9) combinée à l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\begin{aligned}\int_Y dh\wedge\gamma^c\wedge w &= \int_X p\,V^{p-1}\wedge dV\wedge\pi^*\gamma^c\wedge\chi(\varphi)\,\alpha^{n-1}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi\wedge\pi^*w\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_X\big(V^p\,\pi^*(\gamma\wedge\gamma^c)+p^2\,V^{p-2}dV\wedge d^cV\big)\wedge\chi(\varphi)\,\alpha^{n-1}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi\wedge\pi^*w\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_Y h\,\gamma\wedge\gamma^c+\frac{p}{p-1}dd^ch\wedge w,\end{aligned}$$

compte tenu que $dd^cV^p\geqslant p(p-1)\,dV\wedge d^cV$. Comme ceci est vrai pour toute forme $w\geqslant 0$, on en déduit au sens des courants l'inégalité

$$dh\wedge\gamma^c+\gamma\wedge d^ch\leqslant h\,\gamma\wedge\gamma^c+\frac{p}{p-1}\,dd^ch.$$

Observons que h est partout >0 sur U_ε d'après 4.1 ; si nous faisons tendre maintenant γ vers dh/h, il vient l'inégalité attendue

$$\frac{1}{h}\,dh\wedge d^ch\leqslant\frac{p}{p-1}dd^ch.$$

Pour voir que h est localement majorée sur Y, il suffit de regarder le cas où $V\equiv 1$. L'égalité (6.9) montre alors que $dh=0$, donc h est localement constante sur X_{reg}. □

La proposition 6.8 contient en fait le résultat plus général suivant, qui était notre principal objectif.

Théorème 6.11. – *Les fonctions sur $Y\times\mathbb{C}$ définies par*

$$(y,z)\mapsto M_V(y,\operatorname{Re}z),\quad M_V^p(y,\operatorname{Re}z),\quad M_V^{\exp}(V,\operatorname{Re}z),\quad M_V^\infty(y,\operatorname{Re}z)$$

sont faiblement psh sur l'ouvert

$$\big\{(y,z)\in Y\times\mathbb{C}\,;\ A(y)<\operatorname{Re}z<R(y)\big\}.$$

Démonstration. On considère le morphisme

$$\tilde{\pi} = \pi \times \mathrm{Id} : X \times \mathbb{C} \to Y \times \mathbb{C}$$

et on munit $X \times \mathbb{C}$, $Y \times \mathbb{C}$ des fonctions

$$\tilde{\varphi}(x,z) = \varphi(x) - \mathrm{Re}\, z, \quad \tilde{R}(y,z) = R(y) - \mathrm{Re}\, z, \quad \tilde{A}(y,z) = A(y) - \mathrm{Re}\, z,$$

de sorte que les hypothèses 6.7 (a-e) sont vérifiées relativement à ces données. Si $\tilde{V}(x,z) = V(x)$ on a par construction

$$\tilde{\mu}_{(y,z),0}(\tilde{V}) = \mu_{y,\mathrm{Re}\, z}(V),$$

et le théorème 6.11 découle donc de la proposition 6.8. □

Corollaire 6.12. – *Soient $(X_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$ des espaces de Stein de dimension pure n_j et $\varphi_j : X_j \to [-\infty, R_j[$ des fonctions psh continues exhaustives telles que $(dd^c\varphi_j)^{n_j} \equiv 0$ sur l'ouvert $\{x \in X_j\,;\ \varphi_j(x) > A_j\}$. Si V est psh sur $X_1 \times \cdots \times X_k$, les fonctions*

$$M_V(r_1,\ldots,r_k) = \mu_{1,r_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{k,r_k}(V),$$

$$M_V^p(r_1,\ldots,r_k) = M_{V_+^p}(r_1,\ldots,r_k)^{1/p},$$

$$M_V^{\exp}(r_1,\ldots,r_k) = \log M_{e^V}(r_1,\ldots,r_k),$$

$$M_V^\infty(r_1,\ldots,r_k) = \sup_{B(r_1)\times\cdots\times B(r_k)} V$$

sont convexes en les variables $(r_1,\ldots,r_k) \in \prod_{1\leqslant j\leqslant k}]A_j, R_j[$ simultanément, et croissantes par rapport à chacune des r_j.

Plus généralement, si X_0 est un espace analytique de dimension pure n et si V est psh sur $X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_k$, la fonction

$$M_V^p(x_0, \mathrm{Re}\, z_1,\ldots,\mathrm{Re}\, z_k) = M^p_{V(x_0,\bullet)}(\mathrm{Re}\, z_1,\ldots,\mathrm{Re}\, z_k)$$

(resp. $p = \emptyset$, exp*, ∞) est psh sur l'ouvert*

$$X_0 \times \prod_{1\leqslant j\leqslant k} \big\{A_j < \mathrm{Re}\, z_j < R_j\big\} \subset X_0 \times \mathbb{C}^k.$$

Démonstration. Il suffit de prouver la dernière affirmation. On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 1$, le théorème 6.11 appliqué à $\pi : X = X_0 \times X_1 \to X_0 = Y$ et $\varphi = \varphi_1$ montre que la fonction

$$(x_0, z_1) \mapsto M_V^p(x_0, \mathrm{Re}\, z_1)$$

est faiblement psh. Si de plus V est continue, cette fonction est séparément continue en x et convexe en $\mathrm{Re}\, z$, donc continue en $(x_0, \mathrm{Re}\, z_1)$. Grâce au corollaire 1.12, $M_V^p(x_0, \mathrm{Re}\, z)$ est donc psh. Le cas où V est quelconque s'obtient en écrivant V comme limite décroissante de fonctions psh continues.

Pour $k > 1$, la propriété résulte à l'ordre k de sa validité aux ordres 1 et $k-1$ en posant

$$W(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, z_k) = M^p_{V(x_0,\ldots,x_{k-1},\bullet)}(\mathrm{Re}\, z_k)$$

et en observant que

$$M^p_V(x_0, \mathrm{Re}\, z_1, \ldots, \mathrm{Re}\, z_k) = M^p_{W(x_0,\bullet,z_k)}(\mathrm{Re}\, z_1, \ldots, \mathrm{Re}\, z_{k-1}). \qquad \square$$

Nous terminons ce paragraphe en réexaminant à la lumière des résultats précédents l'inégalité de convexité de P. Lelong, qui mesure de façon précise les variations de croissance d'une fonction psh sur un espace fibré le long des différentes fibres. Cette inégalité a été utilisée par H. Skoda [Sk2] pour construire un premier contre-exemple au problème, posé par J.-P. Serre en 1953, de savoir si un fibré à base et à fibre de Stein est lui-même de Stein ; voir aussi [De1], [De2] pour d'autres contre-exemples et [De3] pour une construction simple et rapide.

Soit Ω un espace de Stein irréductible de dimension m, qui jouera le rôle de base du fibré, et X un espace de Stein de dimension pure n, qui sera la fibre. On suppose qu'il existe des fonctions $\psi : \Omega \to [-\infty, R[$, $\varphi : X \to [-\infty, +\infty[$ psh continues exhaustives telles que

$$(dd^c\psi)^m = 0 \quad \text{sur} \quad \{\psi > A\}, \qquad (dd^c\varphi)^n = 0 \quad \text{sur } \{\varphi > 0\}.$$

Par exemple si X est une variété algébrique affine de dimension n, il existe un morphisme fini $F : X \to \mathbb{C}^n$ (théorème de normalisation de Noether), et il suffit de prendre $\varphi(z) = \log \|F(z)\|$ où $\| \ \|$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$; le même raisonnement vaut localement sur Ω pour l'existence de ψ.

Soient V une fonction psh sur $\Omega \times X$ et des réels a, b, c, r tels que $A < a < b < c < R$ et $r > 0$. La propriété de convexité du corollaire 6.12 montre que

$$M^\infty_V(b, r) \leqslant M^\infty_V(a, \sigma r) + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \left[M^\infty_V(c, 0) - M^\infty_V(a, \sigma r)\right]$$

avec $\sigma = \frac{c-a}{c-b}$. Il résulte du théorème 7.5 démontré au paragraphe suivant que l'on a $M^\infty_V(a, r) \to +\infty$ quand $r \to +\infty$, dès que V est non constante sur au moins une fibre $\{z\} \times X$, $z \in B(a)$. Il existe alors une constante r_0 dépendant de a, b, c, V telle que

$$\text{(6.13)} \qquad M^\infty_V(b, r) < M^\infty_V(a, \sigma r) \quad \text{pour } r > r_0, \text{ où } \ \sigma = \frac{c-a}{c-b}.$$

Si ω est un ouvert relativement compact dans Ω, on pose maintenant

$$M^\infty_V(\omega\,; r) = \sup_{\omega \times B(r)} V.$$

Grâce à un raisonnement élémentaire de compacité et de connexité (cf. [Le2], théorème 6.5.4) on déduit alors de (6.13) le résultat suivant :

Corollaire 6.14 (Inégalité de P. Lelong)**.** – *Soient Ω un espace complexe irréductible, ω_1, ω_2 deux ouverts relativement compacts dans Ω et V une fonction psh sur $\Omega \times X$,* *supposée non constante sur au moins une fibre* $\{z\} \times X$. *Alors il existe une constante* $\sigma > 1$ *ne dépendant que de* $\omega_1, \omega_2, \Omega$, *et une constante* r_0 *dépendant en outre de* V, *telles que pour tout* $r > r_0$ *on ait*

$$M_V^\infty(\omega_2\,;\,r) < M_V^\infty(\omega_1\,;\,\sigma r).$$

Dans les applications pratiques se pose le problème du calcul explicite de la constante σ. L'inégalité (6.13) apporte une réponse théorique complète à ce problème. Si $\omega_1, \omega_2 \Subset \Omega$ sont des ouverts de $\mathbb{C}$, on cherche une fonction harmonique ψ sur $\Omega \smallsetminus \overline{\omega}_1$ qui tend vers 0 sur $\partial\omega_1$ et vers 1 sur $\partial\Omega$ (resp. vers $+\infty$ si $\partial\Omega$ est de capacité 0) ; on prolonge ψ par 0 sur ω_1 et on pose $b = \sup_{\omega_2} \psi$. Toute constante $\sigma > \frac{1}{1-b}$ (resp. $\sigma > 1$) répond alors à la question. Le cas où la base Ω est de dimension $m > 1$ revient à résoudre un problème de Dirichlet analogue pour l'équation de Monge-Ampère $(dd^c\psi)^m = 0$ sur $\Omega \smallsetminus \overline{\omega}_1$. Il est facile de voir que la constante σ ainsi obtenue est la meilleure possible. Un calcul élémentaire montre en effet que la fonction

$$\chi(t, r) = \exp\Big(\frac{r}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2}\Big)$$

est croissante convexe sur $[0, 1[\, \times [0, +\infty[$. La fonction psh $V = \chi(\psi_+, \varphi_+)$ contredit alors (6.13) pour tout $\sigma \leqslant \frac{1}{1-b}$.

7. Croissance à l'infini des fonctions psh.

Soit X un espace de Stein irréductible de dimension n et $\varphi : X \to [-\infty, +\infty[$ une fonction psh continue exhaustive (on a donc ici $R = +\infty$). On note

$$\tau(r) = \|\mu_r\| = \int_{B(r)} \alpha^n$$

où $\alpha = dd^c\varphi$, le volume de la pseudoboule $B(r) = \{\varphi < r\}$. La formule de Jensen 3.4 permet alors de relier la croissance du counant dd^cV à la croissance de V. De façon précise :

Proposition 7.1. – *Soient* V *une fonction psh sur* X, $r_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon \in\,]0, 1[$. *Il existe une constante* $C > 0$ *dépendant de* V, ε, r_0 *telle que pour tout* $r \geqslant r_0$ *on ait*

$$(l-\varepsilon) r \int_{B(r_0)} dd^cV \wedge \alpha^{n-1} \leqslant \mu_r(V_+) + C\,\tau(r).$$

Démonstration. Posons $V_\nu = \max(V, -\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Les mesures $dd^cV_\nu \wedge \alpha^{n-1}$ convergent faiblement vers $dd^cV \wedge \alpha^{n-1}$ quand $\nu \to +\infty$, par suite

$$\liminf_{\nu \to +\infty} \int_{B(r_0)} dd^cV_\nu \wedge \alpha^{n-1} \geqslant \int_{B(r_0)} dd^cV \wedge \alpha^{n-1}.$$

Il existe donc $\nu \in \mathbb{N}$ (dépendant de V, ε, r_0) tel que

$$\int_{B(r_0)} dd^cV_\nu \wedge \alpha^{n-1} \geqslant (1-\varepsilon) \int_{B(r_0)} dd^cV \wedge \alpha^{n-1}.$$

La formule 3.4 appliquée à V_ν donne d'autre part

$$(r - r_0) \int_{B(r_0)} dd^c V_\nu \wedge \alpha^{n-1} \geqslant \mu_r(V_\nu) - \int_{B(r)} V_\nu \, \alpha^n \leqslant \mu_r(V_+) + \nu \, \tau(r).$$

Ces deux inégalités combinées entraînent la proposition 7.1 avec

$$C = \nu + \frac{(1-\varepsilon) r_0}{\tau(r_0)} \int_{B(r_0)} dd^c V \wedge \alpha^{n-1}. \qquad \square$$

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous ferons une hypothèse de modération sur la croissance du volume de X.

Hypothèse 7.2. – $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{\tau(r)}{r} = 0.$

Nous obtenons alors comme conséquence immédiate de la proposition 7.1 l'inégalité fondamentale suivante :

Corollaire 7.3. – *Sous l'hypothèse* (7.2), *on a pour toute fonction V psh* :

$$\int_X dd^c V \wedge \alpha^{n-1} \leqslant \liminf_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \mu_r(V_+).$$

Cette inégalité sera exploitée principalement au moyen du lemme suivant :

Lemme 7.4. – *Soient ψ une fonction strictement psh de classe $\mathcal{C}^2$ sur X et $r_1 < r_2$ avec $B(r_2) \neq \emptyset$. Alors il existe une constante $C(r_1, r_2) > 0$ telle que pour toute fonction psh V on ait* :

$$\int_{B(r_1)} dd^c V \wedge (dd^c \psi)^{n-1} \leqslant C(r_1, r_2) \int_{B(r_2)} dd^c V \wedge \alpha^{n-1}.$$

Démonstration. Posons $\varphi' = \max(\varphi, r_1 + \varepsilon\psi + \sqrt{\varepsilon})$ où $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit pour que $\varphi' = \varphi$ au voisinage de $S(r_2)$ et $\varphi' = r_1 + \varepsilon\psi + \sqrt{\varepsilon}$ sur $B(r_1)$. D'après le théorème de Stokes il vient

$$\int_{B(r_2)} dd^c V \wedge (dd^c \varphi)^{n-1} = \int_{B(r_2)} dd^c V \wedge (dd^c \varphi')^{n-1} \geqslant \varepsilon^{n-1} \int_{B(r_2)} dd^c V \wedge (dd^c \psi)^{n-1}. \quad \square$$

Théorème 7.5. – *Toute fonction psh V sur X vérifiant l'une des hypothèses de croissance ci-dessous est constante* :

(a) $\displaystyle\liminf_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \mu_r(V_+) = 0.$

(b) $\displaystyle\sup_{B(r)} V = o\Big(\frac{r}{\tau(r)}\Big)$ *quand* $r \to +\infty$.

Démonstration. Le théorème 5.1 donne

$$\mu_r(V_+) \leqslant \|\mu_r\| \sup_{B(r)} V_+ = \tau(r) \sup_{B(r)} V_+,$$

donc l'hypothèse 7.5 (b) implique 7.5 (a). Sous l'hypothèse 7.5 (a), le corollaire 7.3 et le lemme 7.4 montrent que $dd^cV = 0$, i.e. V est pluriharmonique. Pour tout $x \in X$ la fonction $z \mapsto \tilde{V}(z) = \max(V(z), V(x))$ vérifie encore 7.5 (a), elle est donc pluriharmonique. D'après le principe du maximum $-\tilde{V}$ est constante sur X (X étant supposé irréductible), i.e. $V \leqslant V(x)$; V est donc constante. □

Dans la situation usuelle de l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$ et de la fonction d'exhaustion $\varphi(z) = \log|z|$, le théorème 7.5 redonne (avec une démonstration un peu plus simple) un résultat dû à N. Sibony et P.-M. Wong. Définissons l'ordre logarithmique $\rho(V)$ d'une fonction psh V dans $\mathbb{C}^n$ (resp. d'une fonction entière F) par

$$1 + \rho(V) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \sup_{|z|<r} V(z)}{\log\log r}, \qquad (\text{resp.}\ \ \rho(F) = \rho(\log|F|).$$

En d'autres termes V et F sont d'ordre logarithmique $\leqslant \rho$ si pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$V_+(z) \leqslant \varphi(z)^{1+\rho+\varepsilon}, \qquad (\text{resp.}\ \ |F(z)| \leqslant \exp\big(\varphi(z)^{1+\rho+\varepsilon}\big))$$

quand $|z|$ est assez grand. En particulier, tout polynôme est d'ordre logarithmique nul, et toute fonction entière d'ordre logarithmique fini est d'ordre nul au sens usuel.

Corollaire 7.6 ([SW]). – *Soit F une fonction entière non constante d'ordre logarithmique $\rho < 1$, et X une composante irréductible de l'hypersurface $F^{-1}(0)$. Alors toute fonction psh V sur X d'ordre logarithmique $< 1 - \rho$ est constante. En particulier, les fonctions psh et holomorphes bornées sur X sont constantes.*

Démonstration. Le théorème 7.5 nous ramène à estimer le volume de X relativement à φ, ce qui est un problème classique. Le courant d'intégration sur X est en effet majoré par $\frac{1}{2\pi} dd^c \log|F|$ en vertu de l'équation de Lelong-Poincaré (cf. [Le1]) ; on a donc

$$\tau(r) = \int_{X\cap\{\varphi<r\}} (dd^c\varphi)^{n-1} \leqslant \int_{\{\varphi<r\}} \frac{1}{2\pi} dd^c \log|F| \wedge \alpha^{n-1}$$

Après translation éventuelle on peut supposer $F(0) \neq 0$. La proposition 4.5 et la formule 3.4 appliquée à $V = \frac{1}{2\pi}\log|F|$ dans $\mathbb{C}^n$ donnent alors

$$\int_{-\infty}^{r} \tau(t)\,dt \leqslant \mu_r\Big(\frac{1}{2\pi}\log|F|\Big) - (2\pi)^n \frac{1}{2\pi} \log|F(0)| \leqslant C\, r^{1+\rho+\varepsilon}.$$

pour $r \geqslant r_0(\varepsilon)$. Comme la fonction τ est croissante, on en déduit

$$\tau(r) \leqslant \frac{1}{r}\int_r^{2r} \tau(t)\,dt \leqslant C'\, r^{\rho+\varepsilon}.$$

La conclusion résulte alors de 7.5 (b). □

8. Fonctions holomorphes φ-polynomiales.

Nous conservons ici les notations et hypothèses du §7 : X désigne un espace de Stein irréductible de dimension n, muni d'une fonction d'exhaustion psh φ vérifiant la condition (7.2) de croissance du volume.

Définition 8.1. – *Si F est une fonction holomorphe sur X, on appellera degré de F relativement à φ le nombre*

$$\delta_\varphi(F) = \limsup_{r\to+\infty} \ \mu_r(\log_+|F|) \in [0,+\infty].$$

Les inégalités évidentes $\log_+|FG| \leqslant \log_+|F| + \log_+|G|$ et

$$\log_+|\lambda F + \mu G| \leqslant \log_+|F| + \log_+|G| + \log_+|\lambda+\mu|,$$

jointes à (7.2), entraînent pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\delta_\varphi(FG) \leqslant \delta_\varphi(F) + \delta_\varphi(G), \qquad \delta_\varphi(\lambda F + \mu G) \leqslant \delta_\varphi(F) + \delta_\varphi(G).$$

L'ensemble des fonctions holomorphes de degré fini est donc une $\mathbb{C}$-algèbre intègre.

Notations 8.2. – *On note :*

(a) *$A_\varphi(X)$ l'algèbre des fonctions holomorphes de degré fini, qui seront dites fonctions φ-polynomiales.*

(b) *$K_\varphi(X)$ le corps des quotients F/G avec $F, G \in A_\varphi(X)$, dit corps des fonctions φ-rationnelles.*

La terminologie est justifiée par le théorème 8.5 ci-dessous. Dans tous les exemples que nous connaissons, l'égalité $A_\varphi(X) = K_\varphi(X) \cap \mathcal{O}(X)$ a lieu, mais nous ne savons pas si cette propriété est générale. D'autre part, si X est normal, $A_\varphi(X)$ est une sous-algèbre intégralement close de $K_\varphi(X)$ (vérification immédiate).

Avec ces définitions, on a l'inégalité fondamentale suivante, qui découle de la proposition 7.3 appliquée à $V = \log|F|$.

