

ASYMPTOTIQUE DU SPECTRE POUR LES BOUTEILLES MAGNETIQUES EN GEOMETRIE HYPERBOLIQUE

Françoise Truc

Institut Fourier, Grenoble

Plan

- La formule asymptotique de Weyl : un lien entre classique et quantique
- Bouteilles magnétiques en mécanique classique
- Bouteilles magnétiques en mécanique quantique
 - asymptotique dans le cas euclidien
 - asymptotique dans le cas hyperbolique

La formule de Weyl

- Soit V une fonction continue de \mathbb{R}^d à valeurs positives , et $h \in]0, 1]$ un petit paramètre .

La formule de Weyl

- Soit V une fonction continue de \mathbb{R}^d à valeurs positives , et $h \in]0, 1]$ un petit paramètre .
- **Condition ND :** $V(x) \rightarrow +\infty$ quand $|x| \rightarrow +\infty$
 - $\forall h \in]0, 1]$, l'opérateur $H_h = -h^2 \Delta + V$ défini sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ est essentiellement auto-adjoint et à résolvante compacte
 - comportement asymptotique semi-classique de son spectre :

La formule de Weyl

- Soit V une fonction continue de \mathbb{R}^d à valeurs positives , et $h \in]0, 1]$ un petit paramètre .
- **Condition ND :** $V(x) \rightarrow +\infty$ quand $|x| \rightarrow +\infty$
 - $\forall h \in]0, 1]$, l'opérateur $H_h = -h^2\Delta + V$ défini sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ est essentiellement auto-adjoint et à résolvante compacte
 - comportement asymptotique semi-classique de son spectre :
$$N(\lambda, H_h) \sim h^{-d}(2\pi)^{-d}v_d \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda - V(x))_+^{d/2} dx \quad (h \rightarrow 0)$$
- $N(\lambda, H_h)$: nombre de valeurs propres inférieures à une énergie fixée λ .
- v_d : volume de la boule unité , W_+ : partie positive de W .

Remarques

Si l'on pose $h = 1$ la formule précédente donne l' asymptotique à grande énergie de l'opérateur $H_1 = -\Delta + V$:

$$N(\lambda, H_1) \sim_{\lambda \rightarrow +\infty} (2\pi)^{-d} v_d \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda - V(x))_+^{d/2} dx$$

Remarques

Dans les deux cas : correspondance asymptotique entre

- le nombre de valeurs propres inférieures à λ et
- le volume, dans l'espace des phases, de l'ensemble
 $\{(x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^d), \mathcal{H}(x, \xi) \leq \lambda\},$

$\mathcal{H}(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$ est le symbole principal de H_h , et aussi le Hamiltonien de la dynamique classique associée.

Que se passe-t-il pour un opérateur de Schrödinger dont le spectre est discret sans que la condition (ND) soit vérifiée?

Exemple

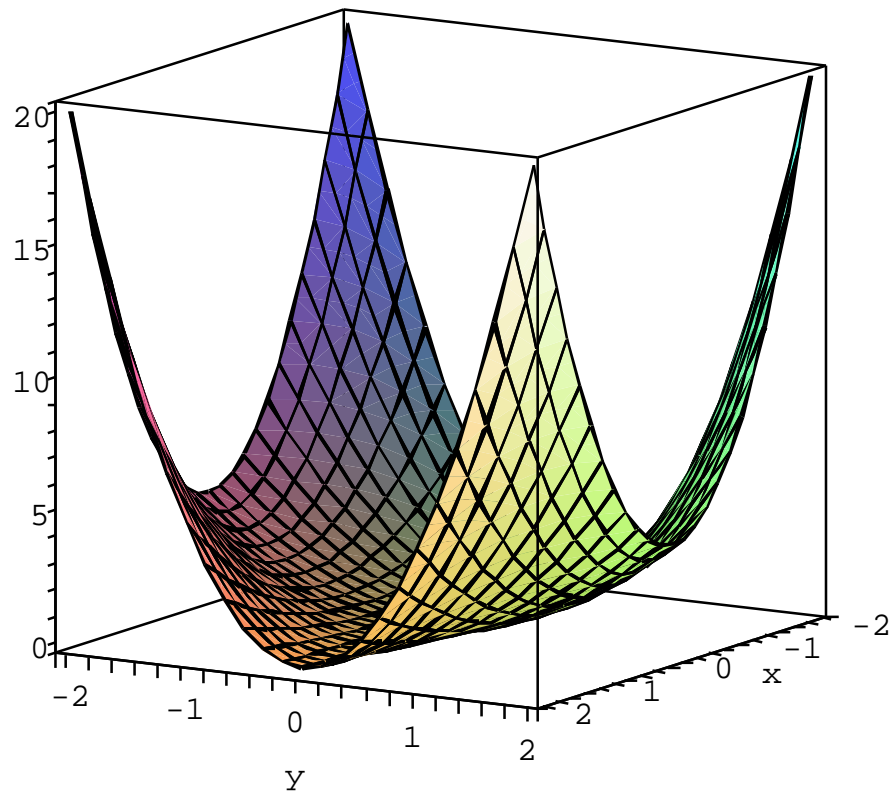
Si la condition (ND) n'est plus vraie, il se peut que le volume de $\{(x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^d), \mathcal{H}(x, \xi) \leq \lambda\}$ soit infini, ce qui enlève son sens à la formule de Weyl.

Exemple

Exemple : $V(y, z) = (1 + y^2) z^2 \quad x = (y, z) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple

Exemple : $V(y, z) = (1 + y^2) z^2 \quad x = (y, z) \in \mathbb{R}^2$.



Un autre exemple de dégénérescence

Laplaciens magnétiques $H_h(A) = ((h\nabla - iA))^2$.

● Dégénérescence :

$\mathcal{H}(x, \xi) = (\xi - A(x))^2$, le symbole principal de $H_h(A)$, s'annule sur une variété **non compacte** de $T^*(\mathbb{R}^m)$.

Un autre exemple de dégénérescence

Laplaciens magnétiques $H_h(A) = ((h\nabla - iA))^2$.

- Dégénérescence :

$\mathcal{H}(x, \xi) = (\xi - A(x))^2$, le symbole principal de $H_h(A)$, s'annule sur une variété **non compacte** de $T^*(\mathbb{R}^m)$.

- Quand le potentiel magnétique A vérifie des conditions de type "bouteille magnétique", le spectre de $H_h(A)$ est discret.

Un autre exemple de dégénérescence

Laplaciens magnétiques $H_h(A) = ((h\nabla - iA))^2$.

- Dégénérescence :

$\mathcal{H}(x, \xi) = (\xi - A(x))^2$, le symbole principal de $H_h(A)$, s'annule sur une variété **non compacte** de $T^*(\mathbb{R}^m)$.

- Quand le potentiel magnétique A vérifie des conditions de type "bouteille magnétique", le spectre de $H_h(A)$ est discret.

On peut alors définir la fonction de dénombrement $N(\lambda, H_h(A))$, et la question se pose de trouver une alternative à la formule de Weyl.

