Institut Fourier
Université de Grenoble I

SUR LES TRANSFORMEES DE FOURIER DE FONCTIONS CONTINUES ET LE THEOREME DE DE LEEUW - KATZNELSON - KAHANE

par Jean-Pierre DEMAILLY

Given any locally compact abelian group G and any function $\varphi \in L^2(\hat{G})$, we prove the existence of a function $f \in L^2(G)$ continuous and vanishing at infinity such that $|\hat{f}| \geq |\varphi|$ a.e. on $\hat{G}$.

0. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est d'étendre au cas d'un groupe localement compact abélien G quelconque le théorème suivant, dû à de Leeuw - Katznelson - Kahane [8] dans le cas d'un groupe G compact :

THEOREME LKK. - Pour toute fonction $\varphi \in L^2(\hat{G})$, il existe une fonction $f \in L^2(G)$ continue et tendant vers 0 à l'infini dont la transformée de Fourier vérifie $|\hat{f}| \geq |\varphi|$ presque partout sur $\hat{G}$.

Nous résolvons le problème en donnant des majorations explicites de f en normes $L^2(G)$ et $L^\infty(G)$ (cf. th. 2.1). On montrera en particulier que la norme L^2 de f peut être choisie arbitrairement proche de celle de φ, au détriment de la majoration L^∞ si le groupe G est compact, tandis qu'on peut choisir de plus $\|f\|_\infty$ arbitrairement petite lorsque G n'est pas compact.

Institut Fourier - B. P. 74 - 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
Laboratoire de Mathématiques Pures associé au CNRS - Tél. (76) 51-46-00

La démonstration suit la même démarche que celle de [8], aux modifications techniques près imposées par le cadre plus général dans lequel nous nous plaçons. Dans une première étape, nous étendons aux groupes localement compacts les inégalités classiques de Khintchine telles qu'elles sont exposées par exemple dans Edwards [4], vol. 2, § 14.2.1 p. 215.

De façon précise, nous montrons qu'on peut multiplier une fonction $\varphi \in L^2(\hat{G})$ par des constantes aléatoires de module 1 (variables de Steinhaus) sur une partition du support de φ, de sorte que $\hat{\varphi}$ vérifie des estimations en norme $L^q(G)$ pour tout $q \geq 2$. Ce résultat est obtenu par un raisonnement probabiliste classique, essentiellement contenu dans Zygmund [13], th. (8.16). Le reste de la preuve consiste en un argument général de sommation utilisé implicitement dans [8] et formalisé par Hruščev ; voir pour cela l'article de Kisliakov [9] qui démontre une intéressante généralisation du théorème LKK aux algèbres $A(D^n)$, $n = 1, 2$ du disque et du bidisque.

On montre enfin que le théorème d'Orlicz [10], Paley [11], Sidon [12] sous sa forme habituelle aussi bien que dans la version généralisée donnée par J.J.F. Fournier [5] et J.P. Bertrandias [1] est une conséquence de LKK . Nous obtenons en particulier l'énoncé suivant relatif aux espaces amalgamés (voir § 3 pour les définitions), qui contient OPS et améliore le théorème 3.3' de [5].

COROLLAIRE. - <u>Pour toute fonction</u> $\varphi \in \ell^2(L^\infty(\hat{G}))$, <u>il existe une fonction continue</u> $f \in C_c(G)$ <u>à support compact et une partie compacte</u> $L \subset \hat{G}$ <u>telle que</u> $|\hat{f}| * 1\!\!1_L \geq |\varphi|$.

C'est un problème ouvert de savoir si on peut obtenir exactement $|\hat{f}| \geq |\varphi|$, voir [5].

<u>Notations</u>. G désignera un groupe localement compact abélien quelconque, $\hat{G}$ son dual de Pontrjagin, m et $\hat{m}$ les mesures de Haar

respectives sur G et $\hat{G}$, $C(G)$ (resp. $C_0(G), C_c(G)$) l'espace des fonctions continues sur G (resp. nulles à l'infini, à support compact). On supposera toujours m et $\hat{m}$ normalisées de sorte que la formule de Plancherel ait lieu, avec $m(G) = 1$ si G est compact.

1. REARRANGEMENT EN PHASE DES TRANSFORMEES DE FOURIER DANS $L^2(\hat{G})$.

Soit φ une fonction dans $L^2(\hat{G})$. On va construire une partition dénombrable du support de φ puis, modifiant l'argument de φ par des constantes aléatoires de module 1 sur chaque sous-ensemble de la partition, on montrera que $\hat{\varphi}$ vérifie en moyenne des estimations dans $L^q(G)$, $q \in [2, +\infty[$.

La sommabilité de $|\varphi|^2$ entraîne que le support de φ est réunion dénombrable de compacts ; $\mathrm{Supp}\,\varphi$ peut donc être recouvert par une suite $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de translatés d'un voisinage compact K de l'élément neutre de $\hat{G}$. On a alors une partition

$$\mathrm{Supp}\,\varphi = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$$

avec $E_0 = K_0 \cap \mathrm{Supp}\,\varphi$; $E_j = (K_j \cap \mathrm{Supp}\,\varphi) \setminus (K_0 \cup \ldots \cup K_{j-1})$, $j \geq 1$. Si $\hat{G}$ est discret, on choisit les E_j égaux aux différents points du support de φ (de sorte que $\hat{m}(E_j) = 1$), sinon pour tout $\epsilon > 0$ on peut choisir K de mesure $\leq \epsilon$. On aura donc

$$\hat{m}(E_j) \leq \epsilon , \quad \forall j \in \mathbb{N} ,$$

avec la convention que $\epsilon = 1$ lorsque G est compact. Pour tout élément $t = (t_j) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ on considère le "réarrangement en phase" $\varphi_t \in L^2(\hat{G})$ défini par

$$\varphi_t(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi_j(\xi) e^{2\pi i t_j} ,$$

où $\varphi_j(\xi) = \varphi(\xi)$ si $\xi \in E_j$, $\varphi_j(\xi) = 0$ si $\xi \notin E_j$.