Proposition 8.3. – *Soit $[Z_F] = \frac{1}{2\pi} dd^c \log|F|$ le diviseur des zéros d'une fonction $F \in A_\varphi(X)$ non identiquement nulle. Alors*

$$2\pi \int_X [Z_F] \wedge \alpha^{n-1} \leqslant \delta_\varphi(F). \qquad \square$$

Corollaire 8.4. – *Soit a un point régulier de X. On désigne par* $\mathrm{ord}_a(F)$ *l'ordre d'annulation d'une fonction holomorphe F en a. Il existe une constante $C(a) > 0$ telle que pour toute fonction $F \in A_\varphi(X)$ non nulle on ait :*

$$\mathrm{ord}_a(F) \leqslant C(a)\,\delta_\varphi(F).$$

Démonstration. Soit $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ un système de coordonnées locales sur X, centré en a, tel que la boule $|z| \leqslant \varepsilon$ soit relativement compacte dans X. Le lemme 7.4 entraîne l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\int_{|z|\leqslant\varepsilon} [Z_F] \wedge (dd^c|z|^2)^{n-1} \leqslant C_1 \int_X [Z_F] \wedge \alpha^{n-1}.$$

Le corollaire 8.4 résulte alors de la proposition 8.3 et de l'inégalité classique de P. Lelong [Le1] :

$$\frac{1}{(4\pi\varepsilon^2)^{n-1}} \int_{|z|\leqslant\varepsilon} [Z_F] \wedge (dd^c|z|^2)^{n-1} \geqslant \mathrm{ord}_a(F). \qquad \square$$

En utilisant un raisonnement classique remontant à Poincaré et développé par Siegel [Si1], [Si2], nous allons maintenant en déduire un théorème d'algébricité très général.

Théorème 8.5. – *Le degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ du corps $K_\varphi(X)$ des fonctions φ-rationnelles est tel que :*

(a) $0 \leqslant \deg\mathrm{tr}_{\mathbb{C}} K_\varphi(X) \leqslant n = \dim X$.

(b) *Si* $\deg\mathrm{tr}_{\mathbb{C}} K_\varphi(X) = n$, *alors $K_\varphi(X)$ est une extension de type fini de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soient $F_1, \ldots, F_N$ des fonctions φ-polynomiales, $(k_1, \ldots, k_N)$ un N-uplet d'entiers $\geqslant 0$, et $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ un polynôme de N variables tel que $\deg_{X_j} P \leqslant k_j$ et $P(F_1, \ldots, F_N) \not\equiv 0$. On a alors

$$\log_+ |P(F_1, \ldots, F_N)| \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant N} k_j \log_+ |F_j| + \mathrm{Cte},$$
$$\delta_\varphi(P(F_1, \ldots, F_N)) \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant N} k_j\, \delta_\varphi(F_j).$$

Le corollaire 8.4 donne donc l'inégalité

$$\mathrm{ord}_a\, P(F_1, \ldots, F_N) \leqslant C(a) \sum_{1\leqslant j\leqslant N} k_j\, \delta_\varphi(F_j). \tag{8.6}$$

Supposons $F_1, \ldots, F_N$ algébriquement indépendantes. Alors la dimension de l'espace vectoriel des polynômes $P(F_1, \ldots, F_N)$ est égale à $(k_1 + 1) \ldots (k_N + 1)$. Pour tout entier $s \geqslant 0$ et tout point $a \in X_{\mathrm{reg}}$ donnés, le système linéaire homogène

$$\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} P(F_1, \ldots, F_N)_{|z=a} = 0, \qquad \nu \in \mathbb{N}^n, \quad |\nu| \leqslant s,$$

admet une solution non nulle dès que cette dimension excède le nombre d'équations, égal à $\binom{n+s}{n} \leqslant \frac{1}{n!}(n+s)^n$. La fonction $P(F_1,\ldots,F_N)$ s'annule alors au moins à l'ordre $s+1$ au point a, et le choix de s tel que $s \leqslant C(a)\sum k_j\,\delta_\varphi(F_j) < s+1$ contredit l'inégalité (8.6), à moins que

$$(k_1+1)\ldots(k_N+1) \leqslant \binom{n+s}{s} \leqslant \frac{1}{n!}\Big[n + C(a)\sum_{1\leqslant j\leqslant N} k_j\,\delta_\varphi(F_j)\Big]^n.$$

Prenons alors $k_1 = \cdots = k_N = k$ et faisons tendre k vers $+\infty$. L'inégalité précédente montre que $(k+1)^N \leqslant \mathrm{Cte}(k+1)^n$, par suite $N \leqslant n$ et la propriété (a) est démontrée.

Supposons maintenant $\deg\mathrm{tr}_{\mathbb{C}} K_\varphi(X) = n$, et soient $F_1,\ldots,F_n$ n fonctions algébriquement indépendantes de $A_\varphi(X)$. Pour démontrer (b), il suffit de majorer le degré de l'extension algébrique $[K_\varphi(X) : \mathbb{C}(F_1,\ldots,F_n)$. Si $F_{n+1} \in A_\varphi(X)$ est algébrique de degré d sur $\mathbb{C}(F_1,\ldots,F_n)$, les monômes $F_1^{\ell_1}\ldots F_n^{\ell_n}F_{n+1}^{\ell_{n+1}}$ sont linéairement indépendants dès que $\ell_{n+1} < d$. Le raisonnement précédent appliqué avec $k_{n-1} = d-1$ donne donc

$$(k_1+1)\ldots(k_n+1)d \leqslant \frac{1}{n!}\Big[n + C(a)\sum_{1\leqslant j\leqslant n} k_j\,\delta_\varphi(F_j) + (d-1)\,\delta_\varphi(F_{n+1})\Big]^n.$$

Prenons $k_1 \sim q_1 k,\ldots,k_n \sim q_n k$ où $q_1,\ldots,q_n$ sont des réels >0 et $k\to+\infty$. Il vient à la limite

$$q_1\ldots q_n d \leqslant \frac{1}{n!}\Big[C(a)\sum_{1\leqslant j\leqslant n} q_j\,\delta_\varphi(F_j) + (d-1)\,\delta_\varphi(F_{n+1})\Big]^n,$$

et le choix $q_j = 1/\delta_\varphi(F_j)$ donne la majoration explicite attendue du degré :

$$d \leqslant \frac{(nC(a))^n}{n!}\,\delta_\varphi(F_1)\cdots\delta_\varphi(F_n). \qquad \square$$

Signalons que le théorème 8.5 (b) ne dit rien en ce qui concerne l'algèbre $A_\varphi(X)$ elle-même ; comme nous le verrons au §10 , il se peut fort bien que l'algèbre $A_\varphi(X)$ *ne soit pas de type fini.*

A titre d'application, considérons le cas particulier où X est un sous-ensemble analytique (fermé) de dimension pure n dans $\mathbb{C}^N$, muni de la fonction d'exhaustion usuelle $\varphi(z) = \log(1+|z|^2)$. La métrique associée $\alpha = dd^c\varphi$ s'identifie avec la métrique de Fubini-Study de l'espace projectif $\mathbb{P}^N$, tandis que la métrique $\beta = dd^c e^\varphi$ coïncide avec la métrique hermitienne plate de $\mathbb{C}^N$. La proposition 3.10 implique les relations

$$\int_{X\cap\{|z|<r\}} \beta^n = (1+r^2)^n \int_{X\cap\{\varphi<\log(1+r^2\}} \alpha^n,$$
$$\mathrm{Vol}_\alpha(X) = \int_X \alpha^n = \lim_{r\to+\infty}\int_{X\cap\{|z|<r\}} \beta^n.$$

Le théorème 8.5 redonne alors de façon élémentaire le résultat classique suivant dû à W. Stoll [St1].

Corollaire 8.7. – *Soit X un sous-ensemble analytique fermé de dimension pure n dans $\mathbb{C}^N$, dont le volume projectif* $\mathrm{Vol}_\alpha(X)$ *est fini, i.e. le volume euclidien vérifie l'estimation*

$$\mathrm{Vol}_\beta(X \cap \{|z| < r\}) \leqslant C \cdot r^{2n}, \qquad C \geqslant 0.$$

Alors X est algébrique.

Démonstration. Chaque composante irréductible de X est de volume au moins égal au volume d'un n-plan (cf. [Le1]), donc ces composantes sont en nombre fini, et on peut supposer X irréductible.

On observe maintenant que les polynômes $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ induisent sur X des fonctions φ-polynomiales au sens des définitions 8.1 et 8.2. En effet, l'estimation évidente $\log_+ |P| \leqslant \frac{1}{2} \deg(P)\, \varphi + \mathrm{Cte}$ entraîne

$$\delta_\varphi(P) = \limsup_{r \to +\infty} \ \frac{1}{r}\, \mu_r(\log_+ |P|) \leqslant \frac{1}{2}\, \mathrm{Vol}_\alpha(X) \cdot \deg(P).$$

Considérons alors le morphisme de restriction

$$\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N] \to A_\varphi(X)$$

et l'idéal I, noyau de ce morphisme. Puisque $A_\varphi(X)$ est intègre, I est un idéal premier ; de plus la variété algébrique irréductible des zéros $V(I)$ contient X par définition. Le théorème 8.5 (a) montre que $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]/I \subset A_\varphi(X)$ a un degré de transcendance au plus égal à $n = \dim X$; par conséquent $\dim V(I) \leqslant n$ et $X = V(I)$. □

Remarque 8.8. – Dans la situation du corollaire on a un isomorphisme

$$\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]/I \xrightarrow{\simeq} A_\varphi(X),$$

en particulier $A_\varphi(X)$ est de type fini. Sinon, il existerait une algèbre B de type fini telle que $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]/I \subsetneq B \subset A_\varphi(X)$. Soit $M = \mathrm{Spm}\, B$ la variété algébrique affine associée à B (voir [Di], tome 2, chap. I, pour le formalisme de base concernant les variétés algébriques) ; les inclusions précédentes induiraient alors respectivement un morphisme algébrique $M \to V(I)$ et un morphisme analytique $V(I) = X \to M$, réciproques l'un de l'autre. Par suite le morphisme $V(I) \to M$ serait algébrique, et on aurait $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]/I = B$ contrairement à l'hypothèse. □

Nous allons voir maintenant comment ces résultats se transposent au cas des sections « polynomiales » d'un fibré linéaire. Soit L un fibré linéaire hermitien au-dessus de X, D la connexion hermitienne canonique de L, et $c(L) = D^2$ la $(1,1)$-forme de courbure de L.

Si σ est une section holomorphe non nulle de L, on obtient pour tout $\varepsilon > 0$:

$$i\partial\overline{\partial} \log(\varepsilon + |\sigma|^2) = i\partial \left[\frac{\langle \sigma, D\sigma \rangle}{\varepsilon + |\sigma|^2} \right] = \frac{\varepsilon \langle D\sigma, D\sigma \rangle}{(\varepsilon + |\sigma|^2)^2} - \frac{|\sigma|^2}{\varepsilon + |\sigma|^2}\, ic(L).$$

La formule de Jensen 3.4 appliquée à la fonction $V = \frac{1}{2}\log(\varepsilon + |\sigma|^2)$ donne alors, compte tenu que $V \geqslant \log \varepsilon^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^r dt \int_{B(t)} \frac{\varepsilon\langle D\sigma, D\sigma\rangle}{(\varepsilon + |\sigma|^2)^2} \wedge \alpha^{n-1} \\
&\qquad \leqslant \int_0^r dt \int_{B(t)} \frac{|\sigma|^2}{\varepsilon + |\sigma|^2}\, ic(L) \wedge \alpha^{n-1} + \mu_r(V) - \mu_0(V) - \int_{B(r)\smallsetminus B(0)} V\,\alpha^n \\
&\qquad \leqslant r \int_X \big[ic(L) \wedge \alpha^{n-1}\big]_+ + \mu_r(V) + \tau(r)\,\log \varepsilon^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

où $[ic(L) \wedge \alpha^{n-1}]_+$ désigne la partie positive de la mesure $c(L) \wedge \alpha^{n-1}$. Divisons cette inégalité par r et faisons tendre r vers $+\infty$. Comme $V \leqslant \log_+ |\sigma| + \frac{1}{2}\log(1+\varepsilon)$, il vient

$$\int_X \frac{\varepsilon\langle D\sigma, D\sigma\rangle}{(\varepsilon + |\sigma|^2)^2} \wedge \alpha^{n-1} \leqslant \limsup_{r\to+\infty} \ \frac{1}{r}\,\mu_r(\log_+ |\sigma|) + \int_X \big[ic(L) \wedge \alpha^{n-1}\big]_+ .$$

Quand ε tend vers 0, le terme $\frac{\varepsilon\langle D\sigma, D\sigma\rangle}{(\varepsilon+|\sigma|^2)^2}$ converge faiblement vers le courant d'intégration $2\pi[Z_\sigma]$ associé au diviseur des zéros de σ. On obtient donc la généralisation suivante de l'inégalité 8.3.

Proposition 8.9. – *Pour toute section holomorphe $\sigma \not\equiv 0$ de L, on a*

$$2\pi \int_X [Z_\sigma] \wedge \alpha^{n-1} \leqslant \delta_\varphi(\sigma) + \delta_\varphi(L)$$

où $\delta_\varphi(\sigma)$, $\delta_\varphi(L)$ désignent les « degrés » respectifs de σ et L :

$$\begin{aligned}
\delta_\varphi(\sigma) &= \limsup_{r\to+\infty} \ \frac{1}{r}\mu_r(\log_+ |\sigma|), \\
\delta_\varphi(L) &= \int_X \big[ic(L) \wedge \alpha^{n-1}\big]_+ .
\end{aligned}$$

Le théorème d'algébricité s'énonce maintenant comme suit.

Théorème 8.10. – *On désigne par $K_\varphi(X, L)$ le corps des fonctions méromorphes sur X de la forme σ_1/σ_2 avec $\sigma_j \in H^0(X, \mathcal{O}(L^m))$, $m \in \mathbb{N}$, $\delta_\varphi(\sigma_j) < +\infty$, $j = 1, 2$. Si le fibré L est de degré $\delta_\varphi(L)$ fini, alors :*

(a) $0 \leqslant \operatorname{deg\,tr} K_\varphi(X, L) \leqslant n = \dim X$;

(b) *Si $\operatorname{deg\,tr} K_\varphi(X, L) = n$, le corps $K_\varphi(X, L)$ est de type fini.*

Démonstration. Soient $F_1 = \sigma_1'/\sigma_1, \ldots, F_N = \sigma_N'/\sigma_N$ des éléments de $K_\varphi(X, L)$ avec $\sigma_j, \sigma_j' \in \mathcal{O}(L^{m_j})$, et $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$ un polynôme tel que $\deg_{X_j} P \leqslant k_j$. Posons

$$\sigma = P\Big(\frac{\sigma_1'}{\sigma_1}, \ldots, \frac{\sigma_N'}{\sigma_N}\Big)\sigma_1^{k_1} \cdots \sigma_N^{k_N} \in H^0(X, \mathcal{O}(L^m)), \qquad m = \sum k_j m_j.$$

L'inégalité (8.6) se généralise alors sous la forme suivante :

$$\mathrm{ord}_a(\sigma) \leqslant C(a) \sum_{1\leqslant j\leqslant N} k_j \Big[\max(\delta_\varphi(\sigma_j), \delta_\varphi(\sigma'_j)) + m_j\delta_\varphi(L)\Big], \tag{8.11}$$

et le reste de la démonstration est identique à celle de 8.5. □

B. Caractérisation géométrique des variétés algébriques affines.

9. Énoncé du critère d'algébricité.

L'objet des paragraphes qui suivent est de montrer que les variétés algébriques affines sont caractérisées parmi les espaces de Stein par des conditions géométriques simples, à savoir la finitude du volume de Monge-Ampère et une minoration convenable de la courbure de Ricci.

Rappelons qu'une variété algébrique affine est par définition une sous-variété algébrique fermée d'un espace $\mathbb{C}^N$. Dans le cas d'un espace X à singularités isolées, nous obtenons la caractérisation nécessaire et suffisante ci-dessous.

Théorème 9.1. – *Soit X un espace analytique complexe de dimension n, ayant au plus un nombre fini de points singuliers. Alors X est analytiquement isomorphe à une variété algébrique affine X si et seulement si X possède une fonction d'exhaustion φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ strictement psh ayant les propriétés* (a), (b), (c) *ci-dessous.*

(a) $\mathrm{Vol}(X) = \displaystyle\int_X (dd^c\varphi)^n < +\infty$;

(b) *La courbure de Ricci de la métrique $\beta = dd^c(e^\varphi)$ admet une minoration de la forme*

$$\mathrm{Ricci}(\beta) \geqslant -\frac{1}{2} dd^c\psi,$$

avec $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(X_{\mathrm{reg}},\mathbb{R})$ et $\psi \leqslant A\varphi + B$, où A, B sont des constantes $\geqslant 0$;

(c) *φ n'a qu'un nombre fini de point critiques sur X_{reg}.*

Si ces conditions sont vérifiées, l'anneau $R_\varphi(X) = K_\varphi(X) \cap \mathcal{O}(X)$ (cf. définition 8.2) *est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini et de degré de transcendance n. La structure algébrique X_{alg} est alors définie comme l'unique structure algébrique sur X dont l'anneau des fonctions régulières est $R_\varphi(X)$.*

L'extension de cette caractérisation au cas des espaces analytiques ayant des singularités quelconques présente des difficultés qui seront examinées au §14.

Le rôle des différentes hypothèses du théorème 9.1 se partage grosso modo comme suit. L'existence d'une fonction d'exhaustion φ strictement psh garantit que X est une variété de Stein, d'après la solution du problème de Levi donnée par H. Grauert [Gr].

Sous l'hypothèse (a), le théorème 8.5 implique d'autre part que le corps des fonctions φ-rationnelles est de degré de transcendance fini. L'hypothèse (b), quant à elle, assure l'existence d'un nombre suffisant de fonctions φ-polynomiales, grâce aux estimations L^2 de Hörmander-Nakano-Bombieri-Skoda pour l'opérateur $\overline{\partial}$. Signalons ici qu'on ne peut remplacer la condition (b) par une condition portant sur la courbure de la métrique $dd^c\varphi$ (cf. remarque 10.2). On obtient par contre une condition équivalente en remplaçant β par une métrique γ quelconque telle que

$$\exp(-A_1\varphi - B_1) \leqslant \gamma \leqslant \exp(A_2\varphi + B_2,$$

par exemple la métrique $\gamma = dd^c \log(1 + e^{\varphi})$ ou $\gamma = dd^c(\varphi^2)$.

Enfin l'hypothèse (c) entraîne d'après la théorie de Morse que X a même type d'homotopie qu'un complexe cellulaire fini, et donc que la cohomologie de X est de type fini. Nous ne savons pas en fait si l'hypothèse (c) est réellement indispensable, dès lors qu'on suppose X irréductible. Sans l'hypothèse (c), on peut déjà montrer que X est réunion d'une suite croissante de variétés X algébriques quasi-affines (= ouverts de Zariski de variétés affines), cf. proposition 13.1. De ce résultat découle l'amélioration suivante du théorème 9.1.

Théorème 9.1′. — *Le théorème* 9.1 *reste vrai si les hypothèses* (a,b,c) *sont affaiblies comme suit :*

(a') = (a) : $\mathrm{Vol}(X) = \int_X (dd^c\varphi)^n < +\infty$;

(b') $\mathrm{Ricci}(\beta) \geqslant -\frac{1}{2}dd^c\psi$, *où* $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbb{R}) \cap Cc^0(X_{\mathrm{reg}}, \mathbb{R})$ *admet une estimation de la forme*

$$\int_X \exp(c\psi - A\varphi)\,\beta^n < +\infty, \qquad c > 0, \quad A > 0\ ;$$

(c') *les espaces de cohomologie de degré pair* $H^{2q}(X_{\mathrm{reg}}; \mathbb{R})$ *sont de dimension finie.*

Les hypothèses (a'), (b') entraînent encore que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ avec X_k quasi-affine, $X_k \subset X_{k+1}$, et l'hypothèse (c') implique que la suite X_k est nécessairement stationnaire ; par conséquent, X est algébrique. Observons que l'hypothèse (c') est toujours vérifiée si $n = 1$; lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, elle équivaut à supposer seulement $\dim H^2(X; \mathbb{R}) < +\infty$, car les groupes $H^q(X; \mathbb{R})$ sont toujours nuls pour $q > n$ lorsque X est de Stein.

La vraisemblance des théorèmes 9.1, 9.1' nous a été suggérée en partie par les travaux de W. Stoll et D. Burns sur les variétés paraboliques. Rappelons ici le résultat fondamental de W. Stoll (1980), qui caractérise les variétés strictement paraboliques de rayon quelconque.

Théorème 9.2 (cf. [St2] et [Bu]). **—** *Soit* M *une variété analytique complexe connexe de dimension* n. *On suppose qu'il existe un réel* $R \in \,]0, +\infty]$ *et une fonction* $\tau : M \to \,]0, R^2[$ *strictement psh exhaustive de classe* $\mathcal{C}^\infty$, *telle que* $\log\tau$ *soit psh et vérifie* $(dd^c\tau)^n \equiv 0$

sur $M \smallsetminus \tau^{-1}(0)$. Alors il existe une application biholomorphe $F : B(R) \to M$ de la boule de rayon R dans M telle que $F^*\tau(z) = |z|^2$.