Bouteilles magnétiques en mécanique classique

- La trajectoire dans \mathbb{R}^3 d'une particule de masse m , de charge e , soumise à un champ magnétique \vec{B} est décrite par l'équation de Lorentz : $m\ddot{x} = e\dot{x} \wedge \vec{B}$.
- Lagrangien associé ($m = e = 1$) : $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \dot{x} \cdot A(x)$

Bouteilles magnétiques en mécanique classique

- La trajectoire dans \mathbb{R}^3 d'une particule de masse m , de charge e , soumise à un champ magnétique \vec{B} est décrite par l'équation de Lorentz : $m\ddot{x} = e\dot{x} \wedge \vec{B}$.
- Lagrangien associé ($m = e = 1$) : $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \dot{x} \cdot A(x)$
- Moments conjugués : $\xi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \implies \xi = \dot{x} + A(x)$
- Hamiltonien : $\mathcal{H}(x, \xi) = \xi \dot{x} - \mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(\xi - A(x))^2$.
- \vec{B} constant $\implies \mathcal{H}$ intégrable ,
Trois intégrales du mouvement : l'énergie \mathcal{H} , le rayon de Larmor $\rho = \frac{v_{\perp}}{B}$ et le moment magnétique $I = \frac{v_{\perp}^2}{2B}$.

Champ symétrique linéaire

$$\vec{B}(x, y, z) = (x, y, -2z) .$$

- Coordonnées cylindriques :

$$B = d(-r^2 z) \wedge d\theta \implies A = (A_r, A_\theta, A_z) = (0, -rz, 0) .$$

- Lignes de champ : $\theta = \text{constante}$ et $r^2 z = \text{constante}$.

- Moments conjugués : $(\xi_r, \xi_\theta, \xi_z) = (\dot{r}, r^2(\dot{\theta} - z), \dot{z})$

- Hamiltonien : $\mathcal{H}(r, \theta, z, \xi_r, \xi_\theta, \xi_z) = \frac{1}{2}(\xi_r^2 + \xi_z^2) + \frac{1}{2r^2}(\xi_\theta + r^2 z)^2 .$

Champ symétrique linéaire

$$\vec{B}(x, y, z) = (x, y, -2z) .$$

- Coordonnées cylindriques :

$$B = d(-r^2 z) \wedge d\theta \implies A = (A_r, A_\theta, A_z) = (0, -rz, 0).$$

- Lignes de champ : $\theta = \text{constante}$ et $r^2 z = \text{constante}$.

- Moments conjugués : $(\xi_r, \xi_\theta, \xi_z) = (\dot{r}, r^2(\dot{\theta} - z), \dot{z})$

- Hamiltonien : $\mathcal{H}(r, \theta, z, \xi_r, \xi_\theta, \xi_z) = \frac{1}{2}(\xi_r^2 + \xi_z^2) + \frac{1}{2r^2}(\xi_\theta + r^2 z)^2$.

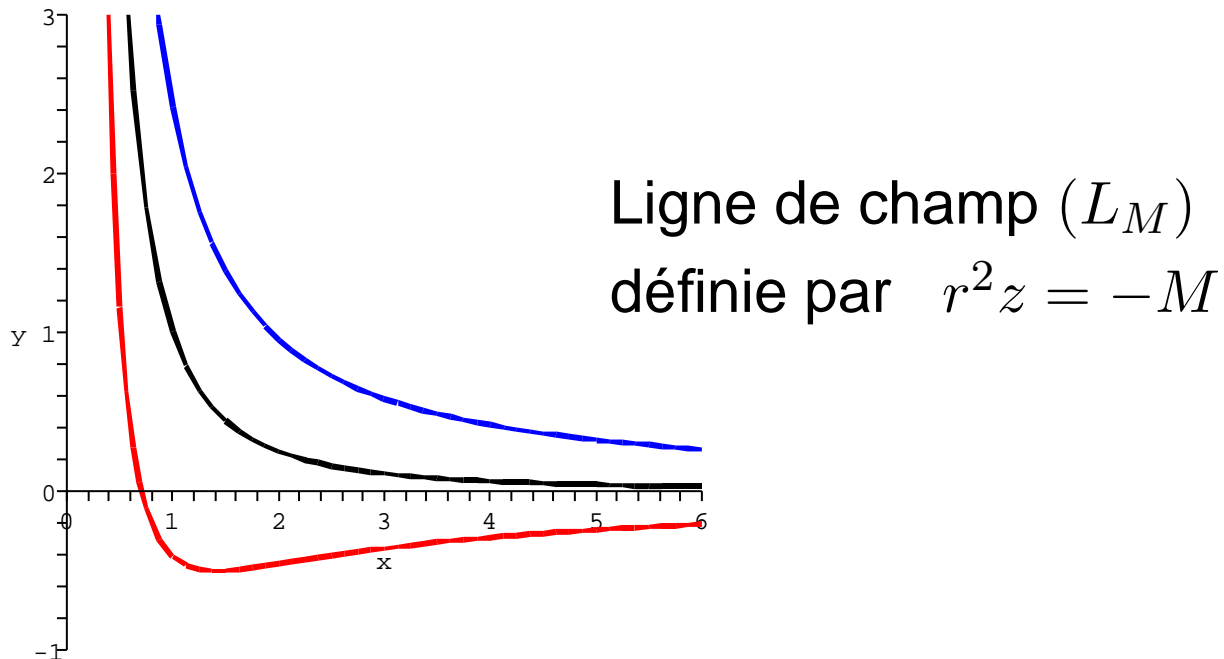
- $\dot{\xi}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \implies \xi_\theta$ intégrale première du mouvement.

- Nous sommes ramenés à l'étude d'un **hamiltonien à 2 degrés de liberté** :

$$\mathcal{H}_M(r, z, \xi_r, \xi_z) = \frac{1}{2}(\xi_r^2 + \xi_z^2) + \frac{(M + r^2 z)^2}{2r^2} .$$

Trajectoire et ligne de champ

$M = \xi_\theta = \xi_\theta(0)$ fixée par les C I, ainsi que $E = \mathcal{H}_M(0)$.



L'inégalité $\frac{(M+r^2 z)^2}{2r^2} < E$ contraint la trajectoire à rester dans une bande \mathcal{B} autour de (L_M) .

Le hamiltonien en coordonnées curvilignes

- Ω_M : le point unique pour lequel la norme B sur (L_M) est minimale .
- Nouveau système de coordonnées : $P(r, z) \implies P(u, v)$:
 - v : distance de $P(r, z)$ à la ligne de champ (L_M)
 - u : abcisse curviligne de la projection de P sur (L_M) , (Ω_M est choisi comme origine).