THEOREME 1.1. - <u>Pour tout entier</u> $p \geq 1$ <u>il existe</u> $t \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ <u>tel que</u>

$$\|\hat{\varphi}_t\|_{2p}^{2p} = \int_G |\hat{\varphi}_t(x)|^{2p} dx \leq \epsilon^{p-1} p!\, \|\varphi\|_2^{2p} .$$

<u>Preuve</u>. - Pour éviter les difficultés de convergence dans les calculs qui suivent, on tronque φ_t en posant $\varphi_{t,n} = \sum_{0\leq j\leq n} \varphi_j e^{2\pi i t_j}$. Appliquons alors la formule du p-nôme à l'égalité $\hat{\varphi}_{t,n}(x) = \sum_{0\leq j\leq n} \hat{\varphi}_j(x) e^{2\pi i t_j}$. Ceci donne

$$\hat{\varphi}_{t,n}(x)^p = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!} \hat{\varphi}_.^{\alpha}(x) e^{2\pi i t.\alpha}$$

où la sommation est étendue à l'ensemble des multi-indices $\alpha = (\alpha_j) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tels que $|\alpha| = \sum_{0\leq j\leq n} \alpha_j = p$, avec les notations $\alpha! = \alpha_0!\,\alpha_1!\dots\alpha_n!$, $\hat{\varphi}_.^{\alpha} = \hat{\varphi}_0^{\alpha_0}\dots\hat{\varphi}_n^{\alpha_n}$, $t.\alpha = \Sigma t_j\alpha_j$. Si dt est la mesure de probabilité naturelle sur $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ on obtient pour chaque $x \in G$ fixé :

$$\int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}} |\hat{\varphi}_{t,n}^p(x)|^2 dt = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!^2}{\alpha!^2} |\hat{\varphi}_.^{\alpha}(x)|^2 .$$

On intègre maintenant par rapport à x en utilisant le théorème de Fubini. Il vient

$$(1) \qquad \int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}} \|\hat{\varphi}_{t,n}\|_{2p}^{2p} dt = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!^2}{\alpha!^2} \|\hat{\varphi}_.^{\alpha}\|_2^2 .$$

D'après la formule de Plancherel et l'inégalité de Young $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$ appliquée $(p-1)$ fois on a

$$\|\hat{\varphi}_.^{\alpha}\|_{L^2(G)} = \|\varphi_0^{*\alpha_0} * \varphi_1^{*\alpha_1} \dots * \varphi_n^{*\alpha_n}\|_{L^2(\hat{G})}$$

$$\leq \|\varphi_0\|_1^{\alpha_0} \|\varphi_1\|_1^{\alpha_1} \dots \|\varphi_n\|_1^{\alpha_n - 1} \|\varphi_n\|_2 .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne d'autre part

$$\|\varphi_j\|_1 \leq m(E_j)^{\frac{1}{2}} \|\varphi_j\|_2 \leq \sqrt{\epsilon}\, \|\varphi_j\|_2 ,$$

d'où $\|\hat{\varphi}^{\alpha}_{\cdot}\|_2^2 \leq \epsilon^{p-1}\|\varphi_0\|_2^{2\alpha_0}\cdots\|\varphi_n\|_2^{2\alpha_n}$.

Majorons $\frac{p!^2}{\alpha!^2}$ par $p!\frac{p!}{\alpha!}$ dans l'inégalité (1). On obtient alors

$$\int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}} \|\hat{\varphi}_{t,n}\|_{2p}^{2p} dt \leq \epsilon^{p-1} p! \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!}\|\varphi_0\|_2^{2\alpha_0}\cdots\|\varphi_n\|_2^{2\alpha_n}$$

$$= \epsilon^{p-1} p!(\|\varphi_0\|_2^2+\ldots+\|\varphi_n\|_2^2)^p .$$

Après passage à la limite quand $n \to +\infty$ ceci donne

(2) $$\int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}} \|\hat{\varphi}_t\|_{2p}^{2p} dt \leq \epsilon^{p-1} p!\|\varphi\|_2^{2p} \quad ;$$

l'ensemble des $t \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ tels que $\|\hat{\varphi}_t\|_{2p}^{2p} \leq \epsilon^{p-1}p!\|\varphi\|_2^{2p}$ est donc de probabilité non nulle, ce qui achève la preuve du théorème 1.1. ∎

Il est clair qu'on peut améliorer le résultat du théorème 1.1 de manière à obtenir un réarrangement $\varphi_t \in \bigcap_{q\in[2,+\infty[} L^q(G)$. Il suffit pour cela de sommer les différentes inégalités (2) pour $p = 1,2,\ldots$, après multiplication par $\frac{1}{p!}\frac{(\lambda/\epsilon)^p}{\|\varphi\|_2^{2p}}$, $\lambda < 1$.