Si on lève l'hypothèse de stricte plurisousharmonicité de τ, on voit facilement que toute variété algébrique affine M vérifie encore la condition du théorème 9.2 (avec $R = +\infty$) : il suffit de choisir $\tau(z) = \log|\pi(z)|^2$ où $\pi : M \to \mathbb{C}^n$ est un morphisme propre fini. Cette remarque a conduit D. Burns à poser le problème de la caractérisation de telles variétés en termes de fonctions d'exhaustion ayant des propriétés particulières. Signalons en particulier les problèmes ouverts suivants.

Problème 9.3. — *On considère une variété de Stein M de dimension n, ayant une fonction d'exhaustion psh $\tau : M \to [0, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\log\tau$ soit psh et vérifie $(dd^c \log\tau)^n \equiv 0$ sur $M \smallsetminus \tau^{-1}(0)$. La variété M est-elle algébrique affine ?*

Problème 9.4. — *Caractériser les variétés M admettant une fonction d'exhaustion $\tau : M \to [0, +\infty[$ strictement psh telle que $\log\tau$ soit psh et vérifie $(dd^c \log\tau) \equiv 0$ en dehors d'un compact.*

D. Burns a montré qu'il existe des variétés algébriques affines ne vérifiant pas la condition 9.4 : tel est le cas de $M = (\mathbb{C}^*)^n$, $n \geqslant 2$. Néanmoins, la condition 9.4 est vérifiée par une variété affine « générique », à savoir une variété plongée dans $\mathbb{C}^N$ dont la complétion projective est lisse et transverse à l'hyperplan à l'infini.

Peu après avoir démontré le théorème 9.1, nous avons appris d'autre part que N. Mok avait obtenu antérieurement une condition géométrique suffisante (non nécessaire en général) pour qu'une variété soit algébrique affine.

Théorème 9.5 ([Mok 1,2,3])**. —** *Soit X une variété kahlérienne complète de dimension n, de courbure bisectionnelle positive, telle que*

(a) *volume*$(B(x_0, r)) \geqslant c\, r^{2n}$,

(b) $0 <$ *courbure scalaire* $\leqslant C/d(x_0, x)^2$,

où $B(x_0, r)$ et $d(x_0, x)$ désignent respectivement les boules et la distance géodésiques, et $c, C > 0$. Alors X est biholomorphiquement isomorphe à une variété algébrique affine.

N. Mok a déduit de ce théorème que toute surface X de courbure riemannienne positive vérifiant les hypothèses 9.5 (a), (b) est en fait isomorphe à $\mathbb{C}^2$. Le résultat analogue en dimension $n > 2$ demeure une conjecture. Le théorème 9.5 repose essentiellement sur un travail [MSY] de Mok, Siu et Yau portant sur la résolution de l'équation de Poincaré-Lelong sur les variétés kählériennes à courbure bisectionnelle > 0. Ce résultat mis à part, la démonstration de N. Mok suit dans ses grandes lignes une démarche sensiblement parallèle à la nôtre.

L'hypothèse que la courbure bisectionnelle soit positive apparaît cependant assez restrictive, et ne permet pas de couvrir en général le cas des variétés algébriques affines (la courbure euclidienne d'une telle variété est toujours négative, cf. §10). Citons cependant quelques résultats connus dans le cas des courbures non nécessairement positives. Siu et

Yau [SY] ont démontré qu'une variété kählérienne complète X simplement connexe dont la courbure sectionnelle vérifie

$$-\frac{C}{d(x_0,x)^{2+\varepsilon}} < \text{courbure sectionnelle} < 0$$

est biholomorphe à $\mathbb{C}^n$. Il en est de même si la courbure vérifie

$$\text{courbure sectionnelle} \leqslant \frac{C_\varepsilon}{d(x_0,x)^{2+\varepsilon}}$$

avec une constante C_ε assez petite (cf. [MSY]).

10. Nécessité des conditions sur le volume et la courbure.

Nous allons démontrer ici que les conditions (a), (b), (c) du théorème 9.1 sont vérifiées pour toute sous-variété algébrique irréductible $X \subset \mathbb{C}^N$ de dimension n.

On choisit dans ce cas $\varphi(z) = \log(1+|z|^2)$, de sorte que la métrique $\alpha = dd^c\varphi$ coïncide avec la métrique de Fubini-Study de l'espace projectif $\mathbb{P}^N$. Comme l'adhérence $\overline{X}$ de X dans $\mathbb{P}^N$ est une sous-variété algébrique compacte, on obtient

$$\int_X (dd^c\varphi)^n = \int_{\overline{X}} \alpha^n < +\infty,$$

par conséquent la condition (a) est vérifiée.

D'après le théorème de Bertini-Sard, l'ensemble des valeurs critiques de φ sur X_{reg} est fini. Par suite l'ensemble critique de φ est compact. Quitte à perturber légèrement φ dans $\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ au voisinage de ce compact ([Mil], cor. 6.8), on construit une fonction φ' dont les points critiques sont non dégénérés. Les points critiques de φ' sont alors en nombre fini [hypothèse (c)].

Il nous reste maintenant à montrer que X satisfait la condition de courbure 9.1 (b) relativement à la métrique

$$\beta = dd^c(e^\varphi) = dd^c|z|^2 = 2i\sum_{j=1}^N dz_j \wedge d\overline{z}_j\,,$$

ce que nous allons vérifier par un calcul explicite de $\mathrm{Ricci}(\beta_{|X})$ et de ψ.

Soit $(P_1,\ldots,P_m)$ un système de polynômes générateurs pour l'idéal $I(X)$ de la sous-variété X dans $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_N]$, et soit $s = \operatorname{codim} X = N-n$. Pour tout couple de multi-indices

$$K = \{k_1 < \ldots < k_s\} \subset \{1,\ldots,m\}, \qquad L = \{\ell_1 < \ldots < \ell_s\} \subset \{1,\ldots,N\}$$

de longueur s, on considère le jacobien partiel

$$J_{K,L}(z) = \det\Big(\partial P_{k_i}/\partial z_{\ell_j}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant s}\,,$$

et on pose

$$\psi(z) = \log\Bigg(\sum_{|K|=|L|=s} |J_{K,L}|^2\Bigg).$$

Les fonctions $J_{K,L}$ sont polynomiales, en particulier il existe des constantes $A, B \geqslant 0$ telles que $\psi \leqslant A\varphi + B$. La proposition suivante montre que φ, ψ satisfont de plus l'inégalité de courbure 9.1 (b).

Proposition 10.1. – *On note $U_K = U_{k_1,\ldots,k_s}$ l'ouvert de X sur lequel les différentielles $dP_{k_1}, \ldots, dP_{k_s}$ sont linéairement indépendantes. Alors :*

(a) $\mathrm{Ricci}(\beta_{|X}) = -\dfrac{1}{2}\, dd^c \log\Bigg(\displaystyle\sum_{|L|=s} |J_{K,L}|^2\Bigg)$ *sur* U_K ,

(a) $\mathrm{Ricci}(\beta_{|X}) \geqslant -\dfrac{1}{2}\, dd^c \log\Bigg(\displaystyle\sum_{|K|=|L|=s} |J_{K,L}|^2\Bigg)$ *sur* X_{reg} .

Démonstration de (a). Soit $x \subset U_K$. Supposons les coordonnées de $\mathbb{C}^N$ rangées de sorte que $(z_1, \ldots, z_n)$ soit un système de coordonnées locales de X au point x. La courbure de Ricci de X est dans le cas kählérien l'opposée de la courbure du fibré canonique $\Lambda^n T^*X$. On a donc au voisinage de x la relation

$$\mathrm{Ricci}(\beta_{|X}) = dd^c \log g^2,$$

où g est la norme relativement à β de la $(n,0)$-forme holomorphe $dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$; g est donnée par

$$i\, dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge i\, dz_n \wedge d\overline{z}_{n\,|X} = g^2\, \frac{1}{n!}\, \beta^n_{|X}.$$

Soient $L_0 = \{n+1, \ldots, N\}$, L un multi-indice quelconque de longueur $s = N - n$, et $\complement L$ son complémentaire dans $\{1, \ldots, N\}$. Si on pose

$$dP_K = dP_{k_1} \wedge \ldots \wedge dP_{k_s},$$

il vient par définition de $J_{K,L}$:

$$\begin{aligned}
dP_K \wedge dz_{\complement L} &= \pm J_{K,L}\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_N,\\
i^{n^2+s^2} dP_K \wedge d\overline{P}_K \wedge dz_{\complement L} \wedge d\overline{z}_{\complement L} &= |J_{K,L}|^2 i\, dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge i\, dz_N \wedge d\overline{z}_N\\
i^{s^2} dP_K \wedge d\overline{P}_K \wedge \frac{1}{n!}\, \beta^n &= 2^n \sum_{|L|=s} |J_{K,L}|^2\, i\, dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge i\, dz_N \wedge d\overline{z}_N\\
&= 2^n |J_{K,L_0}|^{-2} \sum_{|L|=s} |J_{K,L}|^2\, i^{s^2}\, dP_K \wedge d\overline{P}_K \wedge i\, dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge i\, dz_n \wedge d\overline{z}_n.
\end{aligned}$$

En « simplifiant » par $dP_K \wedge d\overline{P}_K$, on trouve donc

$$g^2 = 2^{-n} \big|J_{K,L_0}\big|^2 \Bigg(\sum_{|L|=s} |J_{K,L}|^2\Bigg)^{-1}$$

et comme J_{K,L_0} est une fonction holomorphe inversible en x, la formula (a) s'ensuit.

Démonstration de (b). Le résultat (a) montre que la fonction

$$\log\left(\sum_{|L|=s}|J_{K,L}|^2 \Big/ \sum_{|L|=s}|J_{K_0,L}|^2\right)$$

est pluriharmonique sur l'ouvert $U_K \cap U_{K_0}$. Elle est de plus localement majorée, donc psh, sur U_{K_0}. Il en résulte que la fonction

$$\log\left(\sum_{K,L}|J_{K,L}|^2 \Big/ \sum_{L}|J_{K_0,L}|^2\right)$$

est psh sur U_{K_0}, et sur cet ouvert on a donc :

$$dd^c\psi \geqslant dd^c \log \sum_L |J_{K_0,L}|^2 = -2\ \mathrm{Ricci}(\beta_{|X}). \qquad \square$$

Remarque 10.2. – Lorsque X est une sous-variété analytique fermée de $\mathbb{C}^N$ et que $\varphi(z) = \log(1+|z|^2)$, la condition 9.1 (a) de finitude du volume est à elle seule une condition suffisante d'algébricité de X (théorème de W. Stoll, cf. corollaire 8.6). Nous allons voir néanmoins par un exemple qu'on ne peut en général se dispenser de la condition de courbure 9.1 (b), même si 9.1' (c') est satisfaite.

Choisissons $X = \mathbb{C} \smallsetminus E$ où $E = \{z_j\ ;\ j \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fermé dénombrable infini, et posons

$$\varphi(z) = \log(1+|z|^2) - \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_j \log \frac{|z-z_j|}{1+|z_j|}$$

où $\sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_j = 1$ est une série à termes > 0 et à convergence assez rapide pour que φ soit dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C} \smallsetminus E)$. Comme

$$\log \frac{|z-z_j|}{1+|z_j|} \leqslant \log(1+|z|),$$

il vient

$$\varphi(z) \geqslant \log \frac{1+|z|^2}{1+|z|}\ ;$$

de plus $\lim_{z\to z_j} \varphi(z) = +\infty$ pour tout $z_j \in E$. La fonction φ est donc exhaustive sur X. Par ailleurs, $dd^c\varphi = dd^c \log(1+|z|^2)$, donc $\int_X dd^c\varphi = 4\pi < +\infty$. Cependant X n'est pas algébrique. $\square$

Cet exemple montre incidemment qu'on ne peut pas non plus remplacer la condition 9.1 (b) par une condition portant sur la courbure de la métrique $dd^c\varphi$.

Il est facile de voir d'autre part que les algèbres $A_\varphi(X)$ et $R_\varphi(X) = K_\varphi(X) \cap \mathcal{O}(X)$ coïncident avec l'algèbre $\mathcal{A}_E$ des fractions φ-rationnelles de $\mathbb{C}[z]$ dont les pôles appartiennent à E. En effet, tout élément $f \in \mathcal{A}_E$ admet visiblement une majoration

$\log|f| \leqslant C_1\varphi + C_2$, donc $\mathcal{A}_E \subset A_\varphi(X) \subset R_\varphi(X)$; inversement, tout élément de $K_\varphi(X)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(z)$ par le théorème 8.5, donc

$$R_\varphi(X) \subset \mathbb{C}(z) \cap \mathcal{O}(X) = \mathcal{A}_E.$$

Il est clair que l'algèbre $\mathcal{A}_E$ n'est pas de type fini.

11. Existence d'un plongement sur un ouvert d'une variété algébrique.

Les paragraphes 11-14 qui suivent sont consacrés à la démonstration de la suffisance du critère d'algébricité 9.1'. Nous supposerons ici que X est une variété lisse et connexe, et que les fonctions données (φ, ψ) vérifient les conditions 9.1'(a',b'). On fait d'autre part l'hypothèse supplémentaire non restrictive $\varphi \geqslant 0$. Nous posons comme précédemment $\alpha = dd^c\varphi \geqslant 0$, $\beta = dd^c(e^\varphi)$; les mesures μ_r sont définies comme au §3.

Définition 11.1. – *Soit $p \in \,]0, +\infty]$. On note*

(a) *$L^p_\varphi(X)$ l'espace vectoriel des applications mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ telles qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :*

$$\int_X |f|^p e^{-C\varphi}\,\beta^n < +\infty, \qquad \textit{si } 0 < p < +\infty\ ,$$

$$|f| \leqslant e^{C(1+\varphi)} \quad \textit{presque partout}, \qquad \textit{si } p = +\infty\ ;$$

(b) $L^0_\varphi(X) = \bigcup\limits_{p>0} L^p_\varphi(X)$;

(c) $A^p_\varphi(X) = L^p_\varphi(X) \cap \mathcal{O}(X)$, *si $p \in [0, +\infty]$* .

L'intérêt de cette définition apparaît dans les deux résultats techniques ci-dessous, qui seront utilisés à de nombreuses reprises dans la suite.

Lemme 11.2. – *On a les propriétés suivantes* :

(a) $1 \in A^p_\varphi(X)$ *pour tout $p > 0$* ;

(b) $L^p_\varphi(X) \subset L^q_\varphi(X)$ *et* $A^p_\varphi(X) \subset A^q_\varphi(X)$ *pour tous $p \geqslant q > 0$* ;

(c) $L^0_\varphi(X)$ *est une $\mathbb{C}$-algèbre* ;

(d) $A^0_\varphi(X)$ *est une sous-algèbre intégralement close de* $L^0_\varphi(X)$.

Lemme 11.3. – *On a l'inclusion $A^0_\varphi(X) \subset A_\varphi(X)$. Étant donné $f \in A^0_\varphi(X)$ telle que*

$$\int_X |f|^p \exp(-C\varphi)\,\beta^n < +\infty,$$

alors :

(a) $\delta_\varphi(f) \leqslant \dfrac{C-n}{p}\,\mathrm{Vol}(X)$;

(b) $\displaystyle\int_X |df|_\beta^p \exp\Big[\Big(\frac{p}{2} - C\Big)\varphi\Big]\,\beta^n < +\infty \qquad si\ p \in \,]0,2]$,

où la norme $|df|_\beta$ *est calculée relativement à la métrique* β*.*

Démonstration de 11.2. La proposition 3.10 entraîne successivement

$$v(r) := \int_{\{\varphi<r\}} \beta^n = e^{nr} \int_{\{\varphi<r\}} \alpha^n = e^{nr}\ \mathrm{Vol}(X),$$
$$\int_X e^{-(n+1)\varphi}\,\beta^n = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)r}\,dv(r) = (n+1)\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)r}\,v(r)\,dr < +\infty,$$

ce qui démontre (a). La propriété (b) résulte alors de l'inégalité de Hölder. Cette même inégalité implique

$$\int_X \big|fg\big|^{\frac{pq}{p+q}} e^{-C\varphi}\,\beta^n \leqslant \Big[\int_X |f|^p\,e^{-C\varphi}\,\beta^n\Big]^{\frac{q}{p+q}} \Big[\int_X |g|^q\,e^{-C\varphi}\,\beta^n\Big]^{\frac{p}{p+q}}$$

pour tous $p, q > 0$. On obtient donc 1'inclusion

$$L^p_\varphi(X)\cdot L^q_\varphi(X) \subset L_\varphi^{\frac{pq}{p+q}}(X), \tag{11.4}$$

et la propriété (c) s'ensuit. Vérifions maintenant l'affirmation (d). Soit f une fonction méromorphe sur X vérifiant une équation entière sur $A^0_\varphi(X)$ de la forme

$$f^d + a_1 f^{d-1} + \cdots + a_{d-1} f + a_d = 0, \qquad a_j \in A^0_\varphi(X).$$

De cette équation, on déduit la majoration

$$|f| \leqslant 2 \max_{1\leqslant j\leqslant d} |a_j|^{1/j},$$

sinon l'égalité

$$-1 = a_1 f^{-1} + \cdots + a_d f^{-d}$$

conduirait en valeur absolue à l'inégalité absurde

$$1 \leqslant 2^{-1} + \cdots + 2^{-d}.$$

Par conséquent, comme X est lisse, f se prolonge en une fonction holomorphe sur X, et il est clair que $f \in A^0_\varphi(X)$. □

Démonstration de 11.3.

(a) On a $\beta^n \geqslant e^{n\varphi}(dd^c\varphi)^{n-1}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi$, par conséquent (proposition 3.8) l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(n-C)r}\,\mu_r(|f|^p)\,dr = \int_X |f|^p e^{(n-C)\varphi}\,(dd^c\varphi)^{n-1}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi \leqslant \int_X |f|^p e^{-C\varphi}\,\beta^n$$

est finie. Comme l'application $r \mapsto \mu_r(|f|^p)$ est croissante, on en déduit

$$\mu_r(|f|^p) \leqslant \exp\big((C-n)(r+1)\big) \int_r^{r+1} e^{(n-C)t}\, \mu_t(|f|^p)\, dt \leqslant C_1 e^{(C-n)r}$$

avec une constante $C_1 \geqslant 0$. D'après l'inégalité de convexité de Jensen et l'inégalité $\|\mu_r\| \leqslant \mathrm{Vol}(X)$, il vient

$$\frac{\mu_r\big(\log(1+|f|^p)\big)}{\|\mu\|_r} \leqslant \log\left[\frac{\mu_r\big(1+|f|^p\big)}{\|\mu\|_r}\right] \leqslant (C-n)r + C_2\,,$$

$$\delta_\varphi(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\, \mu_r(\log_+|f|) \leqslant \frac{C-n}{p}\, \mathrm{Vol}(X).$$

(b) Pour majorer $|dF|_\beta$, on observe que

$$dd^c(|F|^p)\wedge\beta^{n-1} = \frac{p^2}{2n}\, |F|^{p-2}|dF|_\beta^2\, \beta^n.$$

Grâce au théorème de Stokes, cette égalité entraîne pour tout $r > 0$:

$$\int_{B(r)} |F|^{p-2}|dF|_\beta^2\Big(1-\frac{\varphi}{r}\Big)^2 e^{(1-C)\varphi}\,\beta^n \leqslant \frac{2n}{p^2}\int_{B(r)} |F|^p\, dd^c\Big[\Big(1-\frac{\varphi}{r}\Big)^2 e^{(1-C)\varphi}\Big]\wedge\beta^{n-1}.$$

Un calcul aisé donne d'autre part sur $B(r) = \{\varphi < r\}$ la majoration uniforme en r :

$$dd^c\Big[\Big(1-\frac{\varphi}{r}\Big)^2 e^{(1-C)\varphi}\Big] \leqslant C_3\Big(1+\frac{1}{r}\Big)^2 e^{-C\varphi}\beta, \qquad r > 0.$$

Après passage à la limite quand $r \to +\infty$, on obtient donc

$$\int_X |F|^{p-2}|dF|_\beta^2\, e^{(1-C)\varphi}\,\beta^n \leqslant C_3\int_X |F|^p e^{-C\varphi}\beta^n.$$

La propriété 11.3 (b) résulte maintenant de l'inégalité de Hölder appliquée à la mesure $|F|^p e^{-C\varphi}\beta^n$, au couple de fonctions $(|F|^{-p}|dF|_\beta^p \exp(\frac{p}{2}\varphi)\ ;\ 1)$ et aux exposants conjugués $(\frac{2}{p}, \frac{2}{2-p})$. □

L'existence de fonctions holomorphes non constantes dans $L^p_\varphi(X)$ va résulter des estimations classiques de L. Hörmander [Hö1] pour l'opérateur $\overline{\partial}$.