Le hamiltonien en coordonnées curvilignes

- Ω_M : le point unique pour lequel la norme B sur (L_M) est minimale .
- Nouveau système de coordonnées : $P(r, z) \implies P(u, v)$:
 - v : distance de $P(r, z)$ à la ligne de champ (L_M)
 - u : abscisse curviligne de la projection de P sur (L_M) , (Ω_M est choisi comme origine).
- Le hamiltonien $\mathcal{H}_M(u, v, \xi_u, \xi_v)$ peut être rendu proche de

$$\mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_u^2}{[1 + vk(u)]^2} \right) + \frac{1}{2} (\xi_v^2 + B^2(u, 0)v^2) .$$

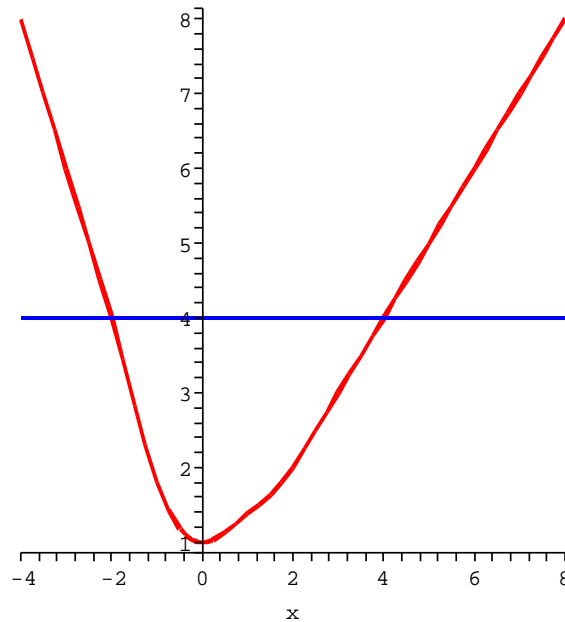
$k(u)$ courbure de (L_M) au point $(u, 0)$

Remarque

$$\mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v) \approx \frac{1}{2}\xi_u^2 + \frac{1}{2}\xi_v^2 + V(u, v) , \quad V(u, v) = \frac{1}{2}B^2(u, 0)v^2$$

Remarque

$$\mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v) \approx \frac{1}{2}\xi_u^2 + \frac{1}{2}\xi_v^2 + V(u, v), \quad V(u, v) = \frac{1}{2}B^2(u, 0)v^2$$



$$u \longrightarrow B(u, 0)$$

Quantification de Weyl \implies opérateur $H_h = -h^2\Delta + V$

V potentiel dégénéré

Action transversale

● Proposition : Pour toutes conditions initiales telles que

$$E < \frac{\epsilon^2}{16} |M|^{2/3} \quad (\text{CI})$$

- la distance v de la trajectoire à (L_M) est d'au plus ϵ
- il existe une constante $C(E, M)$ telle que

$$|\mathcal{H}_M(u, v, \xi_u, \xi_v) - \mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v)| < C\epsilon^3$$

Action transversale

- Proposition : Pour toutes conditions initiales telles que

$$E < \frac{\epsilon^2}{16} |M|^{2/3} \quad (\text{CI})$$

- la distance v de la trajectoire à (L_M) est d'au plus ϵ
- il existe une constante $C(E, M)$ telle que

$$|\mathcal{H}_M(u, v, \xi_u, \xi_v) - \mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v)| < C\epsilon^3$$

- Le hamiltonien $\mathcal{H}_u = \frac{1}{2} (\xi_v^2 + B^2(u, 0)v^2)$ représente à u fixé l'énergie d'un oscillateur harmonique . L'action correspondante est à 2π près l'aire de l'ellipse $\mathcal{H}_u = cte$ parcourue par le point (v, ξ_v) :

$$I_u = \frac{\xi_v^2 + B^2(u, 0)v^2}{2 B(u, 0)} .$$

Borner la trajectoire

On a

$$\bullet \mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_u^2}{[1 + vk(u)]^2} \right) + \frac{1}{2} (\xi_v^2 + B^2(u, 0)v^2) .$$

$$\bullet I_u = \frac{\xi_v^2 + B^2(u, 0)v^2}{2 B(u, 0)} .$$

Donc

$$\bullet \mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v) \approx \frac{1}{2} \xi_u^2 + B(u, 0) I_u$$

$$\bullet \text{La condition (CI) entraîne } B(u, 0) I_u < E + C \epsilon^3 .$$

\implies si I_u est minorée indépendamment du temps, on obtient une borne pour $B(u, 0)$ et donc pour la trajectoire puisque $B(u, 0)$ grandit avec u .

Théorème (T)

- Soit M fixé . Il existe $\epsilon_0 > 0$ et $K > 0$ tels que **la trajectoire de la solution est bornée**, si les conditions suivantes sont satisfaites

$$(CI) \quad E < \frac{\epsilon^2}{16} |M|^{2/3}, \quad (CI)' \quad I_u(0) > 2K\epsilon^3$$

pour un $\epsilon < \epsilon_0$.

Théorème (T)

- Soit M fixé . Il existe $\epsilon_0 > 0$ et $K > 0$ tels que **la trajectoire de la solution est bornée**, si les conditions suivantes sont satisfaites

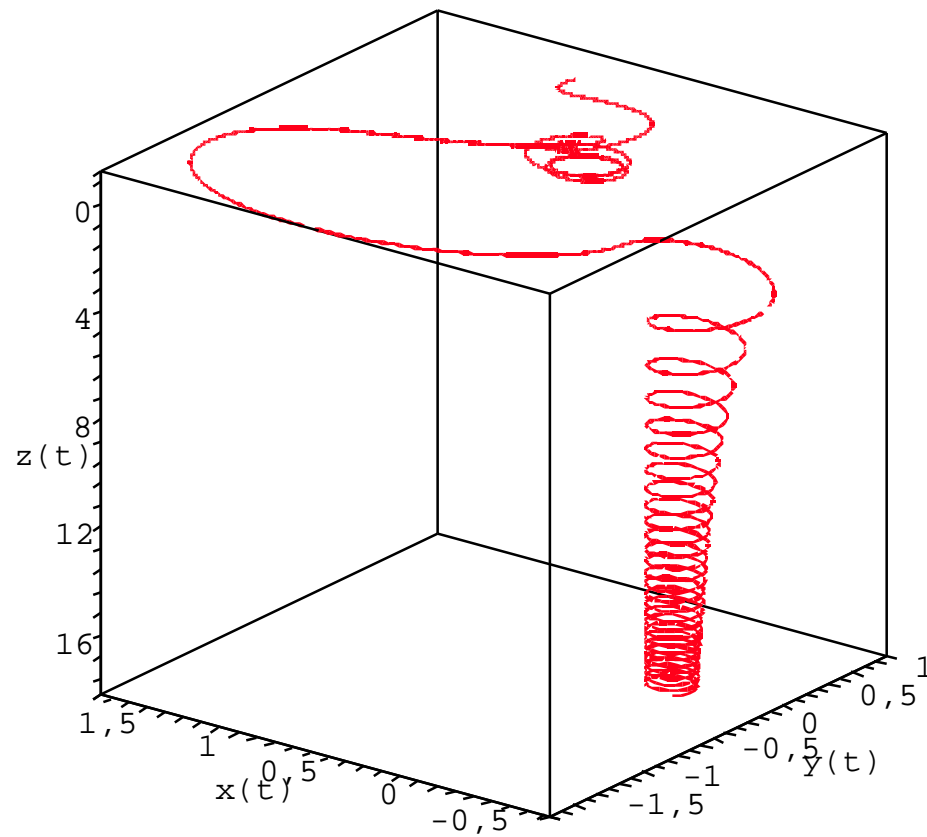
$$(CI) \quad E < \frac{\epsilon^2}{16} |M|^{2/3}, \quad (CI)' \quad I_u(0) > 2K\epsilon^3$$

pour un $\epsilon < \epsilon_0$.