COROLLAIRE 1.2. - <u>Si</u> $\varphi \in L^2(\hat{G})$, $\varphi \neq 0$, <u>il existe pour tout</u> $\lambda < 1$ <u>un réarrangement en phase</u> φ_t <u>tel que</u>

$$\int_G \left[\exp\left(\frac{\lambda|\hat{\varphi}_t(x)|^2}{\epsilon\|\varphi\|_2^2}\right) - 1\right]dx \leq \frac{\lambda/\epsilon}{1-\lambda} .$$

Choisissons en particulier $\lambda = \frac{1}{2}$. Il vient pour tout $q \in [2,+\infty[$:

$$\int_G |\hat{\varphi}_t(x)|^q dx \leq \frac{1}{\epsilon}\sup_{u>0} u^q\left[\exp\left(\frac{u^2}{2\epsilon\|\varphi\|_2^2}\right) - 1\right]^{-1} = \epsilon^{\frac{q}{2}-1} A_q\|\varphi\|_2^q$$

avec $A_q = \sup_{u>0} u^q\left[\exp(\frac{u^2}{2}) - 1\right]^{-1}$.

Mais pour $q \geq 2$, on a

$$\exp(\frac{u^2}{2}) - 1 \geq \left(\exp(\frac{u^2}{q})-1\right)^{\frac{q}{2}} \geq (\frac{u^2}{q})^{\frac{q}{2}} ,$$

d'où $A_q \leq q^{\frac{q}{2}}$. On obtient donc le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.3. - <u>Pour tout</u> $\varphi \in L^2(\hat{G})$ <u>il existe un réarrangement</u> φ_t <u>tel que</u>

$$\|\hat{\varphi}_t\|_{L^q(G)} \leq \epsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \sqrt{q}\, \|\varphi\|_2 \quad , \quad \forall q \in [2,+\infty[\ .$$

La démonstration du théorème LKK repose essentiellement sur le théorème 1.1 et sur le lemme technique suivant qui en découle.

LEMME 1.4. - <u>Pour tout</u> $\varphi \in L^2(\hat{G})$ <u>et tout entier</u> $p \geq 2$ <u>il existe un réarrangement</u> φ_t <u>tel que</u>

(a) $\|\hat{\varphi}_t\|_2 = \|\varphi\|_2$

(b) $\left[\int_G (|\hat{\varphi}_t(x)| - \eta)_+^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq C_p \eta^{1-p} \|\varphi\|_2^p \quad , \quad \forall \eta > 0 \ ,$

<u>avec</u> $C_p = (\epsilon^{p-1} p!)^{\frac{1}{2}} \dfrac{(p-1)^{p-1}}{p^p}$.

<u>Preuve</u>. - L'égalité (a) provient de la formule de Plancherel. D'autre part, si φ_t est la fonction donnée par le théorème 1.1, l'intégrale de gauche dans l'inégalité (b) est majorée par

$$\epsilon^{p-1} p! \, \|\varphi\|_2^{2p} \sup_{u \geq \eta} \frac{(u-\eta)^2}{u^{2p}} \ ,$$

et un calcul élémentaire donne

$$\sup_{u \geq \eta} \frac{u-\eta}{u^p} = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \eta^{1-p} \ . \ \blacksquare$$

2. <u>DEMONSTRATION DU THEOREME LKK .</u>

Nous allons démontrer la version suivante du théorème, qui donne des estimations précises en normes L^2 et L^∞ .

THEOREME 2.1. - <u>Soit</u> M <u>un réel</u> ≥ 17 . <u>Alors, pour tout</u> $\varphi \in L^2(\hat{G})$ <u>il existe une fonction</u> $f \in L^2(G) \cap C_0(G)$ <u>telle que</u>

(a) $|\hat{f}| \geq |\varphi|$ presque partout sur $\hat{G}$,

(b) $\|f\|_2 \leq (1+\frac{1}{M})\|\varphi\|_2$,

(c) $\|f\|_\infty \leq (1+\sqrt{2M/e})\|\varphi\|_2$,

ou bien respectivement au lieu de (b) et (c) :

(b') $\|f\|_2 \leq 1{,}186\,\|\varphi\|_2$,

(c') $\|f\|_\infty \leq 3{,}685\,\|\varphi\|_2$.

L'idée de base pour la construction de f est de partir de la transformée de Fourier inverse $\check{\varphi}_t(x) = \hat{\varphi}_t(-x)$ donnée par le théorème 1.1, de rétracter cette fonction sur un disque borné, de corriger par addition d'une petite fonction dans $L^2(G)$, et enfin d'itérer ces opérations de manière convergente.

Preuve. - Remarquons d'abord qu'il suffit de répondre à la question avec $f \in L^2(G) \cap L^\infty(G)$ au lieu de $f \in C_0(G)$. En effet, quand $\varphi \in L^2(\hat{G})$ est donnée, il existe $\rho \in L^1(G)$ de norme 1 telle que $\varphi = \psi.\hat{\rho}$ avec $\psi \in L^2(\hat{G})$ de norme arbitrairement voisine de celle de φ (lemme 2.3 ci-dessous) ; si on peut trouver $f \in L^2(G) \cap L^\infty(G)$ telle que $|\hat{f}| \geq |\psi|$ alors $f*\rho \in L^2(G) \cap C_0(G)$ (lemme 2.4) et $|\widehat{f*\rho}| = |\hat{f}|\,|\hat{\rho}| \geq |\psi|\,|\hat{\rho}| = |\varphi|$. Les inégalités (b) et (c) restent valables avec les mêmes constantes, celles-ci n'étant pas optimales.