Proposition 11.5. – *Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(a) *Soit $\tau \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ une fonction telle que*

$$i\,\partial\overline{\partial}\tau + \mathrm{Ricci}(\beta) \geqslant \lambda\beta$$

où λ est une fonction continue > 0 sur X. Soit u une $(0,1)$-forme à coefficients L^2_{loc} sur X telle que $\overline{\partial}u = 0$ et

$$\int_X \lambda^{-1}|u|^2 e^{-\tau}\,\beta^n < +\infty.$$

Alors, il existe une fonction $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ *telle que* $\overline{\partial} g = u$ *et*

$$\int_X |g|^2 e^{-\tau}\,\beta^n \leqslant \int_X \lambda^{-1}|u|^2 e^{-\tau}\,\beta^n < +\infty.$$

(b) *Soient* ψ, c, A *les données de* 9.1'(b'). *Si* ρ *est psh sur* X *et si* u *vérifie* $\overline{\partial} u = 0$ *et*

$$\int_X |u|^2\, e^{-\rho-\psi}\,\beta^n < +\infty,$$

alors il existe $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ *telle que* $\overline{\partial} g = u$ *et*

$$\int_X |g|^2 e^{-\rho-\psi-2\varphi}\,\beta^n \leqslant 4\int_X |u|^2 e^{-\rho-\psi}\,\beta^n.$$

(c) *Soit un ensemble fini* $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset X$ *et* ρ *une fonction psh sur* X *telle que* $e^{-\rho}$ *soit sommable au voisinage de* $x_1, x_2, \ldots, x_m$. *Alors il existe une fonction holomorphe* f *ayant un jet d'ordre* s *donné en chaque point* x_j *et telle que*

$$\int_X |f|^2 e^{-\rho-\psi-C_1\varphi}\,\beta^n < +\infty, \qquad \text{où } C_1 \geqslant 0.$$

En particulier, si $\rho \equiv 0$, *on obtient* $f \in A^b_\varphi(X)$ *avec* $b = \frac{2c}{1+c}$ *et* c *comme dans* 9.1'(b').

(d) $A^b_\varphi(X)$ *est dense dans* $\mathcal{O}(X)$ *pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration.

(a) est classique, voir par exemple H. Skoda [Sk3].

(b) Appliquons (a) avec $\tau = \rho+\psi+2\log(1+e^\varphi)$. Comme $\varphi \geqslant 0$ on a $\tau \leqslant \rho+\psi+2\varphi+\log 4$ et l'hypothèse 9.1'(b') entraîne

$$i\,\partial\overline{\partial}\tau + \mathrm{Ricci}(\beta) \geqslant \frac{e^\varphi\, dd^c\varphi}{1+e^\varphi} + \frac{e^\varphi\, d\varphi\wedge d^c\varphi}{(1+e^\varphi)^2} \geqslant \lambda\beta$$

avec $\lambda = (1+e^\varphi)^{-2}$. L'estimation (b) en résulte.

(c) est conséquence de (b) grâce à un raisonnement classique dû à Bombieri et Skoda [Sk1]. Soient $U_1, \ldots, U_m$ des voisinages ouverts deux à deux disjoints de $x_1, \ldots, x_m$ sur lesquels $e^{-\rho}$ est localement sommable. On suppose U_j muni d'un système de coordonnées locales $z^{(j)} = (z^j_1, z^j_2, \ldots, z^j_n)$ centré en x_j et on pose

$$\rho_1 = \rho + (n+s)\left[\sum_{j=1}^m \chi_j \log|z^{(j)}|^2 + C_j\varphi\right]$$

où χ_j est une fonction $\geqslant 0$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U_j, égale à 1 au voisinage de x_j, et C_j une constante $\geqslant 0$ assez grande pour que ρ_1 soit psh sur X. La constante $n+s$ est choisie ici de sorte que le jet d'ordre s d'une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$, localement sommable pour la mesure $e^{-\rho_1}\,\beta^n$, soit nécessairement nul aux points x_j. Soit maintenant $P_j(z^{(j)})$ un polynôme de degré $\leqslant s$ ayant le jet imposé en x_j. On pose

$$h = \sum_{j=1}^{m} \chi_j\, P_j(z^{(j)}).$$

La $(0,1)$-forme

$$u := \overline{\partial} h = \sum_{j=1}^{m} \overline{\partial}\chi_j\ P_j(z^{(j)}).$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle au voisinage de $x_1, \ldots, x_m$, et par construction

$$\int_X |u|^2 e^{-\rho_1-\psi}\,\beta^n < +\infty\ ;$$

on a utilisé ici le fait que ψ soit localement bornée. D'après (b), il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que $\overline{\partial} g = u$ et

$$\int_X |g|^2 e^{-\rho_1-\psi-2\varphi}\,\beta^n < +\infty\ .$$

La fonction $f = h - g$ répond alors à la question. Si $\rho \equiv 0$, on peut écrire

$$|f| = \Big[|f| \exp\Big(-\frac{1}{2}\psi\Big)\Big]\ \exp\Big(\frac{1}{2}\psi\Big)$$

où $|f|\exp(-\frac{1}{2}\psi) \in L^2_\varphi(X)$ et $\exp(\frac{1}{2}\psi) \in L^{2c}_\varphi(X)$. Il s'ensuit grâce à (11.4) que $f \in L^b_\varphi(X)$.

(d) se démontre à partir de (b) exactement comme le lemme 4.3.1 de [Hö2]. □

On utilise maintenant la proposition 11.5 pour construire de nombreuses fonctions holomorphes sur X, et obtenir ainsi un plongement partiel de X dans $\mathbb{C}^N$. Soit $x_0 \in X$ un point fixé. D'après 11.5 (c) appliqué avec $\rho \equiv 0$, il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_n \in A^b_\varphi(X)$ telles que

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_n(x_0) \neq 0.$$

En particulier, $f_1, \ldots, f_n$ sont algébriquement indépendantes dans $A_\varphi(X)$. Le théorème 8.5 (b) s'applique donc, ce qui donne :

Proposition 11.6. – *Le corps $K_\varphi(X)$ des fonctions φ-rationnelles est une extension de type fini de $\mathbb{C}$, de degré de transcendance n.* □

Comme nous allons le voir, il est facile de déduire des résultats précédents l'existence d'un morphisme $F : X \to M$ de X dans une variété algébrique M de dimension n, qui est, en dehors d'une hypersurface algébrique $S \subset X$, un isomorphisme de $X \smallsetminus S$ sur un ouvert de M. La principale difficulté qui restera à surmonter sera de prouver que F est quasi-surjectif, i.e. que $F(X \smallsetminus S)$ est un ouvert de Zariski de M.

Proposition 11.7. – *Les propriétés d'existence suivantes sont satisfaites.*

(a) *Il existe une fonction* $f_{n+1} \in A^0_\varphi(X)$ *telle que*

$$f_{n+1}(x_0) = 1 \quad et \quad \int_X |f_{n+1}|^2 \, |df_1 \wedge \ldots \wedge df_n|_\beta^{-2} \, \exp(-2\psi - C\varphi) \, \beta^n < +\infty.$$

En particulier $\{x \in X\,;\, df_1 \wedge \ldots \wedge df_n(x) = 0\} \subset f_{n+1}^{-1}(0)$.

(b) *Il existe des fonctions* $f_{n+2}, \ldots, f_N \in A^0_\varphi(X)$ *et une sous-variété algébrique irréductible* $M \subset \mathbb{C}^N$ *de dimension* n *telles que le morphisme* $F = (f_1, \ldots, f_N)$ *envoie* X *dans* M *et soit un isomorphisme analytique de* $X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0)$ *sur un ouvert lisse de* M.

Démonstration.

(a) Il suffit d'appliquer 11.5 (c) à la fonction psh

$$\rho = \psi + \log |df_1 \wedge \ldots \wedge df_n|^2.$$

Si Z est le diviseur des zéros de la n-forme holomorphe $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ considérée comme section de $\bigwedge^n T^*X$, on a bien en effet d'après l'hypothèse 9.1'(b') :

$$dd^c\rho = dd^c\psi + 2\,\mathrm{Ricci}(\beta) + 4\pi\,[Z] \geqslant 0,$$

et ρ est continue au voisinage de x_0. Il existe donc $f_{n+1} \in \mathcal{O}(X)$ telle que $f_{n+1}(x_0) = 1$, vérifiant l'estimation L^2 annoncée. Cette estimation entraîne que f_{n+1} s'annule sur le support de Z, et d'après le lemme 11.3 (b) on a $|df_j| \in L^b_\varphi(X)$, d'où

$$|f_0| \leqslant \Big(|f_0|\,|df_1 \wedge \ldots \wedge df_n|^{-1}\,e^{-\psi}\Big)\,|df_1| \cdots |df_n|\,e^{\psi} \in L^0_\varphi(X).$$

(b) On construit d'abord par récurrence sur j des fonctions $f_1, \ldots, f_{N_j} \in A^0_\varphi(X)$ avec $N_0 = n+1 < N_1 < N_2 \ldots$ (c'est fait pour $j = 0$).

D'après 11.6 l'image du morphisme

$$F_j = (f_1, \ldots, f_{N_j}) : X \to \mathbb{C}^{N_j}$$

est contenue dans une variété algébrique irréductible $M_j \subset \mathbb{C}^{N_j}$ de dimension n. Soit $\tilde{M}_j$ la normalisation de M_j. Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{M}_j & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{\tilde{N}_j} & \ni & (z_1, \ldots, z_{\tilde{N}_j}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \mapsto \\ M_j & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{N_j} & \ni & (z_1, \ldots, z_{N_j})\,. \end{array}$$

Comme la variété X est lisse (et donc normale), le morphisme $F_j : X \to M_j$ se relève en un morphisme

$$\tilde{F}_j = (f_1, \ldots, f_{\tilde{N}_j}) : X \to \tilde{M}_j.$$

Par construction, les fonctions coordonnées $z_{N_j+1}, \ldots, z_{\tilde{N}_j}$ (resp. $f_{N_j+1}, \ldots, f_{\tilde{N}_j}$) sont des entiers algébriques sur l'anneau $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_{N_j}]/I(M_j)$ (resp. sur $\mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{N_j}]$), donc $f_{N_j+1}, \ldots, f_{\tilde{N}_j} \in A^0_\varphi(X)$ d'après 11.2 (d). De plus, la restriction

$$\tilde{F}_j : X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0) \to M_j$$

est étale, car $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n \neq 0$ sur $X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0)$ d'après (a). Comme $\tilde{M}_j$ est localement irréductible, l'image $\tilde{F}_j(X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0))$ est nécessairement contenue dans l'ensemble des points lisses de $\tilde{M}_j$. Si $\tilde{F}_j$ est injective sur $X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0)$, la construction est terminée avec $F = \tilde{F}_j$, $M = \tilde{M}_j$, $N = \tilde{N}_j$.

Sinon, soient deux points $z_1 \neq z_2$ dans $X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0)$ tels que $\tilde{F}_j(z_1) = \tilde{F}_j(z_2)$. La proposition 11.5 (c) montre qu'il existe une fonction $g \in A^b_\varphi(X)$ telle que $g(z_1) \neq g(z_2)$. On pose $N_{j+1} = \tilde{N}_j + 1$, $f_{\tilde{N}_j+1} = g$. D'après 11.6, g est algébrique sur $\mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{\tilde{N}_j}]$, g vérifie donc une équation irréductible de la forme

$$\sum_{k=0}^{d} a_k(\tilde{F}_j)\, g^k = 0, \qquad a_k \in \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{\tilde{N}_j}], \quad a_d(\tilde{F}_j) \not\equiv 0. \tag{11.8}$$

Comme $\tilde{F}_j$ est étale au voisinage de z_1 et z_2, il existe des points w_1 voisin de z_1, w_2 voisin de z_2 tels que $\tilde{F}_j(w_1) = \tilde{F}_j(w_2) \notin a_d^{-1}(0)$ et $g(w_1) \neq g(w_2)$. Ceci entraîne que l'équation (11.8) est de degré $d \geqslant 2$. Comme $K_\varphi(X)$ est une extension de degré fini de $\mathbb{C}(f_1, \ldots, f_n)$ le procédé s'arrête nécessairement au bout d'un nombre fini d'étapes. $\square$

12. Quasi-surjectivité du plongement.

Nous reprenons les notations de la proposition 11.7. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer que l'image du morphisme $F : X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0) \to M$ est un ouvert de Zariski de M. Soit $Q \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ un polynôme non nul sur M, divisible par z_{n+1}, tel que l'hypersurface $Q^{-1}(0)$ contienne le lieu singulier M_{sing}. On pose

$$\check{M} = M \smallsetminus Q^{-1}(0), \qquad \check{X} = X \smallsetminus Q(F)^{-1}(0) \subset X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0),$$

de sorte que $\check{M}$ est lisse et que le morphisme de restriction

$$\check{F} : \check{X} \to \check{M}$$

est un isomorphisme de $\check{X}$ sur l'ouvert $\Omega = \check{F}(\check{X})$. La variété $\check{M}$ peut être (et sera) identifiée à une sous-variété algébrique affine de $\mathbb{C}^{N+1}$ via l'application $\check{M} \to \mathbb{C}^{N+1}$ définie par

$$(z_1, \ldots, z_N) \mapsto \big(z_1, \ldots, z_N, z_{N+1} = Q(z_1, \ldots, z_N)^{-1}\big) \ ;$$

le morphisme $\check{F} : \check{X} \to \check{M} \subset \mathbb{C}^{N+1}$ est alors donné par $\check{F} = (F, Q(F)^{-1})$. Un des points cruciaux du raisonnement est de montrer que le courant positif fermé $\check{F}_* dd^c\varphi$ se prolonge de l'ouvert $\Omega = \check{F}(\check{X})$ à la variété M toute entière. On a besoin pour cela d'estimations précises de la masse, qui sont fournies par le lemme suivant.

Lemme 12.1. – *Soit* $G = (g_1, \ldots, g_m) \in \left[A^0_\varphi(X)\right]^m$ *et* $\gamma = dd^c \log(1+|G|^2)$. *Alors pour tout entier* $k \geqslant 0$, *on a :*

(a) $\displaystyle\int_X (dd^c\varphi)^{n-k} \wedge \gamma^k < +\infty, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n,$

(b) $\displaystyle\int_{B(r)} d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge (dd^c\varphi)^{n-k-1} \wedge \gamma^k \leqslant Cr, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$

où C *est une constante* $\geqslant 0$.

Démonstration. Appliquons le théorème 2.2 (c) avec $\rho = \varphi - r$, $\Omega = \{\rho < 0\} = B(r)$ et $V_1 = \ldots = V_k = \log(1 + |G|^2) \geqslant 0$. Il vient

$$\int_{B(r)} \beta_k \wedge \gamma^k \leqslant C_3 \int_{B(r)} \big(\log(1 + |G|^2)\big)^k \, \beta_0$$

où, pour $a > 0$ et $k \geqslant 0$, il a été posé :

$$\beta_k = (r - \varphi)^{k+a} \, (dd^c\varphi)^{n-k} + (k + a)(r - \varphi)^{k-1+a} \, d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge (dd^c\varphi)^{n-k-1}.$$

On a :

$$\beta_0 = 2(r - \varphi)^a \, (dd^c\varphi)^n + \frac{1}{2(1 + a)} \, dd^c\beta_1.$$

Le théorème de Stokes entraîne donc pour tout $r > 0$:

$$\int_{B(r)} \beta_0 = 2 \int_{B(r)} (r - \varphi)^a \, (dd^c\varphi)^n \leqslant 2 \, r^a \; \mathrm{Vol}(X).$$

D'autre part, la fonction $t \mapsto (\log(e^k + t))^k$ est concave sur $[0, +\infty[$. On obtient donc pour tout $p > 0$ l'inégalité de convexité :

$$\frac{\int_{B(r)} \big(\log(e^k + |G|^p)\big)^k \, \beta_0}{\int_{B(r)} \beta_0} \leqslant \left\{ \log \left[e^k + \frac{\int_{B(r)} |G|^p \, \beta_0}{\int_{B(r)} \beta_0} \right] \right\}^k .$$

Comme $g_j \in A^0_\varphi(X)$ [cf. définition 11.1], il existe $p > 0$ assez petit et $C_4, C_5 \geqslant 0$ assez grands tels que

$$\int_{B(r)} |G|^p \, \beta_0 \leqslant \exp(C_4 r + C_5).$$

Les inégalités précédentes entraînent alors

$$\int_{B(r)} \beta_k \wedge \gamma^k \leqslant C_6 \int_{B(r)} \big(\log(e^k + |G|^p)\big)^k \, \beta_0 \leqslant C_7 \, r^{k+a}.$$

Compte-tenu de la définition de β_k, ceci implique le lemme 12.1 après substitution de $2r$ à r. □

Munissons $\mathbb{C}^{N+1}$ et $\check{M} \subset \mathbb{C}^{N+1}$ de la métrique de Fubini-Study $\omega = dd^c \log(1+|z|^2)$. On a alors le théorème de prolongement suivant, dont la démonstration est inspirée de H. Skoda [Sk5] et de H. El Mir [EM] ; voir aussi l'article de synthèse de N. Sibony [Sib].

Proposition 12.2. – *Soit T l'extension simple à $\check{M}$ du courant $\check{F}_* dd^c\varphi$, définie par*

$$T = \check{F}_* dd^c\varphi \quad \text{sur } \check{F}(\check{X}), \qquad T = 0 \quad \text{sur } \check{M} \smallsetminus \check{F}(\check{X}).$$

Alors T est un courant positif fermé sur $\check{M}$ de masse totale $\int_{\check{M}} T \wedge \omega^{n-1}$ finie.

Démonstration. Calculons d'abord la masse de T :

$$\int_{\check{M}} T \wedge \omega^{n-1} = \int_{\check{F}(\check{X})} \check{F}_* dd^c\varphi \wedge \omega^{n-1} = \int_{\check{X}} dd^c\varphi \wedge (\check{F}^*\omega)^{n-1}.$$

La $(1,1)$-forme $\check{F}^*\omega$ est donnée ici par

$$\begin{aligned}\check{F}^*\omega &= dd^c \log(1+|\check{F}|^2) = dd^c \log(1+|F|^2+|Q(F)|^{-2})\\ &= dd^c \log(1+|Q(F)|^2+|F|^2|Q(F)|^2).\end{aligned}$$

La finitude de la masse résulte alors du lemme 12.1 (a). Pour toute 1-forme réelle v de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans M et pour tous multi-indices $J, K \subset \{1, \ldots, N+1\}$ tels que $|J| = |K| = n-2$, on montre maintenant la nullité de l'intégrale

$$I = \int_{\check{M}} dv \wedge T \wedge dz_J \wedge d\overline{z}_K,$$

ce qui prouvera que $dT = 0$. Soit χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\chi(t) = 1$ si $t < 0$, $\chi(t) = 0$ si $t > 1$ et $0 \leqslant \chi' \leqslant 2$. Par définition de T, il vient

$$\begin{aligned}I &= \int_{\check{X}} \check{F}^*(dv) \wedge dd^c\varphi \wedge d\check{F}_J \wedge \overline{d\check{F}_K}\\ &= \lim_{r\to+\infty} \int_{\check{X}} \chi\Big(\frac{\varphi}{r}\Big)\, d(\check{F}^*v) \wedge dd^c\varphi \wedge d\check{F}_J \wedge \overline{d\check{F}_K}\ .\end{aligned}$$

La forme $\chi(\frac{\varphi}{r})\, d(\check{F}^*v)$ est à support dans $\check{F}^{-1}(\operatorname{Supp} v) \cap \overline{B(r)} \Subset \check{X}$. Une intégration par parties donne donc

$$I = \lim_{r\to+\infty} \pm \int_{\check{X}} \check{F}^*v \wedge \chi'\Big(\frac{\varphi}{r}\Big)\, \frac{d\varphi}{r} \wedge dd^c\varphi \wedge d\check{F}_J \wedge \overline{d\check{F}_K}\ .$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette dernière intégrale est majorée par $\frac{2}{r}\sqrt{I_1 I_2(r)}$ avec

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\check{X}} dd^c\varphi \wedge \check{F}^*\big(v \wedge \overline{v}^c \wedge dz_J \wedge d\overline{z}_J\big)\ ,\\ I_2(r) &= \int_{\check{F}^{-1}(\operatorname{Supp} v)\cap B(r)} d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge dd^c\varphi \wedge d\check{F}_K \wedge \overline{d\check{F}_K}\ .\end{aligned}$$

Comme v est à support compact dans $\check{M}$, il existe des constantes $C_1, C_2 \geqslant 0$ telles que

$$\begin{aligned}
&v \wedge \overline{v}^c \wedge dz_J \wedge d\overline{z}_J \leqslant C_1(\check{F}^*\omega)^{n-1} \ , \\
&d\check{F}_K \wedge \overline{d\check{F}_K} = \check{F}^*(dz_K \wedge d\overline{z}_K) \leqslant C_2(\check{F}^*\omega)^{n-2} \quad \text{sur } \check{F}^{-1}(\operatorname{Supp} v).
\end{aligned}$$

Le lemme 12.1 (a) et (b) entraîne alors

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant C_1 \int_X dd^c\varphi \wedge (\check{F}^*\omega)^{n-1} < +\infty \ , \\
I_2(r) &\leqslant C_2 \int_{B(r)} d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge dd^c\varphi \wedge (\check{F}^*\omega)^{n-2} \leqslant C\, C_2\, r \ ,
\end{aligned}$$

d'où

$$|I| \leqslant \lim_{r \to +\infty} \frac{2}{r} \sqrt{I_1 I_2(r)} = 0. \qquad \square$$

D'après le théorème 15.3 de l'appendice, il existe une fonction psh V et une $(1,0)$-forme u de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\check{M}$ ayant les propriétés suivantes, pour des constantes $C_1, C_2, C_3 \geqslant 0$ convenables.