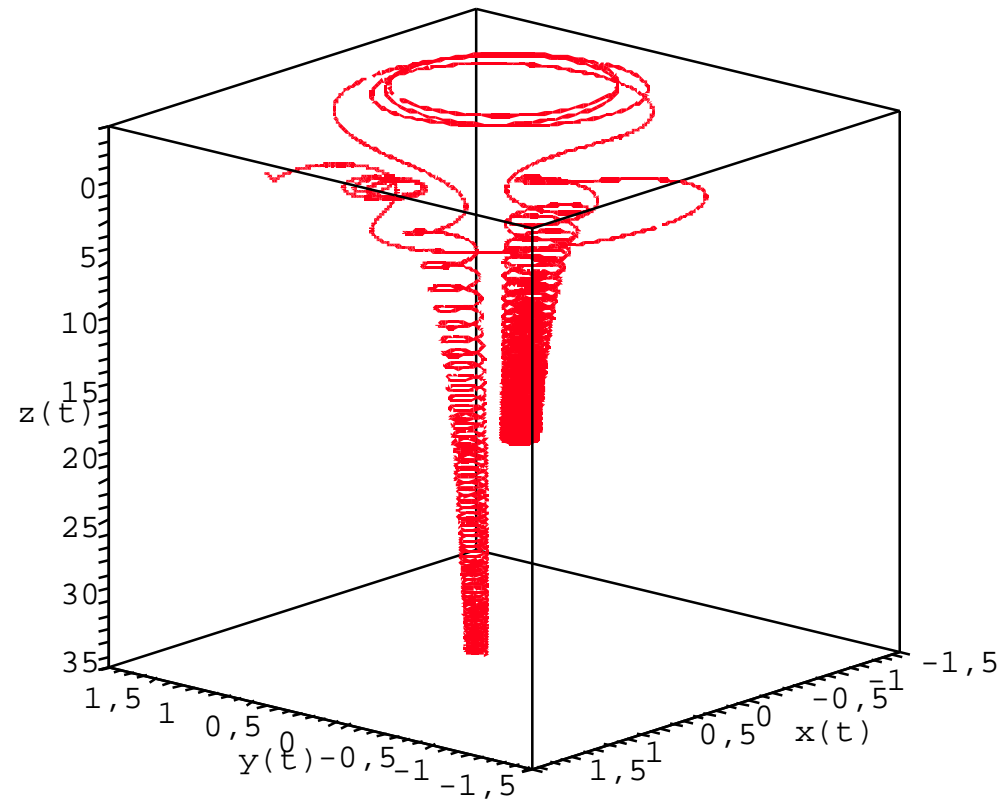
- Les conditions (CI) et $(CI)'$ sont compatibles.
 - $(CI) \implies$ vitesses petites en comparaison des positions
 - $(CI)' \implies$ vitesse orthogonale à la ligne de champ pas trop faible par rapport à l'énergie totale.
- Exclut le cas $z(0) = \dot{z}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, (départ sur la ligne de champ (L_0) (la droite $\theta = \theta(0)$, $z = 0$) avec une vitesse parallèle à cette ligne). (L_0) peut être vue comme le fonds de puits pour le potentiel dégénéré $V(u, v) = B(u, 0) v^2$.

Trajectoire

$M_0(1, 1, 0)$ et $V_0(0, 15; -0, 25; 0, 25)$



Trajectoire (suite)



Bouteilles magnétiques en mécanique quantique

- (M, g) variété riemannienne connexe de dimension d
- $A = \sum_{j=1}^d a_j dx_j$ 1-forme réelle sur M .
- Pour $h \in]0, 1[$ on définit $H_h(A) = (ih d + A)^*(ih d + A)$,
 $(ih d + A)u = ih du + uA$, $\forall u \in C_0^\infty(M)$.
- Le champ magnétique est la 2-forme exacte $B = dA$.

Bouteilles magnétiques en mécanique quantique

- (M, g) variété riemannienne connexe de dimension d
- $A = \sum_{j=1}^d a_j dx_j$ 1-forme réelle sur M .
- Pour $h \in]0, 1[$ on définit $H_h(A) = (ih d + A)^*(ih d + A)$,
 $(ih d + A)u = ih du + uA$, $\forall u \in C_0^\infty(M)$.
- Le champ magnétique est la 2-forme exacte $B = dA$.
- A la 2-forme B on associe un opérateur linéaire L_B
 $dA(X, Y) = g(L_B.X, Y)$; $\forall X, Y \in TM \times TM$.
- L'intensité du champ magnétique **b** est alors

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} \text{tr} \left((L_B^* L_B)^{1/2} \right) .$$

Bouteilles magnétiques, suite de la définition

- Changement de jauge

Si $A' = A + d\phi$ est un autre potentiel magnétique associé à B , les opérateurs $H_h(A)$ et $H_h(A')$ sont unitairement équivalents.

Bouteilles magnétiques, suite de la définition

- Changement de jauge

Si $A' = A + d\phi$ est un autre potentiel magnétique associé à B , les opérateurs $H_h(A)$ et $H_h(A')$ sont unitairement équivalents.

- Conséquence : $H_h(A)$ et $H_h(A')$ ont le même spectre,

- ce qui permet de donner un sens à la définition suivante :

On dit que (M, h, B) est une **bouteille magnétique** si

1) $H_h(A)$ est **ess. auto-adjoint** avec domaine $C_0^\infty(M; L)$

2) $H_h(A)$ est à **résolvante compacte**.

- Il existe des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que $H_h(A)$ soit à résolvante compacte.

(J .Avron, I.Herbst et B.Simon, A.Dufresnoy, A.Iwatsuka)

Bouteilles magnétiques, le cas euclidien

(M, g) est l'espace euclidien \mathbb{R}^d

●
$$H_h(A) = \sum_{j=1}^d \left(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - a_j \right)^2 .$$

Bouteilles magnétiques, le cas euclidien

(M, g) est l'espace euclidien \mathbb{R}^d

●
$$H_h(A) = \sum_{j=1}^d \left(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - a_j \right)^2 .$$

● il existe, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, une base orthonormée $(e_j(x))$ de \mathbb{R}^d

t.q.
$$B(x) = \sum_{j=1}^{r(x)} b_j(x) dx_j \wedge dy_j, \quad b_1(x) \geq b_2(x) \geq \dots \geq b_{r(x)} > 0 .$$

● L'intensité du champ est la norme du vecteur $(b_j(x))_j$. Les $b_j(x)$ sont les modules des valeurs propres non nulles de l'endomorphisme L_B associé à $B(x)$ et $2r(x)$ est son rang.