Explicitons maintenant le procédé de construction itératif de f ; on supposera $\|\varphi\|_2 = 1$ pour simplifier. Si η est un réel > 0 , on note $r_\eta : \mathbb{C} \to \{|z| \leq \eta\}$ la rétraction définie par

$$r_\eta(z) = z \quad \text{si} \quad |z| \leq \eta \,, \quad r_\eta(z) = \eta\frac{z}{|z|} \quad \text{si} \quad |z| \geq \eta \,.$$

Soient $\delta_j, \eta_j, \theta_j$, $j \in \mathbb{N}$ trois suites positives sommables qui seront précisées ultérieurement. On construit une suite de fonctions $g_j \in L^2(G)$ ayant les propriétés suivantes :

(3) si $f_j = r_{\eta_0}(g_0) + \ldots + r_{\eta_{j-1}}(g_{j-1}) + g_j$ alors

$$|\hat{f}_j| \geq |\varphi| \, [(1+\delta_0)\ldots(1+\delta_{j-1})]^{-1} \ ,$$

(4) $\|g_j\|_2 \leq \theta_j$,

(5) $\|(|g_j| - \eta_j)_+\|_2 \leq C_p \eta_j^{1-p} \theta_j^p$ (cf. lemme 1.4).

On pose $g_0 = \check{\varphi}_t$ où φ_t est la fonction donnée par le lemme 1.4. On a donc $\hat{f}_0 = \hat{g}_0 = \varphi_t$ et (3), (4), (5) sont vérifiés si $\theta_0 = \|\varphi\|_2 = 1$. Supposons construit g_j et soit $h_j = r_{\eta_0}(g_0) + \ldots + r_{\eta_j}(g_j)$. Alors

$$\|f_j - h_j\|_2 = \|g_j - r_{\eta_j}(g_j)\|_2 = \|(|g_j| - \eta_j)_+\|_2 \leq C_p \eta_j^{1-p} \theta_j^p \ .$$

On définit maintenant une fonction $\psi \in L^2(\hat{G})$ de manière à corriger $\hat{h}_j$ là où $\hat{h}_j$ ne vérifie pas l'inégalité (3) à l'ordre $j+1$. A cet effet, on pose

(6) $\psi(\xi) = 0$ si (cas favorable) $|\hat{h}_j(\xi)| \geq |\varphi(\xi)| \, [(1+\delta_0)\ldots(1+\delta_j)]^{-1}$

(7) $\psi(\xi) = 2|\varphi(\xi)| \, [(1+\delta_0)\ldots(1+\delta_j)]^{-1}$ sinon.

Dans ce dernier cas, on a

$$|\hat{h}_j(\xi)| < |\varphi(\xi)| \, [(1+\delta_0)\ldots(1+\delta_j)]^{-1} \leq \frac{|\hat{f}_j(\xi)|}{1+\delta_j}$$

d'après (3_j) , ce qui entraîne

$$0 \leq \psi(\xi) \leq \frac{2}{\delta_j} |\hat{f}_j(\xi) - \hat{h}_j(\xi)| \ ,$$

$$\|\psi\|_2 \leq \frac{2}{\delta_j} \|f_j - h_j\|_2 \leq 2C_p \delta_j^{-1} \eta_j^{1-p} \theta_j^p \ .$$

On pose alors $g_{j+1} = \check{\psi}_t$ où ψ_t est la fonction associée à ψ par le lemme 1.4. Cette fonction satisfera les estimations (4) et (5) à l'ordre $j+1$ si l'on définit la suite θ_j par la relation de récurrence

(8) $\theta_{j+1} = 2C_p \delta_j^{-1} \eta_j^{1-p} \theta_j^p$.

Vérifions enfin l'inégalité (3) pour $f_{j+1} = h_j + g_{j+1}$: par construction

$\hat{f}_{j+1} = \hat{h}_j + \psi_t$ et $|\psi_t| = \psi$, donc

$$|\hat{f}_{j+1}(\xi)| = |\hat{h}_j(\xi)| \geq |\varphi(\xi)|\,[(1+\delta_0)\ldots(1+\delta_j)]^{-1}$$

dans le cas favorable (6),

$$|\hat{f}_{j+1}(\xi)| \geq \psi(\xi) - |\hat{h}_j(\xi)| > |\varphi(\xi)|\,[(1+\delta_0)\ldots(1+\delta_j)]^{-1}$$

dans le cas (7).

D'après (3) et (4) la suite f_j converge dans $L^2(G)$ vers $f = \sum_{j=0}^{\infty} r_{\eta_j}(g_j)$; de plus f vérifie les inégalités

$$\|f\|_2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \quad , \quad \|f\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j \quad \text{et}$$

$$|\hat{f}| \geq |\varphi| \left[\prod_{j=0}^{\infty} (1+\delta_j) \right]^{-1} .$$

Ceci démontre le théorème 2.1 avec les constantes

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \cdot \prod_{j=0}^{\infty} (1+\delta_j) \quad \text{au lieu de} \quad 1 + \frac{1}{M}$$

$$B = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j \cdot \prod_{j=0}^{\infty} (1+\delta_j) \quad \text{au lieu de} \quad 1 + \sqrt{2M/e} \ ,$$

les suites δ_j , η_j , θ_j étant liées par l'unique relation

(8) $\quad \theta_{j+1} = 2C_p\,\delta_j^{-1}\,\eta_j^{1-p}\,\theta_j^p \quad , \quad \theta_0 = 1 .$