Propriétés 12.3. – *On a les (in)égalités*

(a) $dd^cV \geqslant T$;

(b) $V(z) \leqslant C_1 \log(1 + |z|^2)$;

(c) $dd^cV - T = \overline{\partial} u$;

(d) $|u|_\omega \leqslant C_2(1 + |z|^2)^{C_3}$.

Considérons alors la fonction $\tau = V - \check{F}_*\varphi$ définie sur l'ouvert $\Omega = \check{F}(\check{X}) \subset \check{M}$. D'après 12.3 (a), τ est psh sur Ω, et de plus $\tau \leqslant V$. Comme $\check{F}_*\varphi$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $\partial\Omega$, τ tend vers $-\infty$ en tout point de $\partial\Omega$. Par conséquent, τ se prolonge en une fonction psh sur $\check{M}$, encore notée τ, telle que $\tau = -\infty$ sur $\check{M} \setminus \Omega$.

Corollaire 12.4. – *$\check{M} \setminus \Omega$ est une partie fermée pluripolaire de $\check{M}$.* $\square$

la prochaine étape est de montrer que $\check{M} \setminus \Omega$ est en fait une hypersurface algébrique de $\check{M}$. D'après 12.3 (c) et la définition de T on a :

$$2i\,\partial\overline{\partial}(V - \check{F}_*\varphi) = \overline{\partial} u \quad \text{sur } \Omega,$$

donc la $(1,0)$-forme h définie par

$$h = \partial(V - \check{F}_*\varphi) + \frac{u}{2i} = \partial\tau + \frac{u}{2i} \tag{12.5}$$

est holomorphe sur Ω ; comme u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\check{M}$, ceci démontre au passage que τ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. Nous allons maintenant prouver que h se prolonge en une 1-forme méromorphe rationnelle sur $\check{M}$. Ceci va résulter essentiellement des estimations

12.3 (b,d) et du théorème d'algébricité 8.5. Par construction de F et $\check{X}$, les formes $(df_1, \ldots, df_n)$ définissent un repère global de $T^*\check{X}$. Les formes $(dz_1, \ldots, dz_n)$ constituent donc aussi un repère de $T^*\check{M}$ au-dessus de l'ouvert $\Omega = \check{F}(\check{X})$, et on peut écrire

$$h = \sum_{j=1}^{n} h_j dz_j$$

avec des fonctions $h_j \in \mathcal{O}(\Omega)$. Le principe du raisonnement consiste à vérifier que les fonctions $h_j \circ \check{F}$ sont à croissance φ-polynomiale, à partir de la majoration de $\tau = V - \check{F}_*\varphi$ fournie par 12.3 (b). Le fait que nous ne disposions pas de minoration de τ introduit une difficulté supplémentaire que nous allons court-circuiter en recherchant seulement une estimation des fonctions $\exp(\frac{1}{2}\tau \circ \check{F})\ |h_j(\check{F})|$.

Lemme 12.6. – *On considère sur X la fonction d'exhaustion*

$$\check{\varphi} = \log(1 + e^{\varphi}) + \log(1 + |\check{F}|^2)$$

et la métrique associée

$$\check{\alpha} = dd^c\check{\varphi} = \log(1 + e^{\varphi}) + \check{F}^*\omega.$$

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées pour des constantes $p > 0$ assez petite et C_4, C_5 assez grandes.

(a) $\displaystyle\int_{\check{X}} \check{\alpha}^n < +\infty$;

(b) $\displaystyle\int_{\check{X}} e^{\tau\circ\check{F} - C_4\check{\varphi}}\ \check{F}^*(ih \wedge \overline{h}) \wedge \check{\alpha}^{n-1} < +\infty$;

(c) $\displaystyle\int_{\check{X}} \Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\tau \circ \check{F}\Big)\ |Q(F)|^{C_4+1}\ |h_j(\check{F})|\Big]^p\ e^{-C_5\varphi}\ \beta^n < +\infty$.

Démonstration.

(a) est conséquence immédiate du lemme 12.1 si on observe que

$$dd^c \log(1 + e^{\varphi}) = \frac{e^{\varphi}\ dd^c\varphi}{1 + e^{\varphi}} + \frac{e^{\varphi}\ d\varphi \wedge d^c\varphi}{(1 + e^{\varphi})^2} \leqslant dd^c\varphi + e^{-\varphi}\ d\varphi \wedge d^c\varphi.$$

(b) L'estimation 12.3 (b) implique

$$\tau = V - \check{F}^*\varphi \leqslant V \leqslant C_1 \log(1 + |z|^2), \tag{12.7}$$

donc la fonction $\theta = \log(1 + e^{\tau\circ\check{F}})$ satisfait la majoration

$$\theta \leqslant \log\big(1 + (1 + |\check{F}|^2)^{C_1}\big) \leqslant C_1\check{\varphi} + \log 2.$$

Le corollaire 7.3 appliqué à $(\check{X}, \check{\varphi})$ entraîne alors

$$\int_{\check{X}} i\partial\overline{\partial}\theta \wedge \check{\alpha}^{n-1} < +\infty.$$

Un calcul immédiat donne par ailleurs

$$i\partial\overline{\partial}\theta = \check{F}^*\Big(\frac{i\partial\overline{\partial}\tau}{1+e^{-\tau}} + \frac{ie^{\tau}\ \partial\tau\wedge\overline{\partial}\tau}{(1+e^{\tau})^2}\Big) \geqslant \frac{1}{2}\ \check{F}^*\big(ie^{\tau}\ \partial\tau\wedge\overline{\partial}\tau\big)\ e^{-2C_1\check{\varphi}},$$

et il s'ensuit

$$\int_{\check{X}} e^{\tau\circ\check{F}-2C_1\check{\varphi}}\ \check{F}^*(\partial\tau\wedge\overline{\partial}\tau)\wedge\check{\alpha}^{n-1} < +\infty.$$

Par définition de $\check{\alpha}$ on a d'autre part $\check{\alpha}\geqslant\check{F}^*\omega$. L'estimation 12.3 (d) entraîne donc

$$|\check{F}^*u|_{\check{\alpha}} \leqslant \big(|u|_{\omega}\big)\circ\check{F} \leqslant C_2(1+|\check{F}|^2)^{C_3} \leqslant C_2\ e^{C_3\check{\varphi}},$$

$$\int_{\check{X}} |\check{F}^*u|^2_{\check{\alpha}}\ e^{\tau\circ\check{F}-(C_1+2C_3)\check{\varphi}}\ \check{\alpha}^n \leqslant C_2^2\int_{\check{X}}\check{\alpha}^n < +\infty.$$

La propriété (b) résulte maintenant de la définition de $h=\partial\tau+\frac{u}{2i}$ et de l'égalité

$$|\check{F}^*u|^2_{\check{\alpha}}\ \check{\alpha}^n = n\ \check{F}^*(iu\wedge\overline{u})\wedge\check{\alpha}^{n-1}.$$

(c) L'inégalité triviale

$$dd^c\log(1+e^{\varphi}) \geqslant \frac{1}{2}\,dd^c\varphi + \frac{1}{4}\,e^{-\varphi}\ d\varphi\wedge d^c\varphi$$

entraîne successivement

$$\begin{aligned}\check{\alpha}^{n-1} &\geqslant \frac{1}{2^{n-1}}\,(dd^c\varphi)^{n-1} + \frac{(n-1)\,e^{-\varphi}}{2^n}\,(dd^c\varphi)^{n-2}\wedge d\varphi\wedge d^c\varphi\\ &\geqslant 2^{-n}e^{-n\varphi}\ (dd^ce^{\varphi})^{n-1} = 2^{-n}e^{-n\varphi}\ \beta^{n-1},\end{aligned}$$

$$\check{F}^*(ih\wedge\overline{h})\wedge\check{\alpha}^{n-1} \geqslant 2^{-n}e^{-n\varphi}\ |\check{F}^*h|^2_{\beta}\ \beta^n.$$

Par définition de $\check{\varphi}$, on a d'autre part

$$\begin{aligned}\check{\varphi} &= \log(1+e^{\varphi}) - 2\log|Q(F)| + \log\big(1+|Q(F)|^2+|Q(F)|^2|F|^2\big)\\ &\leqslant \varphi - 2\log|Q(F)| + C_6\log(1+|F|^2) + C_7,\end{aligned}$$

où $C_6 = 1+\deg(Q)$. L'inégalité (b) nous donne donc

$$\int_{\check{X}} e^{\tau\circ\check{F}-C_4\varphi}\ |Q(F)|^{2C_4}\ (1+|F|^2)^{-C_4C_6}e^{-n\varphi}\ |\check{F}^*h|^2_{\beta}\ \beta^n < +\infty$$

et comme $|F|\in L^0_{\varphi}(X)$, il s'ensuit

$$\exp\Big(\frac{1}{2}\tau\circ\check{F}\Big)\ |Q(F)|^{C_4}\ |\check{F}^*h|_{\beta} \in L^0_{\varphi}(X).$$

Par ailleurs, la fonction h_j peut s'écrire sous la forme

$$h_j = (-1)^{j-1}\ \frac{h\wedge dz_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dz_j}\wedge\ldots\wedge dz_n}{dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n}.$$

On a donc

$$|h_j(\check{F})| \leqslant |\check{F}^* h|_\beta \; |df_1|_\beta \dots \widehat{|df_j|_\beta} \dots |df_n|_\beta \; |df_1 \wedge \dots \wedge df_n|_\beta^{-1},$$

et comme

$$\begin{aligned} &|df_n|_\beta \,, \, \dots \,, \, |df_n|_\beta \in L^0_\varphi(X) &&\text{[lemme 11.3 (b)], et} \\ &|f_{n+1}| \; |df_1 \wedge \dots \wedge df_n|_\beta^{-1} \in L^0_\varphi(X) &&\text{[inégalité 11.7 (a)],} \end{aligned}$$

il vient

$$\exp\Big(\frac{1}{2}\tau \circ \check{F}\Big) \; |Q(F)|^{C_4} \; |f_{n+1}| \; |h_j \circ \check{F}| \in L^0_\varphi(X).$$

Par hypothèse Q est divisible par z_{n+1}, i.e. $Q = z_{n+1}R$. La propriété (c) s'obtient alors en multipliant la fonction ci-dessus par $|R(F)| \in L^0_\varphi(X)$. □

Afin de pouvoir travailler sur X plutôt que sur $\check{X}$, nous aurons besoin du lemme élémentaire de prolongement ci-dessous.

Lemme 12.8. – *Soit $S = g^{-1}(0)$ une hypersurface de X, et θ une fonction psh sur $X \smallsetminus S$ telle que $e^\theta \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$. Alors $\theta + \log|g|^2$ se prolonge en une fonction psh sur X.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\theta + \log|g|^2$ est majorée au voisinage de tout point régulier de S. On peut donc supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant le polydisque unité fermé $\overline{\Delta}^n$, et que $S = \{z_1 = 0\}$. L'inégalité de moyenne appliquée au polydisque

$$(z_1 + |z_1|\,\Delta) \times \Delta^{n-1} \subset X \smallsetminus S$$

pour tout point $z \in \Delta^n$, $0 < |z_1| < \frac{1}{2}$, implique

$$e^{\theta(z)} \leqslant \frac{1}{\pi^n |z_1|^2} \int_{\Delta^n} e^\theta \, d\lambda.$$

La fonction $\theta + \log|z_1|^2$ est par suite majorée au voisinage de S. □

Proposition 12.9. – *La 1-forme $h = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} h_j dz_j$ se prolonge en une 1-forme méromorphe rationnelle sur M.*

Démonstration. Comme $\check{X} = X \smallsetminus Q(F)^{-1}(0)$, les lemmes 12.6 (c) et 12.8 montrent que

$$p \; \log\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\tau \circ \check{F}\Big) \; |Q(F)|^{C_4+1} \; |h_j \circ \check{F}| \;\Big] + \log|Q(F)|^2$$

s'étend en une fonction psh sur X. Il existe donc un entier $s > 0$ assez grand et $\varepsilon > 0$ assez petit tels que, si g désigne la fonction holomorphe sur X définie par

$$g = Q(F)^s h_j(F),$$

alors la fonction $\frac{1}{2}\tau \circ F + \log|g|$ est psh sur X, et

$$\int_X \exp\left[\varepsilon\Big(\frac{1}{2}\tau \circ \check{F} + \log|g|\Big) - C_8\varphi\right]\beta^n < +\infty.$$

En raisonnant comme dans le lemme 11.3 (a), on obtient par conséquent

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\,\mu_r\Big[\Big(\frac{1}{2}\tau \circ F + \log|g|\Big)_+\Big] \leqslant \frac{C_8 - n}{\varepsilon}\,\mathrm{Vol}(X) < +\infty.$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme tel que $\deg_{X_\ell} P \leqslant k_\ell$ et soit θ la fonction définie par

$$\theta = \log|P(g, f_1, \ldots, f_n)| + k_0\Big(\frac{1}{2}\tau \circ F + C_1 \log|Q(F)|\Big).$$

D'après l'estimation (12.7) et les résultats ci-dessus, θ est psh sur X et vérifie une estimation

$$\theta_+ \leqslant \sum_{j=1}^{m} k_j \log_+|f_j| + k_0\Big(\frac{1}{2}\tau \circ F + C_9 \log|Q(F)|\Big) + C_{10}.$$

Grâce au corollaire 7.3, on obtient la majoration

$$\int_X dd^c\theta \wedge \alpha^{n-1} \leqslant C_{11}k_0 + \sum_{j=1}^{n} k_j \delta_\varphi(f_j)$$

avec une constante $C_{11} \geqslant 0$. Si $a \in X$, il en résulte l'inégalité

$$\mathrm{ord}_a\, P(g, f_1, \ldots, f_n) \leqslant C_{12}(k_0 + k_1 + \cdots + k_n), \qquad C_{12} \geqslant 0.$$

Le raisonnement du théorème 8.5 montre alors que g est algébrique sur $\mathbb{C}(f_1, \ldots, f_n)$, et il en est donc de même pour la fonction $h_j(\check{F}) = Q(F)^{-s}g$. Par suite h_j est algébrique sur $\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_n)$, i.e. h_j vérifie une équation

$$\sum_{\ell=0}^{d} a_\ell(z_1, \ldots, z_n)\, h_j^\ell = 0, \qquad a_\ell \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n], \quad a_d \not\equiv 0.$$

L'élément $a_d h_j$ est donc entier algébrique sur $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$; on en déduit une majoration

$$|a_d(z)h_j(z)| \leqslant C_{13}(1 + |z|)^{C_{14}}.$$

Comme h_j est holomorphe sur l'ouvert $\Omega \subset \check{M}$ et que le complémentaire $\check{M} \setminus \Omega$ est pluripolaire, $a_d h_j$ se prolonge en un polynôme sur $\check{M}$. Par conséquent $h = \sum h_j dz_j$ se prolonge en une 1-forme méromorphe rationnelle sur $\check{M}$. □

Proposition 12.10. – *Soit Ω_1 le plus grand ouvert de Zariski de $\check{M}$ sur lequel h est holomorphe. Alors $\Omega = \Omega_1$.*

Démonstration. On a évidemment $\Omega \subset \Omega_1$. Pour obtenir l'inclusion réciproque, montrons d'abord que τ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω_1. On sait que l'équation (12.5)

$$\partial\tau = h - \frac{u}{2i}$$

a lieu sur Ω, et que $v := h - \frac{u}{2i} \in \mathcal{C}^\infty_{1,0}(\Omega_1)$, puisque $u \in \mathcal{C}^\infty_{1,0}(\check{M})$. Il vient $v + \overline{v} = d\tau$ sur Ω, d'où $d(v + \overline{v}) = 0$ sur Ω_1 par continuité. Soit $(\Omega_{1,j})_{j\in J}$ un recouvrement de Ω_1 par des ouverts simplement connexes. Il existe des fonctions $\tau_j \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{1,j})$ telles que $d\tau_j = v + \overline{v}$ sur $\Omega_{1,j}$. La fonction $\tau - \tau_j$ est alors localement constante sur $\Omega_{1,j} \cap \Omega$, donc constante, car $\Omega_{1,j} \cap \Omega = \Omega_{1,j} \smallsetminus (\check{M} \smallsetminus \Omega)$ est connexe. Par suite $\tau \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$, et comme $\tau = -\infty$ sur $\check{M} \smallsetminus \Omega$, il s'ensuit que $\Omega_1 \smallsetminus \Omega = \emptyset$. □

Corollaire 12.11. – *$F(X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0))$ est un ouvert de Zariski de M.*

Démonstration. Si x est un point quelconque de l'ouvert $X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0)$, alors $F(x) \notin M_{\mathrm{sing}} \cup \{z_{n+1} = 0\}$, donc il existe un polynôme Q_x divisible par z_{n+1} et s'annulant sur M_{sing}, tel que $Q_x(F(x)) \neq 0$. D'après le corollaire 12.10, $\Omega_x := F(X \smallsetminus Q_x(F)^{-1}(0))$ est un ouvert de Zariski de M, donc aussi la réunion

$$\bigcup_{x\in X\smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0)} \Omega_x = F(X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0)). \qquad \square$$

Comme $X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0)$ est de Stein ainsi que son image biholomorphe par F, on voit en fait que le complémentaire $M \smallsetminus F(X \smallsetminus f_{n+1}^{-1}(0))$ est nécessairement une hypersurface algébrique de M.

13. Démonstration du critère d'algébricité (cas lisse).

D'après la proposition 11.7 (a), à tout point $x_0 \in X$ on peut associer un morphisme

$$F^{(0)} = (f_1^{(0)}, \ldots, f_{N_0}^{(0)}) \in \big[A^0_\varphi(X)\big]^{N_0}$$

et une fonction $g_0 = f_{n+1}^{(0)}$ tels que l'ouvert $X \smallsetminus g_0^{-1}(0) \ni x_0$ soit biholomorphe par $F^{(0)}$ à un ouvert de Zariski d'une variété algébrique dans $\mathbb{C}^{N_0}$. Il existe donc un recouvrement dénombrable de X par de tels ouverts $X \smallsetminus g_k^{-1}(0)$, associés à des morphismes $F^{(k)} : X \to \mathbb{C}^{N_k}$. Considérons le morphisme produit

$$F_k = F^{(0)} \times F^{(1)} \times \cdots \times F^{(k)} : X \to \mathbb{C}^{N_0+\cdots+N_k}.$$

D'après la proposition 8.5, l'image $F_k(X)$ est contenue dans une variété algébrique irréductible $M_k \subset \mathbb{C}^{N_0\,+\,\cdots\,+\,N_k}$ de dimension n, et le corollaire 12.11 montre que $F_k(X \smallsetminus g_j^{-1}(0))$ est un ouvert de Zariski de M_k si $j \leqslant k$. Posons

$$Y_k = \bigcap_{j\leqslant k} g_j^{-1}(0), \qquad X_k = X \smallsetminus Y_k = \bigcup_{j\leqslant k} \big(X \smallsetminus g_j^{-1}(0)\big).$$

Par construction $F_k : X_k \to F_k(X_k) \subset M_k$ est un isomorphisme, et $F_k(X_k)$ est un ouvert de Zariski de M_k. On peut donc énoncer :

Propostion 13.1. — *Si X vérifie les hypothèses* 9.1'(a',b')*, alors X est réunion d'une suite croissante de variétés quasi-affines X_k, où chaque X_k s'identifie à un ouvert de Zariski de X_{k+1} avec la structure algébrique induite.* □

En d'autres termes, X a bien une structure d'espace annelé qui est « localement » celle d'une variété algébrique, mais la « topologie de Zariski » peut ne pas être quasi-compacte.

Signalons qu'il existe effectivement de telles variétés. Il suffit de prendre pour X la surface (lisse) d'équation $\sin x = yz$ dans $\mathbb{C}^3$, et pour Y_k la réunion dénombrable de droites

$$(\{j\pi\} \times \{0\} \times \mathbb{C}) \ \cup \ (\{j\pi\} \times \mathbb{C} \times \{0\}),$$

$j \in \mathbb{Z}$, $|j| > k$. L'ouvert $X_k = X \smallsetminus Y_k$ s'identifie alors à la variété algébrique

$$V_k = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,;\, x\Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\Big) = yz\Big\}$$

via l'application $V_k \hookrightarrow X$ définie par

$$(x,y,z) \mapsto (x,y,z') \quad \text{où} \quad z' = z \prod_{|j|>k} \Big(1 - \frac{x^2}{j^2\pi^2}\Big),$$

avec des inclusions $V_k \hookrightarrow V_{k+1}$ données par les morphismes algébriques

$$(x,y,z) \mapsto (x,y,z') \quad \text{où} \quad z' = z\Big(1 - \frac{x^2}{(k+1)^2\pi^2}\Big). \qquad \square$$

Nous allons maintenant montrer que la suite (X_k) est nécessairement stationnaire si les espaces de cohomologie $H^{2q}(X\,;\mathbb{R})$ sont de dimension finie [hypothèse 9.1'(c')].