● On pose pour tout x $d = 2r(x) + k(x)$.

Asymptotique à grande énergie

- $(B_1) \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|B(x)\| = \infty$
- $(B_2) \exists C > 0 \text{ t.q. } \|x - x'\| \leq 1 \implies \|B(x)\| \leq C\|B(x')\|$
- $(B_3) M(x) = o(\|B(x)\|^{\frac{3}{2}}) \text{ quand } \|x\| \rightarrow \infty$
où $M(x) = \max_{|\beta|=2} \left(\sup_{\|x-x'\| \leq 1} \|D^\beta A(x')\| \right).$

Asymptotique à grande énergie

- $(B_1) \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|B(x)\| = \infty$
- $(B_2) \exists C > 0 \text{ t.q. } \|x - x'\| \leq 1 \implies \|B(x)\| \leq C\|B(x')\|$
- $(B_3) M(x) = o(\|B(x)\|^{\frac{3}{2}}) \text{ quand } \|x\| \rightarrow \infty$
 où $M(x) = \max_{|\beta|=2} \left(\sup_{\|x-x'\| \leq 1} \|D^\beta A(x')\| \right).$

Théorème (Y. Colin de Verdière, 86)

Sous $(B_1 - B_3)$, $(\mathbb{R}^d, 1, B)$ est une **bouteille magnétique** et $N(\lambda, H_1(A))$ se comporte (quand $\lambda \rightarrow +\infty$) comme

$$N_B^{as}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} C_{k,r} \prod_{i=1}^r b_i(x) \sum^* (\lambda - \sum_{i=1}^r (2n_i + 1)b_i(x))_+^{k/2} dx$$

$$C_{k,r} = \frac{\gamma_k}{(2\pi)^{k+r}}, \quad \gamma_k = \text{vol de la b. u. de } \mathbb{R}^k, \quad \sum^* = \sum_{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_r^+}.$$

k et r dépendent de x

Densité d'état

● On a

$$N_B^{as}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu_{B(x)}(\lambda) dx .$$

avec

$$\nu_{B(x)}(\lambda) = C_{k,r} \prod_{i=1}^r b_i(x) \sum^* (\lambda - \sum_{i=1}^r (2n_i + 1)b_i(x))_+^{k/2} .$$

Si B est constant, $\nu_B(\lambda)$ s'interprète comme la **densité d'état** pour l'op. de Schrödinger dans \mathbb{R}^d .

Densité d'état

● On a

$$N_B^{as}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu_{B(x)}(\lambda) dx .$$

avec

$$\nu_{B(x)}(\lambda) = C_{k,r} \prod_{i=1}^r b_i(x) \sum^* \left(\lambda - \sum_{i=1}^r (2n_i + 1) b_i(x) \right)_+^{k/2} .$$

Si B est constant, $\nu_B(\lambda)$ s'interprète comme la **densité d'état** pour l'op. de Schrödinger dans \mathbb{R}^d .

● $N_{B,R}(\lambda)$: fonction de dénombrement du pb de Dirichlet pour le champ constant B dans le cube $[0, R]^d$.

Théorème (Y. Colin de Verdière) Il existe une constante C ne dépendant que de d t. q. $\forall A$ avec $0 < A < R/2$:

● $N_{B,R}(\lambda) \leq R^d \nu_B(\lambda).$

● $N_{B,R}(\lambda) \geq (R - A)^d \nu_B(\lambda - C/A^2).$

Asymptotique semi-classique

$$H_h(A) = \sum_{j=1}^d \left(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - a_j \right)^2, \quad H_1(A/h) = \sum_{j=1}^d \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{a_j}{h} \right)^2.$$

$H_1(A/h)$ est l'opérateur de Schrödinger (non semi-classique) associé au champ magnétique $\frac{B}{h}$.

- λ énergie fixée $\implies N(\lambda, H_h(A)) = N(\frac{\lambda}{h^2}, H_1(A/h))$,
- **Théorème** (T) Sous les hyp. $(B_1 - B_3)$, (\mathbb{R}^d, h, B) est une **bouteille magnétique** et pour tout λ , $N(\lambda, H_h(A))$ se comporte (quand $h \rightarrow 0$) comme $\frac{1}{h^d} N_{hB}^{as}(\lambda)$.

Asymptotique semi-classique

$$H_h(A) = \sum_{j=1}^d \left(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - a_j \right)^2, \quad H_1(A/h) = \sum_{j=1}^d \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{a_j}{h} \right)^2.$$

$H_1(A/h)$ est l'opérateur de Schrödinger (non semi-classique) associé au champ magnétique $\frac{B}{h}$.

● λ énergie fixée $\implies N(\lambda, H_h(A)) = N(\frac{\lambda}{h^2}, H_1(A/h))$,

● **Théorème (T)** Sous les hyp. $(B_1 - B_3)$, (\mathbb{R}^d, h, B) est une **bouteille magnétique** et pour tout λ , $N(\lambda, H_h(A))$ se comporte (quand $h \rightarrow 0$) comme $\frac{1}{h^d} N_{hB}^{as}(\lambda)$.

Remarque :

Si $d = 2$ on a $b_1(x) = \|B(x)\| = \mathbf{b}(x)$, et :

$$\frac{1}{h^d} N_{hB}^{as}(\lambda) = \frac{1}{2\pi h^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{b}(x) \sum_{n \in \mathbb{N}} [\lambda - (2n + 1) h \mathbf{b}(x)]_+^0 dx.$$

Le cas du demi-plan hyperbolique

- Si $\dim(M) = 2$, alors $dA = \tilde{\mathbf{b}} dv$, avec $|\tilde{\mathbf{b}}| = \mathbf{b}$,
 dv la mesure riemannienne sur M .
- Le champ magnétique est constant ssi $\tilde{\mathbf{b}}$ est constant.

Le cas du demi-plan hyperbolique

- Si $\dim(M) = 2$, alors $dA = \tilde{\mathbf{b}} dv$, avec $|\tilde{\mathbf{b}}| = \mathbf{b}$,
 dv la mesure riemannienne sur M .
- Le champ magnétique est constant ssi $\tilde{\mathbf{b}}$ est constant.
- On considère le cas où $M = \mathbb{H}$ est le demi-plan de Poincaré :
$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \quad g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} .$$
 - $-\Delta_A = y^2(D_x - A_1)^2 + y^2(D_y - A_2)^2 ,$
 $A_j(x, y) \in C^\infty(\mathbb{H}; \mathbb{R}) , j = 1, 2$
 - $\tilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$
 - $dv = y^{-2} dx dy .$
- $-\Delta_A$ est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{H})$.

Le spectre pour un champ constant

On suppose $\tilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$ constant.