Il nous reste à préciser le choix des suites δ_j , η_j , θ_j de manière que celles-ci soient sommables. Dans ce but, on cherche à optimiser la constante B par un calcul de variations. On observe que $1+\delta_j < e^{\delta_j}$, d'où

$$B < \tilde{B} = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j \cdot \exp\left(\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \right) .$$

Supposons d'abord la suite (θ_j) fixée, et faisons varier δ_k , η_k , k étant un indice donné. La relation (8) impose

$\dfrac{d\delta_k}{\delta_k} + (p-1)\dfrac{d\eta_k}{\eta_k} = 0$ tandis que $\dfrac{d\tilde{B}}{\tilde{B}} = d\delta_k + \dfrac{d\eta_k}{\Sigma\eta_j}$. $\tilde{B}$ est donc minimum si $\delta_k = \dfrac{1}{p-1}\dfrac{\eta_k}{\Sigma\eta_j}$, ce qui entraîne $\eta_k = \lambda\,\delta_k$ où $\lambda = $ Cte , et

(9) $$\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j = \frac{1}{p-1} .$$

On obtient alors $\tilde{B} = \frac{\lambda}{p-1} \exp(\frac{1}{p-1})$, et la relation de récurrence $\theta_{j+1} = 2C_p \lambda^{1-p} \delta_j^{-p} \theta_j^p$ implique

$$\theta_0 = 1 = (2C_p \lambda^{1-p})^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\cdots-\frac{1}{p^j}} \delta_0 \delta_1^{p^{-1}} \cdots \delta_{j-1}^{p^{-j+1}} \theta_j^{p^{-j}} .$$

Comme $\delta_j < 1$ et $\theta_j < 1$ pour j assez grand, on voit que le produit infini des $\delta_j^{p^{-j}}$ converge nécessairement et que $\theta_j^{p^{-j}}$ a une limite $\ell \in]0,1]$. La valeur minimale de λ sera obtenue dans le cas où $\lim \theta_j^{p^{-j}} = 1$; on aura alors

(10) $$(2C_p \lambda^{1-p})^{\frac{\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}}} = (2C_p)^{\frac{1}{p-1}} \lambda^{-1} = \prod_{j=0}^{\infty} \delta_j^{p^{-j}} .$$

Fixons tous les éléments δ_j sauf δ_k et δ_{k+1} . Par différentiation (9) et (10) donnent

$$d\delta_k + d\delta_{k+1} = 0 , \quad -\frac{d\lambda}{\lambda} = p^{-k} \frac{d\delta_k}{\delta_k} + p^{-k-1} \frac{d\delta_{k+1}}{\delta_{k+1}} ,$$

λ sera donc minimal si $\delta_{k+1} = \frac{1}{p} \delta_k$; compte-tenu de (9) et (10) on obtient

$$\delta_k = p^{-k-1} , \quad (2C_p)^{\frac{1}{p-1}} \lambda^{-1} = \prod_{j=0}^{\infty} p^{-(j+1)p^{-j}} = p^{-\frac{p^2}{(p-1)^2}} .$$

Il en résulte en définitive les valeurs suivantes :

$$\delta_j = p^{-j-1} , \quad \eta_j = \lambda \delta_j , \quad \lambda = \left(2C_p p^{\frac{p^2}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} , \quad \theta_j = p^{-\frac{p}{p-1} j} ,$$

$$A = A_p = \frac{1}{1 - p^{-\frac{p}{p-1}}} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{p^j}\right) ,$$

$$B = \sqrt{e}\, B_p , \quad B_p = \left(2p!^{\frac{1}{2}} p^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{p^j}\right) .$$

Un calcul numérique permet de vérifier que la constante B_p optimale est obtenue pour $p = 11$ et que $B_{11} < 3,685$, $A_{11} < 1,186$; les estimations (b'), (c') du théorème 2.1. en résultent. D'autre part, on peut montrer par des calculs élémentaires que nous n'expliciterons pas (formule de Stirling !) que

$$A_p = 1 + \frac{2}{p} + O\left(\frac{\mathrm{Log}\,p}{p^2}\right) \quad , \quad B_p = \sqrt{\frac{p}{e}}\left(1 + O\left(\frac{\mathrm{Log}\,p}{p}\right)\right) \quad ,$$

avec les majorations effectives

$$A_p < 1 + \frac{2}{p} \quad \text{pour} \quad p \geq 18 \; , \quad B_p < 1 + \sqrt{\frac{p-1}{e}} \quad \text{pour} \quad p \geq 35 \; .$$

Ceci donne les inégalités (b), (c) du théorème pour tout réel $M \geq 17$, en prenant p tel que $p - 1 \leq 2M < p$. ■

Lorsque G n'est pas compact, choisissons $p \geq \frac{2}{\alpha}$ où $\alpha > 0$ est donné, et ϵ assez petit (i.e. $\sqrt{\epsilon}\, B_p \leq \alpha$). On obtient alors le résultat suivant.

THEOREME 2.2. - Soit G un groupe non compact. Pour tout $\varphi \in L^2(\hat{G})$ et tout $\alpha > 0$, il existe une fonction $f \in L^2(G) \cap C_0(G)$ telle que

(a) $|\hat{f}| \geq |\varphi|$ p.p. sur $\hat{G}$,

(b) $\|f\|_2 \leq (1+\alpha)\|\varphi\|_2$,

(c) $\|f\|_\infty \leq \alpha\|\varphi\|_2$.