Lemme 13.2. — *Soit X une variété analytique complexe de dimension n, Y un ensemble analytique de dimension $\leqslant p$ dans X, et $d = n - p = \operatorname{codim}_{\mathbb{C}} Y$. Alors l'espace de cohomologie relative $H^q(X, X \smallsetminus Y\,;\mathbb{R})$ est nul si $q < 2d$ et*

$$H^{2d}(X, X \smallsetminus Y\,;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^J,$$

où $(Y_j)_{j\in J}$ est la famille des composantes irréductibles de dimension p de Y.

Démonstration. Nous renvoyons par exemple à E. Spanier [Sp] pour les arguments élémentaires de topologie algébrique qui vont être utilisés. On raisonne par récurrence sur p, le résultat étant trivial pour $p = 0$. Si $p \geqslant 1$, soit Z la réunion du lieu singulier Y_{sing} et des composantes irréductibles de Y de dimension $< p$, de sorte que $\dim Z \leqslant p - 1$. La suite exacte du triplet s'écrit

$$H^q(X, X \smallsetminus Z) \to H^q(X, X \smallsetminus Y) \to H^q(X, X \smallsetminus Y) \to H^{q+1}(X, X \smallsetminus Z).$$

Par hypothèse de récurrence $H^q(X, X \smallsetminus Z) = H^{q+1}(X, X \smallsetminus Z) = 0$ pour $q \leqslant 2d$, donc $H^q(X, X \smallsetminus Y) \simeq H^q(X \smallsetminus Z, X \smallsetminus Y)$. Quitte à remplacer (X, Y) par $(X \smallsetminus Z, Y \smallsetminus Z)$, on peut supposer Y lisse de dimension p.

Y possède alors un voisinage tubulaire U homéomorphe au fibré normal NY. Grâce au théorème d'excision, on obtient donc

$$H^q(X, X \smallsetminus Y) \simeq H^q(U, U \smallsetminus Y) \simeq H^q(NY, N^\bullet Y)$$

où $N^\bullet Y$ est le complémentaire de la section nulle de NY. Comme le fibré NY est de rang réel $2d$, le théorème d'isomorphisme de Thom-Gysin implique

$$H^q(NY, N^\bullet Y) \simeq H^{q-2d}(Y),$$

et pour $q = 2d$, $H^0(Y) \simeq \mathbb{R}^J$. $\square$

Revenons maintenant à la situation de la proposition 13.1, où $X_k = X \smallsetminus Y_k$, et posons $\dim Y_k = p_k$, $d_k = n - p_k$. La suite exacte de la paire $(X, X \smallsetminus Y_k)$ donne

$$H^{2d_k-1}(X \smallsetminus Y_k) \to H^{2d_k}(X, X \smallsetminus Y_k) \to H^{2d_k}(X).$$

Puisque $X \smallsetminus Y_k$ est isomorphe à une variété algébrique, $H^{2d_k-1}(X \smallsetminus Y_k)$ est de dimension finie, et il en est de même par hypothèse pour $H^{2d_k}(X)$. Le lemme 13.2 montre donc que Y_k n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles de dimension maximale p_k. Comme Y_k est une suite décroissante d'intersection vide, on voit qu'il existe $\ell > k$ tel que $\dim Y_\ell < p_k$. Au bout d'un nombre fini d'étapes on aura donc $Y_\ell = \emptyset$, soit $X = X_\ell$. Posons

$$F = F_\ell = F^{(0)} \times \cdots \times F^{(\ell)}, \qquad M = M_\ell, \qquad N = N_0 + \cdots + N_\ell.$$

Le morphisme $F : X \to M \subset \mathbb{C}^N$ est alors un isomorphisme analytique de X sur un ouvert de Zariski $\Omega \subset M$. Quitte à remplacer M par sa normalisation comme dans la démonstration 11.7 (b), on peut supposer M normale. Puisque Ω est de Stein, le complémentaire $H = M \smallsetminus \Omega$ est nécessairement une hypersurface de M. Désignons par $K(\Omega) \simeq K(M)$ le corps des fonctions rationnelles sur Ω, et par $R(\Omega)$ l'anneau des fonctions algébriques régulières sur Ω. Écrivons

$$F = (f_1, \ldots, f_N) \in \left[A^0_\varphi(X)\right]^N.$$

Le co-morphisme F^* envoie $K(\Omega)$ dans le corps $\mathbb{C}(f_1, \ldots, f_N) \subset K_\varphi(X)$. La proposition ci-dessous montre que les structures algébriques $(X, K_\varphi(X) \cap \mathcal{O}(X))$ et $(\Omega, R(\Omega))$ sont isomorphes.

Proposition 13.3. – *On a les propriétés suivantes* :

(a) $F^* : K(\Omega) \to K_\varphi(X)$ *est un isomorphisme.*

(b) $F^* R(\Omega) = K_\varphi(X) \cap \mathcal{O}(X)$.

Démonstration.

(a) Il suffit de démontrer la surjectivité de F^*. Or, si $g \in K_\varphi(X)$, la fonction g est algébrique sur $\mathbb{C}(f_1, \ldots, f_N)$ d'après 11.6. Par suite $g \circ F^{-1}$ est méromorphe sur Ω et algébrique sur $K(\Omega)$. Il en résulte que $g \circ F^{-1} \in K(\Omega) = K(M)$, en raisonnant par exemple comme à la fin de la démonstration 12.9.

(b) se déduit aussitôt de (a) , à condition de vérifier l'égalité $R(\Omega) = K(\Omega) \cap \mathcal{O}_{\mathrm{anal}}(\Omega)$. L'inclusion $R(\Omega) \subset \ldots$ est claire. Inversement, étant donné $g \in K(\Omega)$ et $x \in \Omega$, soit $g = u/v$, où $u, v \in \mathcal{O}_{x,\mathrm{alg}}$, une écriture irréductible de g au point x (qui est lisse par hypothèse). Cette écriture est aussi irréductible dans $\mathcal{O}_{x,\mathrm{anal}}$. Comme $g \in \mathcal{O}_{x,\mathrm{anal}}$, on a donc $v(x) \neq 0$, par suite $g \in \mathcal{O}_{x,\mathrm{alg}}$ et $g \in R(\Omega)$. □

Pour achever la preuve du théorème 9.1', il reste maintenant à montrer que Ω est algébriquement isomorphe à une variété algébrique affine, autrement dit il faut prouver l'existence d'un plongement algébrique propre $\Omega = M \smallsetminus H \to \mathbb{C}^{N'}$. C'est facile si M est lisse, mais lorsque M est singulière il se peut que l'hypersurface algébrique H ne soit pas localement intersection complète, et dans cette situation Goodman [Go] a donné des exemples pour lesquels l'algèbre $R(M \smallsetminus H)$ n'est pas de type fini. Je remercie N. Mok de m'avoir signalé cette difficulté, qui rendait caduque ma démonstration initiale. Le raisonnement de [Mok2] consiste à observer que Ω est *rationnellement convexe* dans le sens suivant : pour tout compact $K \subset \Omega$ l'enveloppe

$$\hat{K} = \Big\{ x \in \Omega\,;\ |g(x)| \leqslant \sup_K |g| \text{ pour tout } g \in R(\Omega) \Big\}$$

est compacte. Ceci résulte en effet de 11.5 (d) et du fait que $\Omega \simeq X$ est de Stein. On applique alors la partie (b) du théorème ci-dessous.

Théorème 13.4. – *Soit $M \subset \mathbb{C}^N$ une variété algébrique affine (éventuellement singulière) de dimension pure n, et H une hypersurface algébrique de M. Alors $M \smallsetminus H$ est isomorphe à une variété algébrique affine sous l'une quelconque des deux hypothèses suivantes :*

(a) *H est (comme sous-schéma réduit) localement intersection complète dans M.*

(b) *$M \smallsetminus H$ est rationnellement convexe* ([Mok2]).

Démonstration sous l'hypothèse (a). Pour tout $x \in H$, il existe par hypothèse un polynôme $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ et un voisinage de Zariski $V(x) \subset M$ tels que $H \cap V(x) = P^{-1}(0) \cap V(x)$. Soit H' la réunion des composantes irréductibles de $P^{-1}(0)$ non contenues dans H. Comme $x \notin H'$, il existe un polynôme Q s'annulant sur H', tel que $Q(x) = 1$. Le théorème des zéros de Hilbert entraine l'existence d'un entier $s \in \mathbb{N}$ tel que $Q^s/P \in R(M \smallsetminus H)$. Comme la topologie de Zariski est quasi-compacte, on peut extraire un recouvrement fini $V(x_1), \ldots, V(x_m)$ de H et une famille finie de polynômes P_j, $Q_j^{s_j}$ associés aux points x_j. Notre construction montre alors que le morphisme

$$\big(z_1, \ldots, z_N, Q_1^{s_1}/P_1, \ldots, Q_m^{s_m}/P_m\big) : M \smallsetminus H \to \mathbb{C}^{N+m}$$

est un plongement propre.

Démonstration sous l'hypothèse (b). On construit d'abord par récurrence descendante sur k une suite de sous-variétés algébriques $M_k \subset M$ fermées, de dimension pure k, telles que $M_k \cap H$ soit une hypersurface de M_k. On pose $M_n = M$; si M_k a été construite, on choisit un polynôme $P_k \in R(M)$ s'annulant sur H mais ne s'annulant identiquement sur aucune composante irréductible de M_k ; on note alors M_{k-1} la réunion des composantes irréductibles de $M_k \cap P_k^{-1}(0)$ non contenues dans H.

On démontre maintenant par récurrence croissante sur k l'existence de fractions rationnelles $g_1, \ldots, g_{m_k} \in R(M \smallsetminus H)$ telles que le morphisme

$$\Phi_k : (z_1, \ldots, z_N) \mapsto (z_1, \ldots, z_N, g_1(z), \ldots, g_{m_k}(z)) : M \smallsetminus H \to \mathbb{C}^{N+m_k}$$

soit un plongement propre en restriction à $M_k \smallsetminus H$ (pour $k = n$ le théorème sera ainsi démontré). Si $k = \dim M_k = 1$, cette propriété est claire, car l'hypothèse (b) et le principe du maximum entraînent l'existence de fractions rationnelles $g_1, \ldots, g_{m_1} \in R(M \smallsetminus H)$ dont les restrictions à M_1 ont des pôles aux différents points $x_1, \ldots, x_{m_1}$ de $M_1 \cap H$. Supposons maintenant Φ_k construit. Soit $\pi_k : \mathbb{C}^{N+m_k} \to \mathbb{C}^N$ la projection, $\overline{M}$ l'adhérence de $\Phi_k(M \smallsetminus H)$ dans $\mathbb{C}^{N+m_k}$ et $\overline{H} = \overline{M} \cap \pi_k^{-1}(H)$, de sorte que

$$\Phi_k : M \smallsetminus H \to \overline{M} \smallsetminus \overline{H}$$

est un isomorphisme (d'inverse $\Phi_k^{-1} = \pi_{k|\overline{M} \smallsetminus \overline{H}}$). Par hypothèse de récurrence $\overline{M}_k = \Phi_k(M_k \smallsetminus H)$ est une sous-variété algébrique fermée de $\overline{M}_{k+1} = \overline{\Phi_k(M_{k+1} \smallsetminus H)}$. Comme $\overline{M}_{k+1} \cap (P_k \circ \pi_k)^{-1}(0)$ est la réunion disjointe $(\overline{M}_{k+1} \cap \overline{H}) \cup \overline{M}_k$, on voit que $\overline{M}_{k+1} \cap \overline{H}$ est localement intersection complète dans $\overline{M}_{k+1}$ (et y est localement définie par $P_k \circ \pi_k$). Pour tout $x \in \overline{M}_{k+1} \cap \overline{H}$, il existe donc un polynôme $Q \in R(\overline{M})$ tel que $Q(x) = 1$, qui s'annule sur toutes les composantes irréductibles de $(P_k \circ \pi_k)^{-1}(0)$ ne rencontrant pas $\overline{M}_{k+1} \cap \overline{H}$. On peut donc compléter Φ_k en un morphisme Φ_{k+1} comme dans le cas (a), en adjoignant à Φ_k des fonctions $g_j = (Q_j \circ \Phi_k)^{s_j} / P_k$, $m_k < j < m_{k+1}$; alors $\Phi_{k+1} : M_{k+1} \smallsetminus H \to \mathbb{C}^{N+m_{k+1}}$ est propre, car les fonctions $g_j \circ \pi_k = Q_j^{s_j} / P_k \circ \pi_k$ définissent un morphisme propre sur $\overline{M}_{k+1} \smallsetminus \overline{H}$. □

La propriété 13.3 (a) entraîne que $K_\varphi(X)$ est engendré par $f_1, \ldots, f_N$, et donc que $K_\varphi(X)$ est aussi le corps des quotients de $A^0_\varphi(X)$, ce qui n'était nullement évident a priori. On peut en fait obtenir un résultat un peu plus précis.

Proposition 13.5. – *Sous l'hypothèse* 9.1'(b') [*resp.* 9.1 (b)], $K_\varphi(X)$ *est engendré par* $A^b_\varphi(X)$, *où* $b = \frac{2c}{1+c}$ [*resp. par* $A^2_\varphi(X)$].

Démonstration. Pour le voir, il suffit grâce au raisonnement précédent de construire un plongement injectif

$$G = (g_1, \ldots, g_s) : X \to \mathbb{C}^s, \qquad g_j \in A^b_\varphi(X).$$

La proposition 11.5 (c) permet de construire pour tous points $x_0 \in X$ et $(x_1, x_2) \in X \times X \smallsetminus \Delta$ (où Δ = diagonale) des fonctions $g_1, \ldots, g_n, g \in A^b_\varphi(X)$ telles que $dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n(x_0) \neq 0$ et $g_1(x) \neq g(x_2)$. Comme les ouverts

$$\big\{x\,;\ dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n(x) \neq 0\big\} \quad \text{et} \quad \big\{(x, y)\,;\ g(x) \neq g(y)\big\} \subset X \times X \smallsetminus \Delta$$

sont des ouverts de Zariski, il existe des recouvrements finis de X et $X \times X \smallsetminus \Delta$ respectivement, par de tels ouverts. La collection des fonctions g, g_j ainsi obtenues donne le morphisme G cherché. □

Remarque 13.6. – On a en toute généralité les inclusions

$$A_\varphi^\infty(X) \subset A_\varphi^b(X) \subset A_\varphi^0(X) \subset A_\varphi(X), \qquad 0 < b \leqslant 2,$$

mais nous ne savons pas pour les deux dernières s'il y a toujours égalité ou non. Le fait surprenant est que l'algèbre $A_\varphi^\infty(X)$ peut avoir un degré de transcendance $< n$. Choisissons par exemple $X = \mathbb{C}$, avec la fonction strictement psh

$$\varphi(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \log(\varepsilon_j + |z-j|^2), \qquad 0 < \varepsilon_j \leqslant 1, \quad \varepsilon_0 = 1.$$

Soit $r \geqslant 3$ donné. En découpant la somme pour les indices $j \leqslant \log_2 r$ d'une part, $j > \log_2 r$ d'autre part, on obtient aisément pour $|z| = r$ les estimations

$$(13.7) \qquad \varphi(z) = 2\log(1+|z|^2) + O\Big(\frac{\log r}{r}\Big) \qquad \text{si } \forall j,\ |z-j| > \tfrac{1}{2},$$

$$(13.8) \qquad \varphi(z) = 2\log(1+|z|^2) + 2^{-j}\log(\varepsilon_j + |z-j|^2) + O\Big(\frac{\log r}{r}\Big) \qquad \text{si } |z-j| \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Choisissons ε_j de sorte que

$$(13.9) \qquad 2\log(1+j^2) + 2^{-j}\log\varepsilon_j = \log(1+\log j), \quad j \geqslant 1, \quad \text{i.e. } \varepsilon_j = \Big[\frac{1+\log j}{(1+j^2)^2}\Big]^{2^j}.$$

On a alors $\varphi(j) \sim \log\log j$ quand $j \to +\infty$, de sorte que φ est exhaustive. Les fonctions $f \in A_\varphi^\infty(\mathbb{C})$ sont à croissance polynomiale et doivent vérifier de plus $|f(j)| \leqslant (\log j)^{\mathrm{Cte}}$ quand $j \to +\infty$. Par suite $A_\varphi^\infty(\mathbb{C})$ se réduit aux constantes. Les conditions 9.1 (a) et (b) sont néanmoins vérifiées. Un calcul immédiat donne en effet

$$dd^c\varphi = 2i\, dz \wedge d\overline{z} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{2^{-j}\varepsilon_j}{(\varepsilon_j + |z-j|^2)^2},$$

de sorte que $\int_{\mathbb{C}} dd^c\varphi = 8\pi$. La majoration 9.1 (b) a lieu avec la fonction

$$\psi(z) = -\log\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{2^{-j}\varepsilon_j}{(\varepsilon_j + |z-j|^2)^2}\right).$$

En considérant le seul terme $j = 0$, on obtient la majoration $\psi(z) \leqslant 2\log(1+|z|^2)$. Pour $\varepsilon_j^{1/3} \leqslant |z-j| \leqslant \frac{1}{2}$, on a d'autre part grâce à (13.8) et (13.9) $\times \frac{2}{3}$:

$$\varphi(z) \geqslant 2\log(1+|z|^2) + 2^{-j}\frac{2}{3}\log\varepsilon_j + O(1) \geqslant \frac{2}{3}\log(1+|z|^2) + O(1),$$

tandis que pour $|z-j| \leqslant \varepsilon_j^{1/3}$ il vient

$$\frac{2^{-j}\varepsilon_j}{(\varepsilon_j + |z-j|^2)^2} \geqslant \frac{2^{-j}\varepsilon_j}{4\,\varepsilon_j^{4/3}} = 2^{-j-2}\varepsilon_j^{-1/3},$$

de sorte que $\psi(z) \leqslant 0$ si j est assez grand. On voit donc qu'il existe une constante B telle que $\psi \leqslant 3\varphi + B$. □

14. Algébricité des espaces complexes singuliers.

Soit X un espace analytique de dimension n. Si X est un ensemble algébrique dans $\mathbb{C}^N$, les calculs du §10 montrent que les conditions géométriques 9.1 (a,b,c) sont vérifiées.

Inversement, pour démontrer la suffisance des conditions géométriques, on se heurte à deux difficultés principales. D'une part les estimations L^2 de Hörmander ne sont a priori valables que sur un ouvert de Stein lisse de la forme $X \smallsetminus H$, où H est une hypersurface de X contenant le lieu singulier X_{sing}. Pour pouvoir appliquer un lemme de prolongement, on doit donc supposer que X est normal.

Lemme 14.1. – *Soit f une fonction holomorphe sur $X \smallsetminus H$ telle que $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X_{\mathrm{reg}})$. Alors, si X est normal, f se prolonge en une fonction holomorphe sur X .*

Démonstration. Sous l'hypothèse $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X_{\mathrm{reg}})$, il est classique que f se prolonge de $X_{\mathrm{reg}} \smallsetminus H$ à X_{reg}, et toute fonction holomorphe sur X_{reg} se prolonge à X si X est normal (cf. [Nar], proposition VI.4).

Une autre difficulté vient du fait que le poids $e^{-\psi}$ peut ne pas être localement sommable en certains points singuliers, par rapport à une métrique ambiante lisse. Considérons par exemple le cas de la variété conique X d'équation $z_0^p + \cdots + z_n^p = 0$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$, $p \in \mathbb{N}^*$. Le courbure de Ricci de X est alors donnée grâce à la proposition 10.1 (a) par la formule

$$\mathrm{Ricci}(\beta_{|X}) = -\frac{1}{2} dd^c\psi$$

avec $\psi(z) = \log(|z_0|^{2p-2} + \cdots + |z_n|^{2p-2})$. On voit donc que la fonction $e^{-\psi}$ n'est localement sommable en 0 que si $p \leqslant n$. Dans le cas d'un espace X pour lequel $e^{-\psi}$ est non sommable au voisinage de tout point d'une courbe, la proposition 11.5 (c) ne s'applique plus. On est donc amené à supposer que les singularités de X sont isolées.

Démonstration du théorème 9.1' (suffisance des conditions dans le cas de singularités isolées). L'hypothèse (c') entraîne que les composantes irréductibles de X sont en nombre fini. Soit

$$\pi : \tilde{X} \to X$$

la normalisation de X. La fonction $\varphi\circ\pi$ n'est pas en général strictement psh au voisinage de $\pi^{-1}(X_{\mathrm{sing}})$, mais quitte à modifier $\varphi \circ \pi$ et $\psi \circ \pi$ au voisinage de l'ensemble fini $\pi^{-1}(X_{\mathrm{sing}})$, on voit que les hypothèses sont satisfaites par $\tilde{X}$. En définitive, on peut supposer X normal et irréductible.