- Le spectre de $-\Delta_A$ est essentiel: $\text{sp}(-\Delta_A) = \text{sp}_{es}(-\Delta_A)$.
- On a $\text{sp}_{ac}(-\Delta_A) = [\mathbf{b}^2 + \frac{1}{4}, +\infty[$.

Le spectre pour un champ constant

On suppose $\tilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$ constant.

- Le spectre de $-\Delta_A$ est essentiel: $\text{sp}(-\Delta_A) = \text{sp}_{es}(-\Delta_A)$.
- On a $\text{sp}_{ac}(-\Delta_A) = [\mathbf{b}^2 + \frac{1}{4}, +\infty[$.
- Si $0 \leq \mathbf{b} \leq 1/2$, pas d'autre spectre.
- Si $\mathbf{b} \geq \frac{1}{2}$, il existe un nombre fini de valeurs propres de multiplicité infinie

$$\text{sp}_p(-\Delta_A) = \{(2j+1)\mathbf{b} - j(j+1) ; j \in \mathbb{N}, j < \mathbf{b} - \frac{1}{2}\}.$$

Bouteilles Magnétiques : résolvante compacte

$$-\Delta_A = y^2(D_x - A_1)^2 + y^2(D_y - A_2)^2$$

Hypothèses de type Bouteilles Magnétiques (BM)

- $\mathbf{b}(x, y) \rightarrow +\infty$ quand $d(x, y) \rightarrow +\infty$,
 $d(x, y)$: distance hyperbolique de (x, y) à $(0, 1)$.
- $\exists C_0 > 0$ t.q., pour tout champ de vecteurs X sur \mathbb{H} ,

$$|X\tilde{\mathbf{b}}| \leq C_0(|\tilde{\mathbf{b}}| + 1)\sqrt{g(X, X)}.$$

Bouteilles Magnétiques : résolvante compacte

$$-\Delta_A = y^2(D_x - A_1)^2 + y^2(D_y - A_2)^2$$

Hypothèses de type Bouteilles Magnétiques (BM)

- $\mathbf{b}(x, y) \rightarrow +\infty$ quand $d(x, y) \rightarrow +\infty$,
 $d(x, y)$: distance hyperbolique de (x, y) à $(0, 1)$.
- $\exists C_0 > 0$ t.q., pour tout champ de vecteurs X sur \mathbb{H} ,

$$|X\tilde{\mathbf{b}}| \leq C_0(|\tilde{\mathbf{b}}| + 1)\sqrt{g(X, X)} .$$

Théorème (T, A. Morame)

Sous les hypothèses (BM) $P(A) = -\Delta_A$ est à **résolvante compacte**.

Bouteilles Magnétiques : asymptotique

Pour tout réel λ , on désigne par $N(\lambda, P)$ le nombre de valeurs propres de P qui sont strictement inférieures à λ .

Théorème (T, A. Morame)

Sous les hypothèses (BM) et pour tout $\delta \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{5}[$, il existe une constante $C > 0$ t.q.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{H}} \left(1 - \frac{C}{a_{\delta}(m)}\right) \mathbf{b}(m) \sum_{k=0}^{+\infty} [\lambda(1 - C\lambda^{-3\delta+1}) - \frac{1}{4} - (2k+1)\mathbf{b}(m)]_+^0 dv \\ \leq N(\lambda, -\Delta_A) \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{H}} \left(1 + \frac{C}{(a_{\delta}(m))}\right) \mathbf{b}(m) \sum_{k=0}^{+\infty} [\lambda(1 + C\lambda^{-3\delta+1}) - \frac{1}{4} - (2k+1)\mathbf{b}(m)]_+^0 dv$$

$$a_{\delta}(m) := (\mathbf{b}(m) + 1)^{(2-5\delta)/2}.$$

Corollaire (T, A. Morame)

- Si de plus $\omega(\lambda) = \int_{\mathbb{H}} [\lambda - \mathbf{b}(m)]_+^0 dv$ vérifie
 $\exists C_1 > 0$ t.q. $\forall \lambda > C_1$,
 $\forall \tau \in]0, 1[$, $\omega((1 + \tau)\lambda) - \omega(\lambda) \leq C_1 \tau \omega(\lambda)$ (*), alors

$$N(\lambda; -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{H}} \mathbf{b}(m) \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\lambda - \frac{1}{4} - (2k + 1) \mathbf{b}(m) \right]_+^0 dv .$$

Corollaire (T, A. Morame)

- Si de plus $\omega(\lambda) = \int_{\mathbb{H}} [\lambda - \mathbf{b}(m)]_+^0 dv$ vérifie
 $\exists C_1 > 0$ t.q. $\forall \lambda > C_1$,
 $\forall \tau \in]0, 1[$, $\omega((1 + \tau)\lambda) - \omega(\lambda) \leq C_1 \tau \omega(\lambda)$ (*), alors

$$N(\lambda; -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{H}} \mathbf{b}(m) \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\lambda - \frac{1}{4} - (2k + 1) \mathbf{b}(m) \right]_+^0 dv .$$

- (*) est satisfaite si $\omega(\lambda) \sim \alpha \lambda^k \ln^j \lambda$
avec $k > 0$, (ou avec $k = 0$ et $j > 0$) .

Exemple

- $\mathbf{b}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{2j} + p_1(y) + p_2(1/y) ,$

avec $j \in \mathbb{N}^*$, et $p_1(s), p_2(s)$ se comportant comme des fonctions polynomiales d'ordre ≥ 1 pour les grandes valeurs de s .

- $\omega(\lambda) \sim \alpha \lambda^{\frac{1}{2j}} \ln \lambda \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty ,$

Exemple

- $\mathbf{b}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{2j} + p_1(y) + p_2(1/y) ,$

avec $j \in \mathbb{N}^*$, et $p_1(s), p_2(s)$ se comportant comme des fonctions polynomiales d'ordre ≥ 1 pour les grandes valeurs de s .

- $\omega(\lambda) \sim \alpha \lambda^{\frac{1}{2j}} \ln \lambda \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty ,$

- $N(\lambda; -\Delta_A) \sim \frac{C}{2\pi} \lambda^{1+1/2j} \ln \lambda \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty .$

Remarque

- Cas euclidien, $d = 2$:

$$N(\lambda; -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{b}(x) \sum_{k \in \mathbb{N}} [\lambda - (2k + 1)\mathbf{b}(x)]_+^0 dx$$
$$(b_1(x) = \|B(x)\| = \mathbf{b}(x))$$

- Cas du demi-plan hyperbolique

$$N(\lambda; -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{H}} \mathbf{b}(m) \sum_{k \in \mathbb{N}} [\lambda - \frac{1}{4} - (2k + 1)\mathbf{b}(m)]_+^0 dv .$$

$$[\rho]_+^0 = 1 \text{ si } \rho > 0 , \quad [\rho]_+^0 = 0 \text{ si } \rho \leq 0 .$$

Résultats reliés

- Résultats sur le demi-plan hyperbolique
 - Laplacien de Maass : (Elstrodt(73), Grosche(88), Comtet(87), Ikeda-Matsumoto (99), Kim-Lee(02))
 - Asympt. constant magnetic fields ,Pauli operators : (Inahama-Shirai (03))
 - Asymptotic distribution for Schrödinger operators : (Inahama-Shirai (04))
- Sur les variétés cuspidales :
Asymptotic distribution for Schrödinger operators :
(S.Golénia-Moroianu (08))

Preuve

- La méthode du Minimax sur les formes quadratiques

Preuve

- La méthode du Minimax sur les formes quadratiques
- Idées
 - Se ramener à \mathbb{R}^2 ,
 - Choisir un bon potentiel vecteur,
 - Se localiser dans un "bon" rectangle \implies remplacer le problème initial par un problème à champ constant ,
 - Ecrire l' asymptotique sur un rectangle à champ constant,
 - Faire une partition de l'unité.