Nous allons maintenant compléter la démonstration des théorèmes 2.1 et 2.2 en prouvant les deux lemmes invoqués au cours de celle-ci.

LEMME 2.3. - Pour toute fonction $f \in L^2(G)$ (resp. $\varphi = \hat{f} \in L^2(\hat{G})$) et tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $g \in L^2(G)$ (resp. $\psi \in L^2(\hat{G})$) et une fonction $\rho \in L^1(G)$ telles que $f = g * \rho$ (resp. $\varphi = \psi\hat{\rho}$) et

(a) $\rho \geq 0$, $\|\rho\|_1 = 1$

(b) $\|g\|_2 \leq (1+\epsilon)\|f\|_2$ (resp. $\|\psi\|_2 \leq (1+\epsilon)\|\varphi\|_2$) .

Il suffit de démontrer les assertions relatives à φ et ψ . Dans ce cas, on peut trouver une suite croissante de compacts $K_n \subset \hat{G}$ tels que

$$\operatorname{Supp} \varphi \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

et
$$\int_{K_n \setminus K_{n-1}} |\varphi(\xi)|^2 d\xi \leq 4^{-n} \varepsilon \|\varphi\|_2^2 \quad , \qquad \forall n \geq 1 \ .$$

L'ensemble $V_n = \{x \in G \ ; \ |\xi(x)-1| \leq \varepsilon \ , \ \forall \xi \in K_n\}$ est un voisinage fermé de l'unité dans G . Soit ρ_n une fonction continue ≥ 0 , d'intégrale 1 , de support $\subset V_n$. On a

$$|\hat{\rho}_n(\xi) - 1| = |\int_G \rho_n(x)(\overline{\xi(x)}-1)dx| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad \xi \in K_n \ ,$$

donc $|\hat{\rho}_n(\xi)| \geq 1-\varepsilon$ sur K_n . Définissons

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \rho_n * \tilde{\rho}_n \quad , \quad \text{avec} \quad \tilde{\rho}_n(x) = \rho_n(-x) \ .$$

Alors
$$\|\rho\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \|\rho_n\|_1^2 = 1$$

et
$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} |\hat{\rho}_n|^2 \geq \sum_{n\geq p} 2^{-n-1}(1-\varepsilon)^2 = 2^{-p}(1-\varepsilon)^2 \quad \text{sur} \quad K_p \ .$$

Posons enfin $\psi = \varphi/\hat{\rho}$ sur $\operatorname{Supp} \varphi$, $\psi = 0$ sur $\hat{G} \setminus \operatorname{Supp} \varphi$; il vient

$$\int_{\hat{G}} |\psi(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \left[\int_{K_0} |\varphi|^2 d\xi + \sum_{p\geq 1} 2^p \int_{K_p \setminus K_{p-1}} |\varphi|^2 d\xi \right]$$
$$\leq \frac{\|\varphi\|_2^2}{(1-\varepsilon)^2} \left(1 + \sum_{p\geq 1} 2^{-p} \varepsilon\right) = \frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \|\varphi\|_2^2 \ ,$$

d'où $\|\psi\|_2 \leq \dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \|\varphi\|_2 = (1+\varepsilon')\|\varphi\|_2$. ■

LEMME 2.4. - <u>Soit</u> $f \in L^2(G) \cap L^\infty(G)$ <u>et</u> $\rho \in L^1(G)$. <u>Alors</u> $f * \rho \in C_0(G)$.

En effet ρ est limite dans $L^1(G)$ de la suite

$$\rho_n = \rho \cdot \inf\left(1, \frac{n}{|\rho|}\right) \in L^1(G) \cap L^\infty(G) \subset L^2(G) \ .$$

Comme $f \in L^2(G)$ on a donc $f * \rho_n \in C_0(G)$, et

$$\|f * \rho - f * \rho_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\rho - \rho_n\|_1 \longrightarrow 0 . \blacksquare$$

Une conséquence immédiate du théorème LKK est le théorème d'Orlicz-Paley-Sidon [10,11,12] ci-dessous.

COROLLAIRE 2.5. - Soit ψ une fonction mesurable sur $\hat{G}$ telle que $\psi\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ pour tout $f \in L^2(G) \cap C_0(G)$. Alors $\psi \in L^2(\hat{G})$.

Le théorème OPS apparaît en fait nettement plus faible que LKK , puisqu'il n'exprime qu'une propriété de "densité" de $(L^2(G) \cap C_0(G))^\wedge$ dans $L^2(\hat{G})$, à savoir que ces espaces ont mêmes multiplicateurs à valeurs dans $L^1(\hat{G})$.

3. TRANSFORMEES DE FOURIER DE FONCTIONS CONTINUES A SUPPORT COMPACT.

Les résultats précédents permettent également d'étudier les multiplicateurs ponctuels de l'espace $\widehat{C_c(G)}$ des transformées de Fourier de fonctions continues à support compact, dans $L^1(\hat{G})$ ou dans $M_b(\hat{G})$ (espace des mesures bornées sur $\hat{G}$).