La démonstration est maintenant tout à fait semblable à celle qui a été donnée au cours des §11, 12, 13, aussi nous contenterons-nous d'indiquer les grandes lignes et les changements à apporter. Les lemmes 11.2 et 11.3 sont vrais sans aucune modification, ainsi que les propriétés 11.5 (a,b,d). L'énoncé 11.5 (c) reste valable si $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset X_{\mathrm{reg}}$, et si certains des points x_j sont singuliers, on a le résultat partiel suivant (qui correspond au cas $\rho = 0$).

Lemme 14.2. – *Soit un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$. Alors il existe une fonction $f \in A^b_\varphi(X)$, $b = \frac{2c}{1+c}$, ayant un jet d'ordre s donné en chaque point $x_1, x_2, \ldots, x_m$.*

Démonstration. On reprend les mêmes arguments que dans 11.5 (c), en remplaçant le système de coordonnées locales $z^{(j)}$ par un système générateur $(z_1^{(j)}, \ldots, z_{N_j}^{(j)})$ de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{X,x_j}$ de $\mathcal{O}_{X,x_j}$ et ρ_1 par

$$\rho_1 = s(n+2)\left[\sum_{j=1}^{m} \chi_j \log|z^{(j)}|^2 + C_1\varphi\right].$$

Au voisinage de x_j, la construction donne alors $f = P_j(z^{(j)}) - g$ avec g holomorphe telle que

$$|g|^2\ |z^{(j)}|^{-2s(n+2)}\ e^{-\psi} \in L^2_{\mathrm{loc}}(X).$$

D'après les estimations L^2 de H. Skoda [Sk4], ceci entraîne que $g \in \mathfrak{m}^s_{X,x_j}$. □

La proposition 11.7 reste donc applicable si $x_0 \in X_{\mathrm{reg}}$, et en reprenant les arguments des §12, 13, on construit une variété algébrique normale M et un morphisme $F = (f_1, \ldots, f_N) : X \to M$ dont la restriction à X_{reg} est un isomorphisme de X_{reg} sur un ouvert de Zariski de M. Grâce au lemme 14.2, on peut (quitte à compléter F par un nombre fini de fonctions f_j) supposer que F définit un plongement de X au voisinage de chaque point singulier. Le morphisme F est alors un isomorphisme de X sur l'ouvert de Zariski $F(X) \subset M$. La fin de la preuve est identique à celle donnée au §13. □

Le raisonnement qui vient d'être esquissé donne d'autre part le résultat intéressant ci-dessous.

Théorème 14.3. – *Soit X un espace analytique normal de dimension n, vérifiant les hypothèses* 9.1'(a',b',c'). *Alors X_{reg} est analytiquement isomorphe à une variété algébrique quasi-affine, l'isomorphisme étant donné par un morphisme φ-polynomial F de X dans une variété algébrique affine normale $M \subset \mathbb{C}^N$ de dimension n.* □

15. Appendice : courants et fonctions plurisousharmoniques à croissance minimale sur une variété algébrique affine.

Soit M une sous-variété algébrique affine lisse de dimension n. On munit M des métriques kählériennes

$$\beta = dd^c|z|^2, \qquad \omega = dd^c \log(1 + |z|^2)$$

induites respectivement par la métrique plate de $\mathbb{C}^N$ et par la métrique de Fubini-Study de l'espace projectif $\mathbb{P}^N$.

Définition 15.1. – *Fonctions psh et courants à croissance minimale :*

(a) *Une fonction psh V sur M est dite à croissance minimale s'il existe des constantes $C_0, C_1 \geqslant 0$ telles que*
$$V(z) \leqslant C_1 \log_+ |z| + C_0.$$

(b) *Un courant positif fermé T de bidegré $(1,1)$ sur M est dit à croissance minimale si*
$$\int_M T \wedge \omega^{n-1} < +\infty.$$

Du corollaire 7.3 résulte aussitôt la

Proposition 15.2. – *Si V est psh de croissance minimale sur M, alors $T = dd^cV$ est à croissance minimale.* □

Réciproquement, étant donné un courant $T \geqslant 0$ fermé à croissance minimale, on ne pourra trouver de solution à l'équation $dd^cV = T$ que si la classe de cohomologie de T est nulle. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer le résultat général suivant, qui est une réciproque partielle de la proposition 15.2.

Théorème 15.3. – *Soit T un $(1,1)$-courant positif fermé sur M tel que*
$$\int_M T \wedge \omega^{n-1} < +\infty.$$
Alors il existe une fonction psh V et une $(1,0)$-forme u de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M ayant les propriétés ci-dessous, où C_1, C_2, C_3 sont des constantes $\geqslant 0$.

(a) $dd^cV \geqslant T$;

(b) $V(z) \leqslant C_1 \log_+ |z|$;

(c) $dd^cV - T = \overline{\partial} u$;

(d) $|u|_\omega \leqslant C_2(1 + |z|)^{C_3}$.

La démonstration se fera en plusieurs étapes. Observons d'abord que la condition 15.1 (b) est équivalente à la suivante :

$$\sigma(r) = \int_{|\zeta|<r} T(\zeta) \wedge \beta^{n-1} \leqslant C\, r^{2n-2}. \tag{15.4}$$

Il n'est pas restrictif d'autre part de supposer $n \geqslant 2$. Dans le cas contraire, on peut appliquer le théorème 15.3 à la variété $M' = M \times \mathbb{C}$ et au courant image réciproque $T' = \pi_M^* T$. La fonction $V(z) = V'(z, 0)$ et la forme $u = u'_{|M \times \{0\}}$ répondent alors à la question.

Étant donné un courant $T \geqslant 0$ de bidegré $(1,1)$ sur M vérifiant (15.4), on peut lui associer un potentiel V_T par les mêmes formules que celles utilisées par P. Lelong [Le3] dans $\mathbb{C}^n$:

$$V_T(z) = \int_M T(\zeta) \wedge \beta^{n-1}\, L_n(z, \zeta) \tag{15.5}$$

avec

$$L_n(z,\zeta) = \frac{1}{(n-1)(4\pi)^n}\left[\frac{1}{(1+|\zeta|^2)^{n-1}} - \frac{1}{|z-\zeta|^{2n-2}}\right].$$

Lemme 15.6. – *La formule* (15.5) *définit une fonction* $V_T \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ *semi-continue supérieurement, et il existe des constantes* C_0, C_1 *telles que*

$$V_T(z) \leqslant C_1 \log_+ |z| + C_0.$$

Démonstration. Le noyau L_n vérifie clairement les estimations suivantes :

$$|L_n(z,\zeta)| \leqslant C_2|z|\,|\zeta|^{1-2n} \qquad \text{si } |\zeta| \geqslant 2|z| \geqslant 1,$$

$$L_n(z,\zeta) \leqslant C_3|\zeta|^{2-2n} \qquad \text{si } 1 \leqslant |\zeta| \leqslant 2|z|.$$

Pour $|z| = r \geqslant 1$, on en déduit

$$V_T(z) \leqslant C_4\left[1 + \int_1^{2r} \frac{1}{t^{2n-2}}\,d\sigma(t) + \int_{2r}^{+\infty} \frac{r}{t^{2n-1}}\,d\sigma(t)\right]$$

Après intégration par parties, il vient, compte-tenu de (15.4) :

$$\begin{aligned} V_T(z) &\leqslant C_4\left[1 + \frac{\sigma(2r)}{(2r)^{2n-2}} + (2n-2)\int_1^{2r} \frac{\sigma(t)\,dt}{t^{2n-1}} + (2n-1)r\int_{2r}^{+\infty} \frac{\sigma(t)\,dt}{t^{2n}}\right] \\ &\leqslant C_5(1+\log r). \end{aligned}$$

Les estimations précédentes montrent de plus que l'intégrale (15.5) converge absolument sur l'ensemble $\{\zeta \in M\,;\ |\zeta| > 2|z|\}$, de manière uniforme lorsque z décrit un compact de M. La propriété $V_T \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ résulte alors par le théorème de Fubini du fait que $|L_n(z,\zeta)|$ est, localement sur $M \times M$, intégrable en z uniformément par rapport à ζ. □

Lemme 15.7. – *Pour tout point* $z \in M$*, il existe des boules* $B'_z \subset T_zM$*,* $B''_z \subset (T_zM)^\perp$ *de centre* 0 *et de rayon* $r(z) = C_6(1+z|)^{-C_7}$ *où* $C_6, C_7 > 0$*, et une application holomorphe* $g_z : B'_z \to B''_z$ *telles que* $M \cap (z + B'_z + B''_z)$ *soit le graphe de* g*, i.e. si* $\zeta - z = \zeta' + \zeta''$ *est l'écriture d'un point* $\zeta \in M$ *suivant la décomposition* $\mathbb{C}^N = (T_zM) \oplus (T_zM)^\perp$*, alors*

$$M \cap (z + B'_z + B''_z) = \bigl\{\zeta \in \mathbb{C}^N\,;\ \zeta'' = g_z(\zeta'),\ \zeta' \in B'_z\bigr\}.$$

Démonstration. Soit $(P_1, \ldots, P_m)$ un système de polynômes générateurs pour l'idéal de la variété M dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]$. Puisque M est lisse, les jacobiens partiels $J_{K,L}$ d'ordre $N - n$ (cf. §10) ne s'annulent pas tous simultanément sur M. D'après le théorème des zéros de Hilbert, les polynômes $J_{K,L}$ engendrent l'idéal unité sur M ; il existe donc des constantes $C_8, C_9 > 0$ telles que

$$\max_{K,L} |J_{K,L}(z)| \geqslant C_8(1+|z|)^{-C_9}, \qquad z \in M.$$

Le lemme résulte alors du théorème des fonctions implicites (dans sa version quantitative). □

.

On observe maintenant que la formule (15.5) peut se récrire sous la forme

$$V_T(z) = \int_M T(\zeta) \wedge \big[K_n(z,\zeta) - H_n(\zeta)\big] \tag{15.8}$$

avec

$$K_n(z,\zeta) = -\frac{1}{(n-1)(4\pi)^n}\left[\frac{dd^c|z-\zeta|^2}{|z-\zeta|^2}\right]^{n-1},$$

$$H_n(\zeta) = -\frac{1}{(n-1)(4\pi)^n}\,\frac{\beta(\zeta)^{n-1}}{(1+|\zeta|^2)^{n-1}}.$$

Les propriétés du noyau K_n vont nous permettre de calculer aisément dd^cV_T en fonction de T.

Lemme 15.9. – *$dd^cK_n = [\Delta] + R_n$, où $[\Delta]$ est le courant d'intégration sur la diagonale de $M \times M$ et où R_n est un (n,n)-courant $\geqslant 0$ à coefficients localement intégrables sur $M \times M$, vérifiant l'estimation*

$$\|R_n(z,\zeta)\|_{\beta\oplus\beta} \leqslant C_{10}\min\left[\frac{1}{|z-\zeta|^{2n}}\ ,\ \frac{(1+|z|)^{C_{11}}}{|z-\zeta|^{2n-1}}\right].$$

Démonstration. En dehors de la diagonale Δ, un calcul classique (dont la vérification est laissée au lecteur) donne

$$\begin{aligned} dd^cK_n &= \frac{(dd^c|z-\zeta|^2)^n - n\,|z-\zeta|^{-2}\,d|z-\zeta|^2 \wedge d^c|z-\zeta|^2 \wedge (dd^c|z-\zeta|^2)^{n-1}}{(4\pi)^n\,|z-\zeta|^{2n}} \\ &= \Big(\frac{1}{4\pi}\,dd^c\log|z-\zeta|^2\Big)^n, \end{aligned} \tag{15.10}$$

en on verra plus loin que $1\!\!1_\Delta\ dd^cK_n = [\Delta]$. En particulier, on a

$$R_n = 1\!\!1_{M\times M\smallsetminus\Delta}\ dd^cK_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \|R_n(z,\zeta)\| \leqslant C|z-\zeta|^{-2n}.$$

Pour obtenir la deuxième partie de la majoration, plaçons-nous en un point $z \in M$ et utilisons le lemme 15.7. En restriction à M, on a au point z

$$dz = dz' = \text{composante de } dz \text{ sur } T_zM,$$

tandis qu'en un point voisin $\zeta \in z + (B'_z + B''_z)$ on a :

$$d\zeta = d\zeta' + d(g_z(\zeta')).$$

D'après (15.10) il vient donc :

$$R_n(z,\zeta) = \left[\frac{dd^c\big(|z'-\zeta'|^2 + |g_z(\zeta')|^2\big)}{(4\pi)\ (|\zeta'|^2 + |g_z(\zeta')|^2)} - \frac{d\big(|z'-\zeta'|^2 + |g_z(\zeta')|^2\big) \wedge d^c\big(|z'-\zeta'|^2 + |g_z(\zeta')|^2\big)}{(4\pi)\ (|\zeta'|^2 + |g_z(\zeta')|^2)^2}\right]^n,$$

où la différentiation de $g_z(\zeta')$ porte uniquement sur ζ'. Le lemme 15.7 donne par construction $g_z(0) = D_0 g_z = 0$; le lemme de Schwarz implique alors les inégalités

$$|g_z(\zeta')| \leqslant |\zeta'|, \qquad \zeta' \in B'_z \ ;$$

$$\|D_{\zeta'} g_z(\zeta')\| \leqslant C(\lambda) \frac{|\zeta'|}{r(z)}, \qquad \zeta' \in \lambda B'_z, \quad 0 < \lambda < 1.$$

On observe maintenant que $R_n(z,\zeta) \equiv 0$ si $g_z \equiv 0$. Il s'ensuit pour $\zeta' \in \frac{1}{2} B'_z$ l'inégalité

$$\|R_n(z,\zeta)\| \leqslant \frac{C_{12}\ |\zeta'|\ r(z)^{-1}}{\big(|\zeta'|^2 + |g_z(\zeta')|^2\big)^n} \leqslant \frac{C_{12}\ r(z)^{-1}}{|z-\zeta|^{2n-1}},$$

qui complète l'estimation du lemme 15.9. La formule classique de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n$ donne d'autre part

$$dd^c K_n(z',\zeta') = [\Delta].$$

Par un calcul analogue à celui ci-dessus, on obtient l'inégalité

$$\|K_n(z,\zeta) - K_n(z',\zeta')\| \leqslant \frac{C_{13}\ r(z)^{-1}}{|z-\zeta|^{2n-3}},$$

et pour chaque différentiation de K_n l'exposant de $|z-\zeta|$ s'accroît d'une unité. On voit donc que $dd^c K_n - [\Delta]$ est à coefficients L^1_{loc} sur $M \times M$, et en conséquence il ne porte pas de masse sur Δ. La preuve est achevée. □

Proposition 15.11. – *Si T est fermé, alors*

$$dd^c V_T = T + \Theta_T \qquad \text{où} \quad \Theta_T(z) = \int_M R_n(z,\zeta) \wedge T(\zeta) \geqslant 0.$$

En particulier, V_T est psh.

Démonstration. Soit $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\chi(t) = 1$ pour $t < 1$, $\chi(t) = 0$ pour $t > 2$, et soit w une $(n-1,n-1)$ forme $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur M. L'écriture (15.8) nous donne

$$\int_M V_T\ dd^c w = \lim_{r \to +\infty} I(r),$$

$$I(r) = \int_{M\times M} \chi\Big(\frac{|\zeta|}{r}\Big)\ T(\zeta) \wedge \big(K_n(z,\zeta) - H_n(\zeta)\big) \wedge dd^c w(z).$$

Le théorème de Stokes et le lemme 15.9 impliquent

$$\begin{aligned}
I(r) &= \int_{M\times M} dd^c\Big[\chi\Big(\frac{|\zeta|}{r}\Big)\ T(\zeta) \wedge K_n(z,\zeta)\Big] \wedge w(z) \\
&= \int_{M\times M} \chi\Big(\frac{|\zeta|}{r}\Big)\ T(\zeta) \wedge \big([\Delta] + R_n(z,\zeta)\big) \wedge w(z) \\
&\quad + \int_{M\times M} d\Big[\chi\Big(\frac{|\zeta|}{r}\Big)\Big] \wedge T(\zeta) \wedge d^c K_n(z,\zeta) \wedge w(z) \\
&\quad - \int_{M\times M} d^c\Big[\chi\Big(\frac{|\zeta|}{r}\Big)\Big] \wedge T(\zeta) \wedge d K_n(z,\zeta) \wedge w(z) \\
&\quad + \int_{M\times M} dd^c\Big[\chi\Big(\frac{|\zeta|}{r}\Big)\Big] \wedge T(\zeta) \wedge K_n(z,\zeta) \wedge w(z)
\end{aligned}$$

car $dT = d^cT = 0$. Pour justifier ce calcul, on peut d'abord supposer que T est de classe $\mathcal{C}^\infty$, quitte à régulariser ensuite T au voisinage du support de $\chi\big(\frac{|\zeta|}{r}\big) \subset \{|\zeta| \leqslant 2r\}$. On utilise maintenant (15.4) et les majorations évidentes

$$\Big\| d\chi\Big(\frac{|\zeta|}{r}\Big)\Big\| = O\Big(\frac{1}{r}\Big), \qquad \Big\| dd^c\chi\Big(\frac{|\zeta|}{r}\Big)\Big\| = O\Big(\frac{1}{r^2}\Big),$$
$$\| d^cK_n(z,\zeta)\| = O\Big(\frac{1}{|z-\zeta|^{2n-1}}\Big), \qquad \| dd^cK_n(z,\zeta)\| = O\Big(\frac{1}{|z-\zeta|^{2n-2}}\Big), \quad n \neq 1$$

pour voir que les deux dernières intégrales dans le calcul de $I(r)$ admettent une majoration de la forme $O(r^{-2})$. On a donc la formule attendue

$$\lim_{r\to+\infty} I(r) = \int_M T(\zeta)\wedge w(\zeta) + \int_{M\times M} T(\zeta)\wedge R_n(z,\zeta)\wedge w(z). \qquad \square$$

Démonstration du théorème 15.3. D'après la proposition 15.2 et le lemme 15.6, le courant Θ_T est positif fermé à croissance minimale. On peut donc construire par récurrence sur k des fonctions psh V_k et des courants T_k positifs fermés à croissance minimale tels que

$$T_0 = T, \qquad V_k = V_{T_{k-1}}, \qquad T_k = \Theta_{T_{k-1}},$$
$$dd^cV_k = T_{k-1} + T_k.$$

Effectuons la somme alternée de ces identités. Pour les indices impairs il vient :

$$dd^c\big(V_1 - V_2 + \cdots - V_{2k} + V_{2k+1}\big) = T + T_{2k+1} \geqslant 0,$$

et le lemme 15.15 ci-dessous implique que la fonction psh $V = V_1 - V_2 + \cdots + V_{2k+1}$ est à croissance minimale. D'après la proposition 15.11, on a la relation de récurrence

$$T_{k+1}(z) = \int_M R_n(z,\zeta)\wedge T_k(\zeta).$$

On exploite maintenant le fait que R_n est un noyau régularisant de type convolution.

Lemme 15.12. — *On a les propriétés suivantes.*

(a) *Pour tout entier k, $1 \leqslant k < 2n$, il existe des constantes $A_k, B_k \geqslant 0$ telles que pour tout $\varepsilon \in\,]0,1[$ on ait*

$$\|T_k(z)\| \leqslant A_k(1+|z|)^{B_k}\Big[\varepsilon^{-2} + \int_{|\zeta-z|<\varepsilon\, r(z)} \frac{T(\zeta)\wedge\beta(\zeta)^{n-1}}{|\zeta-z|^{2n-k}}\Big].$$

où $r(z) = C_6(1+|z|)^{-C_7}$ [cf. lemme 15.7].

(b) *Pour $k \geqslant 3$ le courant T_k est à coefficients continus et*

$$\|T_k(z)\| = O\big((1+|z|)^{B_k}\big).$$

Démonstration.