Changement de variables

- difféomorphisme : $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$, $(x, y) = \phi(x, t) := (x, e^t)$
- opérateur unitaire $\hat{U} : L^2(\mathbb{H}; dv) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2; dx dt)$
 $w(x, t) = (\hat{U}u)(x, t) := e^{-t/2} u(x, e^t) \quad u \in L^2(\mathbb{H}).$

Changement de variables

- difféomorphisme : $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$, $(x, y) = \phi(x, t) := (x, e^t)$
- opérateur unitaire $\hat{U} : L^2(\mathbb{H}; dv) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2; dxdt)$
 $w(x, t) = (\hat{U}u)(x, t) := e^{-t/2} u(x, e^t) \quad u \in L^2(\mathbb{H}).$
- forme quadratique associée à $P(A) = -\Delta_A$:

$$q(u) = \int_{\mathbb{H}} [|y(D_x - A_1)u|^2 + |y(D_y - A_2)u|^2] \frac{dx dy}{y^2} , \quad u \in L^2(\mathbb{H})$$

Changement de variables

● difféomorphisme : $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$, $(x, y) = \phi(x, t) := (x, e^t)$

● opérateur unitaire $\hat{U} : L^2(\mathbb{H}; dv) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2; dxdt)$
 $w(x, t) = (\hat{U}u)(x, t) := e^{-t/2} u(x, e^t) \quad u \in L^2(\mathbb{H}).$

● forme quadratique associée à $P(A) = -\Delta_A$:

$$\begin{aligned} q(u) &= \int_{\mathbb{H}} [|y(D_x - A_1)u|^2 + |y(D_y - A_2)u|^2] \frac{dx dy}{y^2} , \quad u \in L^2(\mathbb{H}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [|e^t(D_x - \tilde{A}_1)w|^2 + |(D_t - e^t \tilde{A}_2)w|^2 + 1/4|w|^2] dx dt \end{aligned}$$

$$w \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad \tilde{A}_i(x, t) = A_i(x, e^t) \quad , \quad i = 1, 2 \quad .$$

Jauge et contrôle du champ

- On choisit un potentiel tel que $A_2 = 0$.

Puisque $\tilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$, on prend

$$A_1(x, y) = - \int_1^y \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds \implies \tilde{A}_1(x, t) := - \int_1^{e^t} \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds$$

- La forme quadratique associée est

$$\hat{q}(w) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[|e^t (D_x - \tilde{A}_1) w|^2 + |D_t w|^2 + 1/4 |w|^2 \right] dx dt .$$

Jauge et contrôle du champ

- On choisit un potentiel tel que $A_2 = 0$.

Puisque $\tilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$, on prend

$$A_1(x, y) = - \int_1^y \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds \implies \tilde{A}_1(x, t) := - \int_1^{e^t} \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds$$

- La forme quadratique associée est

$$\hat{q}(w) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[|e^t (D_x - \tilde{A}_1) w|^2 + |D_t w|^2 + 1/4 |w|^2 \right] dx dt .$$

- L'hypothèse (BM) permet de contrôler le champ par un champ **constant** sur les cubes de \mathbb{H} du type

$$\Omega(x_0, y_0, a, \varepsilon_0) := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a\varepsilon_0 y_0, |y - y_0| \leq \varepsilon_0 y_0\} :$$

Jauge et contrôle du champ

- On choisit un potentiel tel que $A_2 = 0$.

Puisque $\tilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$, on prend

$$A_1(x, y) = - \int_1^y \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds \implies \tilde{A}_1(x, t) := - \int_1^{e^t} \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds$$

- La forme quadratique associée est

$$\hat{q}(w) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[|e^t (D_x - \tilde{A}_1) w|^2 + |D_t w|^2 + 1/4 |w|^2 \right] dx dt .$$

- L'hypothèse (BM) permet de contrôler le champ par un champ **constant** sur les cubes de \mathbb{H} du type

$$\Omega(x_0, y_0, a, \varepsilon_0) := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a\varepsilon_0 y_0, |y - y_0| \leq \varepsilon_0 y_0\} :$$

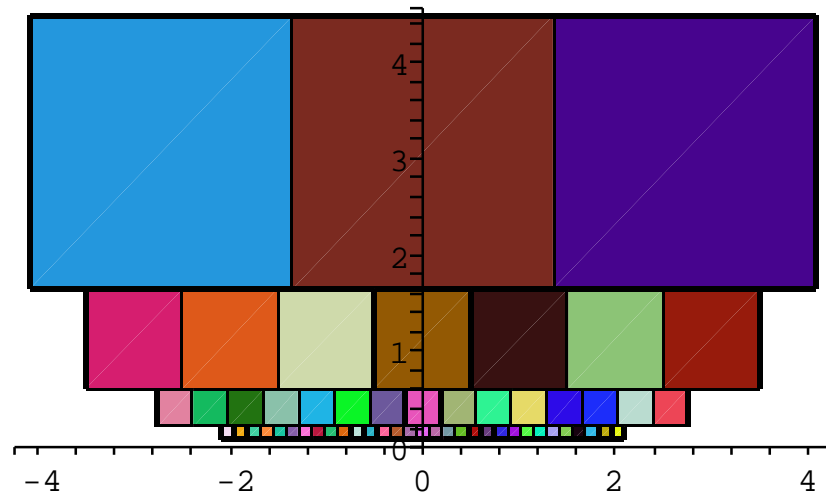
$$\exists C_1 > 0 \text{ t.q si } \mathbf{b}(x_0, y_0) > 1 ,$$

$$\frac{1}{C_1} \mathbf{b}(x_0, y_0) \leq \mathbf{b}(x, y) \leq C_1 \mathbf{b}(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in \Omega(x_0, y_0, a, \varepsilon_0).$$

Pavage de \mathbb{H}

On pave \mathbb{H} au moyen des cubes du type

$$\Omega(x_0, y_0, a, \varepsilon_0) := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a\varepsilon_0 y_0, |y - y_0| \leq \varepsilon_0 y_0\}$$



Passage de \mathbb{H} à \mathbb{R}^2

- $\Omega(x_0, y_0, a, \varepsilon_0) := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a\varepsilon_0 y_0, |y - y_0| \leq \varepsilon_0 y_0\}$

- $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}, \quad \phi(x, t) = (x, e^t) .$

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^2$, on désigne par $K(\alpha)$ le rectangle

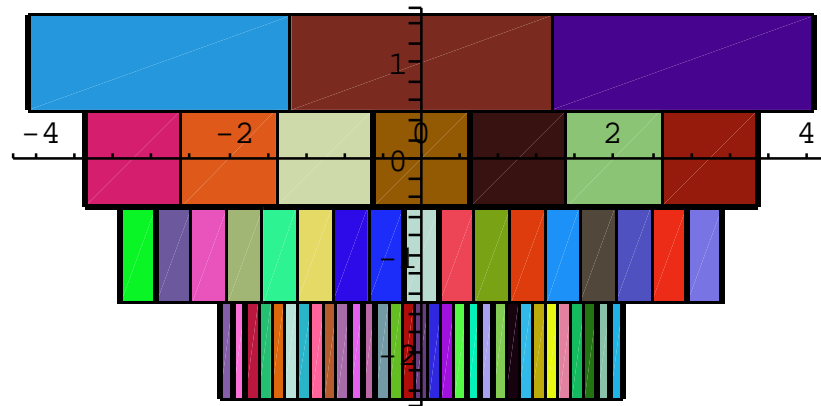
$$K(\alpha) =] - \frac{e^{\alpha_2}}{2} + e^{\alpha_2} \alpha_1, e^{\alpha_2} \alpha_1 + \frac{e^{\alpha_2}}{2} [\times] - \frac{1}{2} + \alpha_2, \alpha_2 + \frac{1}{2} [.$$

- On a

$$\mathbb{R}^2 = \cup_{\alpha} \overline{K}(\alpha) \quad \text{et} \quad K(\alpha) \cap K(\beta) = \emptyset \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta .$$

Pavage de \mathbb{R}^2

On pave \mathbb{R}^2 au moyen des rectangles $\overline{K}(\alpha)$.



Surfaces hyperboliques de volume infini

● Définition

(\mathcal{M}, g) : surface hyperbolique connexe

$$\mathcal{M} = \left(\bigcup_{j=0}^{J_1} M_j \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{J_2} F_k \right) ;$$

● M_j , F_k ouverts de \mathcal{M} , M_0 à fermeture compacte ,

● ($j \neq 0$: M_j isométriques à $\mathbb{S} \times]a_j^2, +\infty[$, (cusps)

$$ds_j^2 = y^{-2} (L_j^2 d\theta^2 + dy^2)$$

(a_j et L_j sont des constantes > 0)

● F_k isométriques à $\mathbb{S} \times]\alpha_k^2, +\infty[$, (entonnoirs)

$$ds_k^2 = \tau_k^2 \cosh^2 t d\theta^2 + dt^2$$

(α_k et τ_k sont des constantes > 0) .

Asymptotique

- On fixe $z_0 \in M_0$ et on pose
$$d : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+ ; \quad d(z) = d_g(z, z_0) ;$$
$$d_g(\cdot, \cdot) : \text{distance associée à la métrique } g.$$
- (BMSH)
 - $\lim_{d(z) \rightarrow \infty} \mathbf{b}(z) = +\infty$
 - $|X\tilde{\mathbf{b}}(z)| \leq C_1(\mathbf{b}(z) + 1)e^{d(z)}|X|_g$
$$\forall X \in T_z\mathcal{M}, \forall z \in M_j, \quad j = 1, \dots, J_1 \quad (C_1 > 0)$$
 - $|X\tilde{\mathbf{b}}(z)| \leq C_2(\mathbf{b}(z) + 1)|X|_g$
$$\forall X \in T_z\mathcal{M}, \forall z \in F_k, \quad k = 1, \dots, J_2 \quad (C_2 > 0)$$
- (T, A.Morame) Sous les hypothèses (BMSH) le théorème précédent reste vrai. .

Corollaire

- Sous les hypothèses (BMSH) et si la fonction

$$\omega(\mu) = \int_{\mathcal{M}} [\mu - \mathbf{b}(m)]_+^0 dm \text{ vérifie :}$$

$$\exists C_1 > 0 \text{ t.q. } \forall \mu > C_1, \forall \tau \in]0, 1[,$$

$$\omega((1 + \tau)\mu) - \omega(\mu) \leq C_1 \tau \omega(\mu) ,$$

$$\text{alors } N(\lambda, -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{N}(\lambda - \frac{1}{4}, \mathbf{b}(m)) dm .$$

$$\mathcal{N}(\mu, \mathbf{b}(m)) = \mathbf{b}(m) \sum_{k=0}^{+\infty} [\mu - (2k + 1)\mathbf{b}(m)]_+^0 \quad \text{si } \mathbf{b}(m) > 0 ,$$

$$\text{et } \mathcal{N}(\mu, \mathbf{b}(m)) = \mu/2 \quad \text{si } \mathbf{b}(m) = 0 .$$

Corollaire

- Sous les hypothèses (BMSH) et si la fonction

$$\omega(\mu) = \int_{\mathcal{M}} [\mu - \mathbf{b}(m)]_+^0 dm \text{ vérifie :}$$

$$\exists C_1 > 0 \text{ t.q. } \forall \mu > C_1, \forall \tau \in]0, 1[,$$

$$\omega((1 + \tau)\mu) - \omega(\mu) \leq C_1 \tau \omega(\mu) ,$$

$$\text{alors } N(\lambda, -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{N}(\lambda - \frac{1}{4}, \mathbf{b}(m)) dm .$$

$$\mathcal{N}(\mu, \mathbf{b}(m)) = \mathbf{b}(m) \sum_{k=0}^{+\infty} [\mu - (2k + 1)\mathbf{b}(m)]_+^0 \quad \text{si } \mathbf{b}(m) > 0 ,$$

$$\text{et } \mathcal{N}(\mu, \mathbf{b}(m)) = \mu/2 \quad \text{si } \mathbf{b}(m) = 0 .$$

- On peut remplacer $\int_{\mathcal{M}}$ par $\sum_{k=1}^{J_2} \int_{F_k}$ (les autres contributions sont bornées par $C\lambda$)

Exemple

- On considère un champ magnétique du type suivant :
 - Sur F_k , $\mathbf{b}(\theta, t) = p_k(1/\cosh(t))$,
 - Sur M_j , $j > 0$, $\mathbf{b}(\theta, y) = q_j(y)$.
 - Les $p_k(s)$ et les $q_j(s)$ sont pour les grandes valeurs de s des fonctions polynomiales d'ordre ≥ 1 .
- Soit $d = \max\{a_k, k = 1 \dots J_1\}$, (a_k ordre de $p_k(s)$) ; alors

$$N(\lambda, -\Delta_A) \sim \alpha \lambda^{1+1/d},$$

où $\alpha > 0$ est une constante ne dépendant que des entonnoirs F_k sur lesquels $p_k(s)$ est d'ordre d .