A cet effet, rappelons d'abord la définition des espaces amalgamés $\ell^p(L^q(G))$ et $\ell^p(M(G))$, cf. [2] et [7]. Soit E un voisinage compact de l'élément neutre de G et f une fonction mesurable sur G . On pose

$$\|f\|_{\ell^p(L^q)} = \left(\int_G \|1\!\!1_{x+E} f\|^p_{L^q(G)} dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p < \infty ,$$

$$\|f\|_{\ell^\infty(L^q)} = \sup_{x \in G} \|1\!\!1_{x+E} f\|_{L^q(G)} ,$$

où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique d'une partie A de G. Si μ est une mesure sur G, on définit de manière analogue

$$\|\mu\|_{\ell^p(M)} = \left(\int_G \|\mathbb{1}_{x+E}\,\mu\|^p_{M_b(G)}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

On vérifie aisément que les normes ainsi obtenues ne dépendent pas à équivalence près du voisinage E choisi.

La transformation de Fourier jouit de propriétés naturelles vis-à-vis de ces espaces (voir J.P. Bertrandias - C. Dupuis [3]) ; en particulier, elle envoie $\ell^1(L^2(G))$ dans $\ell^2(L^\infty(\hat{G}))$. Le théorème LKK permet d'établir inversement que l'image de ce morphisme dans $\ell^2(L^\infty(\hat{G}))$ est "assez grosse".

THEOREME 3.1. - <u>Soit</u> K <u>une partie compacte d'intérieur non vide dans</u> G. <u>Alors il existe un compact</u> $L \subset \hat{G}$ <u>et une constante</u> $C > 0$ <u>ayant la propriété suivante : pour toute fonction</u> $\varphi \in \ell^2(L^\infty(\hat{G}))$ <u>on peut trouver une fonction</u> $f \in C_K(G)$ <u>à support dans</u> K <u>telle que</u>

(a) $|\hat{f}| * \mathbb{1}_L \geq |\varphi|$,

(b) $\|f\|_\infty \leq C\|\varphi\|_{\ell^2(L^\infty)}$.

Ainsi $|\hat{f}|$ majore $|\varphi|$ en moyenne sur les translatés d'un compact. A notre connaissance, c'est un problème ouvert de savoir s'il existe $f \in C_c(G)$ telle que $|\hat{f}| \geq |\varphi|$ en tout point de $\hat{G}$, cf. J.J.F. Fournier [5], th. 3.3'.

<u>Démonstration</u>. - Il n'est pas restrictif de supposer que K est un voisinage compact de l'élément neutre de G.

<u>Première étape</u>. On va d'abord réduire le problème au cas où le groupe G est engendré par $\mathring{K}$.

Soit en effet U le sous-groupe ouvert de G engendré par $\overset{\circ}{K}$. Si $U^{\perp}$ est l'orthogonal de U dans $\hat{G}$, le dual de U peut s'identifier à $\hat{U} \simeq \hat{G}/U^{\perp}$, et la transformée de Fourier de tout élément $f \in L^2(G)$ à support dans U est constante sur les classes modulo $U^{\perp}$. Par ailleurs G/U est discret, donc $U^{\perp} \simeq \widehat{G/U}$ est compact. Remplaçons alors φ par

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \sup |\varphi| (\xi + U^{\perp}) \quad ;$$

il est clair que $\tilde{\varphi} \in \ell^2(L^{\infty}(\hat{G}/U^{\perp}))$ et on voit qu'il suffit de démontrer le théorème pour le groupe U à la place de G.

Deuxième étape.

On supposera donc que $\overset{\circ}{K}$ engendre le groupe G. Dans ce cas, on montre que le théorème 3.1 se ramène au théorème LKK appliqué à un groupe-quotient compact de G. Le théorème de structure pour les groupes localement compacts abéliens (Hewitt and Ross [6], vol. I, th. (9.3) p. 86) implique l'existence d'un sous-groupe discret de type fini $D \subset G$ tel que $D + \overset{\circ}{K} = G$, en particulier G/D est compact. L'orthogonal $D^{\perp}$ est un sous-groupe discret de $\hat{G}$ à quotient compact, $D^{\perp}$ admet donc un domaine fondamental E relativement compact dans $\hat{G}$. Pour tout $\delta \in D^{\perp}$ posons $\psi(\delta) = \sup\limits_{\delta+E} |\varphi|$. Alors $\psi \in \ell^2(D^{\perp})$ et $\|\psi\|_{\ell^2(D^{\perp})} \sim \|\varphi\|_{\ell^2(L^{\infty}(\hat{G}))}$. D'après le théorème LKK appliqué aux groupes duaux G/D et $D^{\perp}$, il existe une fonction $g \in C(G/D)$ telle que

$$|\hat{g}(\delta)| \geq \psi(\delta) \text{ pour tout } \delta \in D^{\perp} .$$

Dans la suite g sera identifiée à une fonction continue sur G, périodique modulo D.

Troisième étape.: construction de f par troncature de g.

Comme $D + \overset{\circ}{K} = G$, il existe une fonction $u \in C_K(G)$ dont les translatées modulo D constituent une partition de l'unité sur G, i.e.

(11) $\sum_{x \in D} u(x+y) = 1$ pour tout $y \in G$.

Soit $\theta \in C_c(\hat{G})$, $\|\theta\|_\infty = 1$, une fonction dont la transformée de Fourier inverse $\check{\theta}$ ne s'annule pas sur K . Posons alors

(12) $f = g\frac{u}{\check{\theta}}$ au voisinage de K , $f=0$ sur $G\backslash K$.

Compte-tenu de (11) et (12), on obtient pour tout $\delta \in D^\perp$:

$$\hat{f} * \theta(\delta) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\xi)\theta(\delta-\xi)d\xi = \int_G f(x)\check{\theta}(x)\overline{\delta(x)}dx$$

$$= \int_G g(x)u(x)\overline{\delta(x)}dx = \int_{G/D} g(\dot{x})\overline{\delta(\dot{x})}d\dot{x} = \hat{g}(\delta) .$$

Il s'ensuit par construction de g (cf. deuxième étape) :

$$\sup_{\delta+E} |\varphi| = \psi(\delta) \leq |\hat{g}(\delta)| \leq |\hat{f}| * |\theta|(\delta) .$$

Ceci entraîne $|\varphi| \leq |\hat{f}| * 1\!\!1_L$ dès lors que $L \supset E + \operatorname{Supp} \theta$, et le théorème 3.1 est démontré. ∎

Nous pouvons alors redémontrer le théorème d'Orlicz-Paley-Sidon dans la version généralisée obtenue indépendamment par J.J.F. Fournier [5] et J.P. Bertrandias [1].

COROLLAIRE 3.2. - <u>Soit</u> K <u>une partie compacte d'intérieur non vide dans</u> G <u>et</u> ψ <u>une fonction mesurable (resp. une mesure) sur</u> $\hat{G}$ <u>telle que</u> $\psi\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ <u>(resp.</u> $\psi\hat{f} \in M_b(\hat{G})$<u>)</u> <u>pour tout</u> $f \in C_K(G)$. <u>Alors</u> $\psi \in \ell^2(L^1(\hat{G}))$ <u>(resp.</u> $\psi \in \ell^2(M(\hat{G}))$).

<u>Démonstration</u>. - Le théorème du graphe fermé entraîne l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|\psi\hat{f}\|_{L^1(\hat{G})} \leq C\|f\|_{L^\infty(G)} \quad , \quad \forall f \in C_K(G) .$$

Etant donné $\eta \in \hat{G}$, il vient, après substitution de $f\eta$ à f :

$$\int_{\hat{G}} |\psi(\xi)|\,|\hat{f}(\xi-\eta)|d\xi \leq C\|f\|_{L^\infty(G)} .$$

Intégrons maintenant cette inégalité lorsque $-\eta$ décrit une partie compacte $L \subset \hat{G}$; on obtient

$$\int_{\hat{G}} |\psi(\xi)|\, |\hat{f}| * 1\!\!1_L(\xi) d\xi \leq C \hat{m}(L) \|f\|_{L^q(G)} .$$

Le théorème 3.1 entraîne alors que $\int_{\hat{G}} |\psi(\xi)|\, |\varphi(\xi)| d\xi < +\infty$ pour tout $\varphi \in \ell^2(L^\infty(\hat{G}))$, et par dualité on a donc $\psi \in \ell^2(L^1(\hat{G}))$. Même démonstration dans le cas où f est une mesure. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. BERTRANDIAS. - Sur les théorèmes de Littlewood et d'Orlicz-Paley-Sidon. Groupe de travail d'Analyse Harmonique. Recueil 1982-83, pp. III.1 - III.9.

[2] J.P. BERTRANDIAS, C. DATRY, C. DUPUIS. - Unions et intersections d'espaces L^p invariantes par translation et convolution ; Ann. Inst. Fourier, vol. 28, n° 2, 1978, pp. 53-84.

[3] J.P. BERTRANDIAS, C. DUPUIS. - Transformation de Fourier sur les espaces $\ell^p(L^{p'})$; Ann. Inst. Fourier, vol. 29, n° 1, 1979, pp. 189-206.

[4] R.E. EDWARDS. - Fourier series. A modern introduction. Vol. I et II ; Holt, Rinehart and Winston (1967) ; 2ème édition, Springer (1982).

[5] J.J.F. FOURNIER. - On the Hausdorff-Young theorem for amalgams ; Monatshefte für Math., 95 (1983), pp. 117-135.

[6] E. HEWITT and K. ROSS. - Abstract Harmonic Analysis, vol. 1 et 2 ; Springer-Verlag, tomes 115 (1963) et 152 (1970), Berlin.

[7] F. HOLLAND. - Harmonic analysis on amalgams of L^p and ℓ^q ; J. London Math. Soc., vol. 10, n° 2 (1975), pp. 295-305.

[8] K. DE LEEUW, Y. KATZNELSON, J.P. KAHANE. - Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues ; C.R.A.S. Paris, t. 285 (19 déc. 1977), série A 1001.

[9] S.B. KISLIAKOV. - Fourier coefficients of analytic functions defined up to the boundary ; preprint Université de Leningrad 1978 ; cf. aussi Théorie spectrale des fonctions et des opérateurs, Trudy Lenin Mat. Institut, Acad. Nauk SSSR (1981), vol. 155, pp. 77-94 (en russe).

[10] W. ORLICZ. - Beitrage zur Theorie der Orthogonalenentwicklungen, III ; Bull. Acad. Polon. Sci. (1932), pp. 229-238.

[11] R.E.A.C. PALEY. - A note on power series ; J. London Math. Soc., vol. 7 (1932), pp. 122-130.

[12] S. SIDON. - Ein satze uber die Fourierschen Reihen stetiger Functionen ; Math. Zeit., vol. 34 (1932), pp. 485-486.

[13] A. ZYGMUND. - Trigonometric series, vol. I ; Cambridge Univ. Press, New-York, 1959.

(juillet 84)