(a) On raisonne par récurrence sur k. Posons

$$\sigma_k(z,r) = \int_{|\zeta-z|<r} T_k(\zeta)\wedge\beta(\zeta)^{n-1}.$$

On sait que la fonction $r\mapsto r^{2-2n}\sigma_k(z,r)$ est croissante et qu'elle admet pour limite $\int_M T_k\wedge\omega^{n-1} < +\infty$ quand $k\to+\infty$. Écrivons $T_{k+1}(z) = I_1(z)+I_2(z)$ où

$$I_1(z) = \int_{|\zeta-z|\geqslant\varepsilon\, r(z)} R_n(z,\zeta)\wedge T_k(\zeta),$$
$$I_2(z) = \int_{|\zeta-z|<\varepsilon\, r(z)} R_n(z,\zeta)\wedge T_k(\zeta).$$

On utilise maintenant le lemme 15.9 pour estimer $I_1(z)$ et $I_2(z)$. La norme $\|I_1(z)\|$ est majorée à une constante près par

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon\, r(z)}^{+\infty}\frac{d\sigma_k(z,r)}{r^{2n}} &\leqslant 2n\int_{\varepsilon\, r(z)}^{+\infty}\frac{\sigma_k(z,r)}{r^{2n+1}}\,dr\\ &\leqslant \frac{n}{\varepsilon^2 r(z)^2}\int_M T_k\wedge\omega^{n-1} = O\big(\varepsilon^{-2}(1+|z|)^{2C_7}\big),\end{aligned}$$

tandis que

$$\|I_2(z)\| \leqslant C_{10}(1+|z|)^{C_{11}}\int_{|\zeta-z|<\varepsilon\, r(z)}\frac{\|T_k(\zeta)\|\ \beta(\zeta)^n}{|\zeta-z|^{2n-1}}. \tag{15.13}$$

Lorsque $k=0$, ceci démontre l'estimation (a) pour $\|T_1(z)\|$. Dans le cas général, l'estimation à l'ordre k combinée à (15.13) entraîne

$$\|I_2(z)\| \leqslant C_{14}(1+|z|)^{B_k+C_{11}}\big(\varepsilon^{-2}I_3(z)+I_4(z)\big)$$

avec

$$I_3(z) = \int_{|\zeta-z|<\varepsilon\, r(z)}\frac{\beta(\zeta)^n}{|\zeta-z|^{2n-1}},$$
$$I_4(z) = \int_{|\zeta-z|<\varepsilon\, r(z)}\frac{\beta(\zeta)^n}{|\zeta-z|^{2n-1}}\int_{|w-\zeta|<\varepsilon\, r(\zeta)}\frac{T(w)\wedge\beta(w)^{n-1}}{|w-\zeta|^{2n-k}}.$$

Pour ε assez petit, les inégalités $|\zeta-z|<\varepsilon\, r(z)$ et $|w-\zeta|<\varepsilon\, r(\zeta)$ impliquent $|w-z|<3\varepsilon\, r(z)$. Avec les notations du lemme 15.7, les intégrales $I_3(z)$ et $I_4(z)$ admettent donc les majorations

$$I_3(z)\leqslant C_{15}\int_{|\zeta'|<\varepsilon\, r(z)}\frac{\beta(\zeta')^n}{|\zeta'|^{2n-1}}\leqslant C_{16}\,\varepsilon\, r(z),$$
$$I_4(z)\leqslant C_{17}\int_{|w-z|<3\varepsilon\, r(z)} T(w)\wedge\beta(w)^{n-1}\int_{\zeta'\in\mathbb{C}^n}\frac{\beta(\zeta')^n}{|\zeta'|^{2n-1}|w'-\zeta'|^{2n-k}}.$$

Par homogénéité, on obtient

$$\int_{\zeta'\in\mathbb{C}^n}\frac{\beta(\zeta')^n}{|\zeta'|^{2n-1}|w'-\zeta'|^{2n-k}} = \frac{C_{18}}{|w'|^{2n-k-1}}\leqslant\frac{C_{19}}{|w-z|^{2n-k-1}},$$

et l'estimation (a) s'en déduit à l'ordre $k+1$.

(b) Utilisons l'inégalité (a) pour $k \geqslant 3$. Il vient

$$\int_{|\zeta - z| < \varepsilon\, r(z)} \frac{\beta(\zeta)^n}{|\zeta - z|^{2n-1}} \int_{|w-\zeta| < \varepsilon\, r(\zeta)} \frac{T(w) \wedge \beta(w)^{n-1}}{|w - \zeta|^{2n-k}}.$$

L'estimation (b) en résulte. On observe de plus que l'intégrale précédente converge uniformément vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. Cette intégrale correspond dans l'estimation (a) à l'itération du noyau R_n sur les boules $|\zeta - z| < \varepsilon\, r(z)$. Tous les autres termes apportant une contribution dans T_k font intervenir au moins une intégration sur le complémentaire $\{|\zeta - z| \geqslant \varepsilon\, r(z)\}$, et sont par suite continus en z. Donc T est continu dès que $k \geqslant 3$. □

Démonstration du théorème 15.3 (suite). À ce point, on a donc construit une fonction psh V de croissance minimale et un courant Θ positif fermé à coefficients continus tels que

$$dd^c V = T + \Theta, \qquad \|\Theta(z)\| = O\big((1+|z|)^{C_{20}}\big).$$

On va commencer par montrer qu'on peut supposer Θ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $(\Omega_j, g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un atlas localement fini de M, où $\Omega_j \Subset M$, où $g_j : \Omega_j \to \mathbb{C}^n$ est une application biholomorphe de Ω_j sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$, et soit $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité subordonnée à M. Il existe des fonctions psh τ_j sur Ω_j telles que $dd^c\tau_j = \Theta$. Désignons par $\tau_j^\varepsilon = \tau_j * \rho_\varepsilon$ une famille de régularisées $\mathcal{C}^\infty$ de τ_j relativement à la carte g_j, et posons

$$W = \sum_{j\in\mathbb{N}} \psi_j(\tau_j - \tau_j^{\varepsilon_j}), \qquad \varepsilon_j > 0,$$

Sur l'ouvert Ω_k il vient

$$dd^c W - \Theta = dd^c(W - \tau_k) = dd^c\bigg[\sum_{j\in\mathbb{N}} \psi_j(\tau_j - \tau_k - \tau_j^{\varepsilon_j})\bigg],$$

et puisque $\tau_j - \tau_k \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_j \cap \Omega_k)$, on voit que $dd^c W - \Theta \in \mathcal{C}^\infty_{1,1}(M)$. Comme le courant Θ est à coefficients continus, τ_j et les 1-formes $d\tau_j$, $d^c\tau_j$ sont continues. Lorsque les ε_j sont choisis assez petits, on obtient donc $|W| \leqslant 1$ et $-\omega \leqslant dd^c W \leqslant \omega$, avec $\omega = dd^c \log(1+|z|^2)$. La fonction $V' = V - W + \log(1+|z|^2)$ est alors psh à croissance minimale, et vérifie $dd^c V' = T + \Theta'$ où

$$\Theta' = \Theta - dd^c W + \omega$$

est un courant positif fermé de classe $\mathcal{C}^\infty$, tel que $\|\Theta'(z)\| = O\big((1+|z|)^{C_{20}}\big)$.

On suppose donc désormais que Θ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On applique alors les estimations L^2 de Hörmander-Nakano-Skoda [Nak], [Sk4] au courant Θ, considéré comme une $(n,1)$-forme fermée à valeurs dans le fibré holomorphe $E = T^*M \otimes \bigwedge^n TM$. Le fibré cotangent T^*M est semi-positif au sens de Griffiths pour la métrique β (c'est un quotient du fibré plat $T^*\mathbb{C}^N_{|M}$), donc d'après [DS] le fibré $T^*M \otimes \bigwedge^n T^*M$ est semi-positif au sens de Nakano. La proposition 10.1 (b) montre que le fibré E est lui-même semi-positif au sens de Nakano pour la métrique $\beta\, e^{-2\psi}$, où $\psi = \log\big(\sum_{K,L} |J_{K,L}|^2\big)$. D'après les estimations de [Sk4] appliquées au fibré hermitien

$$\Big(E, \beta\, \exp\big(-2\psi - C_{21}\log(1+|z|^2)\big)\Big),$$

on obtient l'existence d'une forme $u \in \mathcal{C}^\infty_{1,0}(M)$ telle que $\overline{\partial} u = \Theta$ et

$$\int_M |u|^2_\beta\ (1+|z|^2)^{-C_{22}}\ \beta^n < +\infty.$$

Pour achever la preuve du théorème 15.3 et en particulier de 15.3 (d), il suffit de convertir cette estimation L^2 en une estimation L^∞

$$|u|^2_\beta \leqslant C_{23}(1+|z|)^{-C_{24}}.$$

Compte-tenu que $\overline{\partial} u = \Theta$ admet une majoration en norme L^∞, il suffit d'utiliser l'inégalité ci-dessous, en se plaçant dans les boules $|\zeta - z| < \frac{1}{2}\, r(z)$ du lemme 15.7. □

Lemme 15.14. – *Soit v une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans la boule $B(r) \subset \mathbb{C}^n$. Alors*

$$|v(0)| \leqslant \left[\frac{n!}{\pi^n r^{2n}} \int_{B(r)} |v(z)|^2\, d\lambda(z)\right]^{1/2} + \frac{4n}{2n+1}\ r\cdot \sup_{B(r)} |\overline{\partial} v|.$$

Démonstration. Appliquons la formule de Cauchy avec reste à la fonction $t \mapsto v(tz)$, $z \in B(r)$, $t \in \mathbb{C}$, $|t| < 1$. Il vient

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(e^{i\theta}z)\, d\theta - \frac{1}{\pi}\int_{|t|<1} \frac{\overline{\partial} v(tz)\cdot z}{t}\, d\lambda(t), \\ |v(0)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |v(e^{i\theta}z)|\, d\theta + 2|z| \sup_{B(r)} |\overline{\partial} v|. \end{aligned}$$

Après calcul de la valeur moyenne (VM) pour $z \in B(r)$, on obtient

$$|v(0)| \leqslant \mathrm{VM}\big[\,|v|\ ;\ B(r)\big] + \frac{4n}{2n+1}\ r\cdot \sup_{B(r)} |\overline{\partial} v|,$$

et

$$\mathrm{VM}\big[\,|v|\ ;\ B(r)\big] \leqslant \mathrm{VM}\big[\,|v|^2\ ;\ B(r)\big]^{1/2}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Il ne nous reste plus qu'à vérifier le résultat élémentaire suivant, qui a été utilisé au cours de la démonstration.

Lemme 15.15. – *Soient V_1, V_2 deux fonctions psh à croissance minimale sur M. On suppose que $V = V_1 - V_2$ est psh. Alors V est à croissance minimale.*

Démonstration. D'après le théorème de normalisation de Noether, il existe des fonctions polynomiales $f_1, \ldots, f_n$ sur M telles que $R(M) = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]/I(M)$ soit une algèbre entière sur $\mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$. Le morphisme $F = (f_1, \ldots, f_n) : M \to \mathbb{C}^n$ est donc propre et fini, et on a un encadrement

$$C_{25}(1 + |z|)^{C_{26}} \leqslant |F(z)| \leqslant C_{27}(1 + |z|)^{C_{28}}$$

avec $C_{25}, \ldots, C_{28} > 0$. Grâce à l'inégalité évidente

$$V \leqslant V_+ \leqslant F^*(F_* V_+)$$

il suffit de montrer que $F_* V_+$ est à croissance minimale dans $\mathbb{C}^n$. Comme

$$V_+ \leqslant (V_1)_+ + (V_2)_+ - V_2,$$

on en déduit pour la valeur moyenne de $F_* V_+$ sur la boule $B(r) \subset \mathbb{C}^n$ de centre 0 la majoration

$$\mathrm{VM}\big[F_* V_+ \,;\, B(r)\big] \leqslant \mathrm{VM}\big[F_*(V_1)_+ + F_*(V_2)_+ \,;\, B(r)\big] - \mathrm{VM}\big[F_* V_2 \,;\, B(r)\big].$$

Les fonctions $F_*(V_1)_+$, $F_*(V_2)_+$ sont psh à croissance minimale, tandis que la fonction $r \mapsto \mathrm{VM}[F_* V_2 \,;\, ; B(r)]$ est croissante. On obtient par conséquent une majoration

$$\mathrm{VM}\big[F_* V_+ \,;\, B(r)\big] \leqslant C_{29}\, \log_+ r + C_{30},$$

et le lemme se déduit des inégalités de moyenne

$$F_* V_+(z) \leqslant VM\big[F_* V_+ \,;\, B(z,r)\big] \leqslant 2^{2n}\ \mathrm{VM}\big[F_* V_+ \,;\, B(0,2r)\big] \leqslant C_{31} \log_+ r + C_{32}$$

avec $r := |z|$. □

Bibliographie

[Bi] E. Bishop, *Conditions for the analyticity of certain sets* ; Michigan Math. Jour. **11** (1964), pp. 289–304.

[Bo] N. Bourbaki, *Topologie générale, chap. 1 à 4* ; Hermann, Paris, 1971.

[Bu] D. Burns, *Curvatures of Monge-Ampère foliations and parabolic manifolds* ; Ann. of Math. **115** (1982), pp. 349–373.

[BT1] E. Bedford & B.A. Taylor, *The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère equation* ; Invent. Math. **37** (1976), pp. 1–44.

[BT2] E. Bedford & B.A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions* ; Acta Math. **149** (1982), pp. 1–41.

[Ce] U. Cegrell, *On the discontinuity of the complex Monge-Ampère operator* ; Proceedings Analyse Complexe, Toulouse 1983, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **1094**, pp 29–31 ; and C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. I Math. **296** (1983), pp. 869–871.

[CLN] S.S. Chern, H.I. Levine & L. Nirenberg, *Intrinsic norms on a complex manifold* ; Global Analysis (Papers in honor of K. Kodaira) pp. 119–139, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1969.

[De1] J.-P. Demailly, *Différents exemples de fibrés holomorphes non de Stein* ; sém. P. Lelong-H. Skoda (Analyse) 1976/77, Lecture Notes in Math. n°**694**, Springer-Verlag 1978, pp. 15–41.

[De2] J.-P. Demailly, *Un exemple de fibré holomorphe non de Stein à fibre* $\mathbb{C}^2$ *ayant pour base le disque ou le plan* ; Inv. Math. **48** (1978), pp. 293–302.

[De3] J.-P. Demailly, *Un exemple de fibré holomorphe non de Stein à fibre* $\mathbb{C}^2$ *au-dessus du disque ou du pian* ; Sém. P. Lelong, P. Dolbeault, H. Skoda (Analyse) 1983–84, Lecture Notes in Math. n°**1198**, Springer-Verlag 1984, pp. 98–104.

[De4] J.-P. Demailly, *Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques* ; Bull. Soc. Math. France **110** (1982), pp. 75–102.

[De5] J.-P. Demailly, *Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé* ; Ann. Inst. Fourier **32** 2(1982), pp. 37–66.

[DS] J.-P. Demailly & H. Skoda, *Relations entre les notions de positivité de P.A. Griffiths et S. Nakano pour les fibrés vectoriels* ; Sém. P. Lelong-H. Skoda (Analyse) 1978/79, Lect. Notes in Math. **822**, Springer, 1980.

[Di] J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique, tome 2* ; Coll. Sup., Presses Univ. de France, 1974.

[EM] H. El Mir, *Sur le prolongement des courants positifs fermés* ; Thèse de Doctorat Univ. de Paris VI (nov. 1982), publiée aux Acta Math., vol. **153** (1984), pp. 1–45 ; cf. aussi Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, série I, t. **294** (1er février 1982) pp. 181–184 et t. **295** (18 oct. 1982) pp. 419–422.

[FN] J.E. Fornaess & R. Narasimhan, *The Levi problem on complex spaces with singularities* ; Math. Ann. **248** (1980), pp. 47–72.

[Go] J.E. Goodman, *Affine open subsets of algebraic varieties and ample divisors* ; Ann. of Math. **89** (1969), pp. 160-183.

[Gr] H. Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds* ; Ann. of Math. **68** (1958), pp. 460-472.

[Hi] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety* ; I-II, Ann. of Math. **79** (1964), pp. 109–326.

[Hö1] L. Hörmander, L^2 *estimates and existence theorems for the operator* ; Acta Math. **113** (1965), pp. 89–152.

[Hö2] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables* ; 2nd edition, North Holland, vol. **7**, 1973.

[Ki] C.O. Kiselman, *Sur la définition de l'opérateur de Monge- Ampère complexe* ; Proceedings Analyse Complexe, Toulouse 1983, Lecture Notes in Math. **1094**, pp. 139–150.

[Le1] P. Lelong, *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives* ; Gordon and Breach, New-York, et Dunod, Paris, 1969.

[Le2] P. Lelong, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières* (*n variables*) ; Presses de l'Univ. de Montréal, 1968, Sém. de Math. Supérieures, été 1967, n°28.

[Le3] P. Lelong, *Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans* $\mathbb{C}^n$; J. Anal. de Jérusalem **62** (1964), pp. 365–407.

[Mi] J. Milnor, *Morse Theory* ; Ann. of Math. Studies n°**51**, Princeton Univ. Press, 1963.

[Mok1] N. Mok, *Courbure bisectionnelle positive et variétés algébriques affines* ; C.R. Acad. Sc. Paris, Série I, t. **296** (21 mars 1983), pp. 473–476.

[Mok2] N. Mok, *An embedding theorem of complete Kähler manifolds of positive bisectional curvature onto affine algebraic varieties* ; Bull. Sac. Math. France, t. **112** (1984), pp. 197–258.

[Mok3] N. Mok, *A survey on noncompact Kähler manifolds of positive curvature* ; Proc. of Symposia in Pure Math. held at Madison in 1982, Several Complex Variables, Vol. **41**, Amer. Math. Soc., Providence, 1984, pp. 151–162.

[MSY] N. Mok, Y.T. Siu & S.T. Yau, *The Poincaré-Lelong equation on complete Kähler manifolds* ; Comp. Math., Vol. **44**, fasc. 1–3 (1981), pp. 183–218.

[Nak] S. Nakano, *Vanishing theorems for weakly* 1*-complete manifolds II* ; Publ. R.I.M.S., Kyoto University, 1974, pp. 101–110.

[Nar] R. Narasimhan, *Introduction to the theory of analytic spaces* ; Lecture Notes in Math. n°**25**, 1966, Springer-Verlag.

[Sib] N. Sibony, *Quelques problèmes de prolongement de courants en Analyse complexe* ; Duke Math. J. **52**, Number 1 (1985), pp. 157–197.

[SW] N. Sibony & P.M. Wong, *Some remarks on the Casorati- Weierstrass theorem* ; Ann. Pol on. Math. **39** (1981), pp. 165–174.

[Si1] C.L. Siegel, *Meromorphe Funktionen auf eompakten analytischen Mannigfaltigkeiten* ; Göttinger Nachr. (1955), pp. 71–77.

[Si2] C.L. Siegel, *On meromorphic functions of several variables* ; Bull. Calcutta Math. Soc. **50** (1958), pp. 165–168.

[SY] Y.T. Siu & S.T. Yau, *Complete Kähler manifolds with non positive curvature of faster than quadratic decay* ; Ann. of Math. **105** (1977), pp. 225–264.

[Sk1] H. Skoda, *Estimations L2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ et applications arithmétiques* ; Sém. P. Lelong (Analyse) 1975/76, Lecture Notes in Math. n°**538**, Springer-Verlag 1977.

[Sk2] H. Skoda, *Fibrés holomorphes à base et à fibre de Stein* ; Inv. Math. **43** (1977), pp. 97–107.

[Sk3] H. Skoda, *Morphismes surjectifs et fibrés linéaires semi-positifs* ; Sém. P. Lelong, H. Skoda (Analyse) 1976/77, Lecture Notes in Math. n°**694**, Springer-Verlag 1978.

[Sk4] H. Skoda, *Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi- positifs* ; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. **11** (1978), pp. 577–611.

[Sk5] H. Skoda, *Prolongement des courants positifs fermés de masse finie* ; Invent. Math. **66** (1982), pp. 361–376.

[Sp] E.H. Spanier, *Algebraic topology* ; Mc Graw-Hill, 1966.

[Stl] W. Stoll, *The growth of the area of a transcendental analytic set, I and II* ; Math. Ann. **156** (1964), pp. 47–78 and pp. 144–170.

[St2] W. Stoll, *The characterization of strictly parabolic manifolds* ; Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, s. IV, vol. **VII**, n°1 (1980), pp. 87–154.

[Th] P. Thie, *The Lelong number of a point of a complex analytic set* ; Math. Ann. **172** (1967), pp. 269–312.

Jean-Pierre Demailly
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S.
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex

Mémoires de la Société Mathématique de France
Nouvelle série

1980

1. J. Briançon, A. Galligo, M. Granger – Déformations équisingulières des germes de courbes
2. D. Bertrand, M. Waldschmidt – Fonctions abéliennes et nombres transcendants
3. Y. Félix – Dénombrement des types de K-homotopie
4. L. Bégueri – Dualité sur un corps local

1981

5. S. Ochanine – Signature modulo-16, invariants de Kervaire généralisés
6. Nguyen Tien Dai, Nguyen Huu Duc, F. Pham – Singularités non dégénérées des systèmes de Gauss-Manin réticulés

1982

7. P. Ellia – Sur les fibrés uniformes de rang $(n+1)$ sur $\mathbb{P}^n$

1983

8. M. Granger – Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels

9/10. S. Halperin – Lectures on Minimal Models

11/12. G. Henniart – La conjecture de Langlands locale pour GL(3)

1984

13. D. Bertrand, M. Emsalem, F. Gramain, M. Huttner, M. Langevin, M. Laurent, M. Mignotte, J.-C. Moreau, P. Philippon, E. Reyssat, M. Waldschmidt – Les nombres transcendants
14. G. Dloussky – Structure des surfaces de Kato
15. M. Duflo, P. Eymard, G. Schiffmann – Analyse harmonique sur les groupes de Lie et les espaces symétriques
16. F. Delon, D. Lascar, M. Parigot, G. Sabbagh (Editeurs), Logique, octobre 1983, Paris
17. Bernadette Perrin-Riou – Arithmétique des courbes elliptiques et théorie d'Iwasawa

1985

18. Corinne Blondel – Les représentations supercuspidales des groupes métaplectiques sur GL(2) et leurs caractères
19. J.-P. Demailly – Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines