

# **ASYMPTOTIQUES DE WEYL, CHAMPS MAGNETIQUES ET POTENTIELS DEGENERES**

Françoise Truc

Institut Fourier, Grenoble

# Plan

- Introduction
- Motivation : Bouteilles magnétiques en mécanique classique
- Asymptotique de Weyl pour des bouteilles magnétiques
  - contexte euclidien
  - contexte hyperbolique
- Asymptotique de Weyl pour des potentiels dégénérés

# Introduction

Objectif : établir une formule de type Weyl pour certains opérateurs de Schrödinger.

- Soit  $V$  une fonction continue de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs positives , et  $h \in ]0, 1]$  un petit paramètre .

# Introduction

Objectif : établir une formule de type Weyl pour certains opérateurs de Schrödinger.

- Soit  $V$  une fonction continue de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs positives , et  $h \in ]0, 1]$  un petit paramètre .
- **Condition ND :**  $V(x) \rightarrow +\infty$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ 
  - $\forall h \in ]0, 1]$ , l'opérateur  $H_h = -h^2 \Delta + V$  défini sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  est essentiellement auto-adjoint et à résolvante compacte
  - comportement asymptotique semi-classique de son spectre :

# Introduction

Objectif : établir une formule de type Weyl pour certains opérateurs de Schrödinger.

- Soit  $V$  une fonction continue de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs positives , et  $h \in ]0, 1]$  un petit paramètre .
- **Condition ND :**  $V(x) \rightarrow +\infty$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ 
  - $\forall h \in ]0, 1]$ , l'opérateur  $H_h = -h^2\Delta + V$  défini sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  est essentiellement auto-adjoint et à résolvante compacte
  - comportement asymptotique semi-classique de son spectre :
$$N(\lambda, H_h) \sim h^{-d}(2\pi)^{-d}v_d \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda - V(x))_+^{d/2} dx \quad (h \rightarrow 0)$$
- $N(\lambda, H_h)$  : nombre de valeurs propres inférieures à une énergie fixée  $\lambda$ .
- $v_d$  : volume de la boule unité ,  $W_+$  : partie positive de  $W$ .

# Remarques

Si l'on pose  $h = 1$  la formule précédente donne l' asymptotique à grande énergie de l'opérateur  $H_1 = -\Delta + V$  :

$$N(\lambda, H_1) \sim_{\lambda \rightarrow +\infty} (2\pi)^{-d} v_d \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda - V(x))_+^{d/2} dx$$

# Remarques

Dans les deux cas : correspondance asymptotique entre

- le nombre de valeurs propres inférieures à  $\lambda$  et
- le volume, dans l'espace des phases, de l'ensemble  
 $\{(x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^d), \mathcal{H}(x, \xi) \leq \lambda\},$

$\mathcal{H}(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$  est le symbole principal de  $H_h$ , et aussi le Hamiltonien de la dynamique classique associée.

Que se passe-t-il pour un opérateur de Schrödinger dont le spectre est discret sans que la condition (ND) soit vérifiée?

## Exemple

Si la condition (ND) n'est plus vraie, il se peut que le volume de  $\{(x, \xi) \in T^*(\mathbb{R}^d), \mathcal{H}(x, \xi) \leq \lambda\}$  soit infini, ce qui enlève son sens à la formule de Weyl.

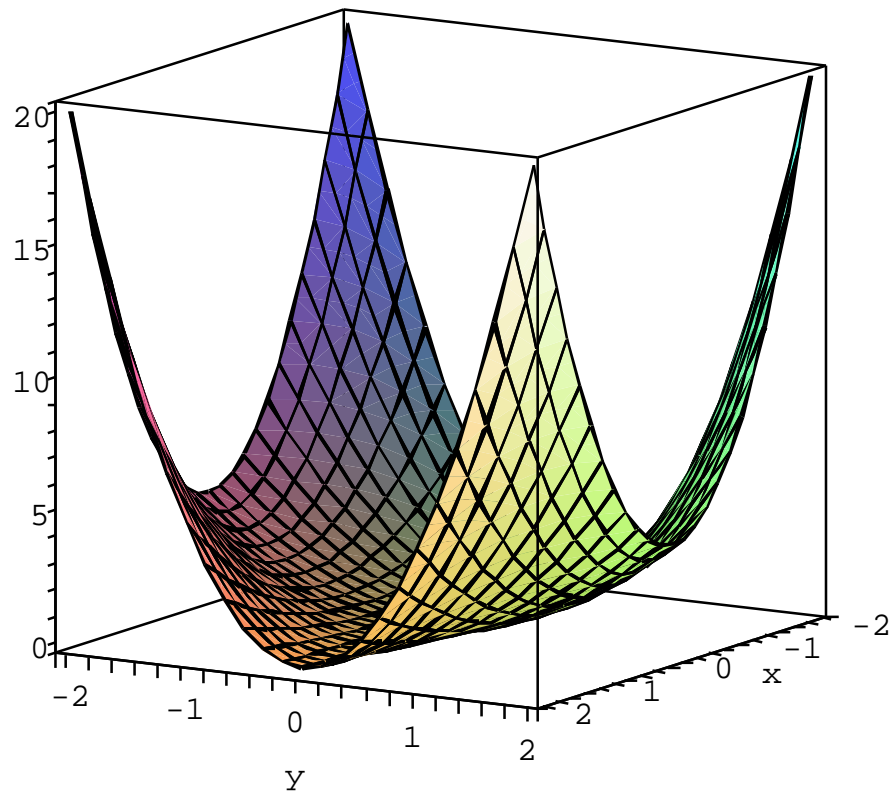


# Exemple

Exemple :  $V(y, z) = (1 + y^2) z^2$   $x = (y, z) \in \mathbb{R}^2$  .

# Exemple

Exemple :  $V(y, z) = (1 + y^2) z^2 \quad x = (y, z) \in \mathbb{R}^2$  .



# Dégénérescences

2 directions :

# Dégénérescences

- Potentiels dégénérés (ND non vérifiée).
  - Généralisation de l'exemple précédent :
$$V(x) = f(y)g(z), \quad x = (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$
 $f$  à valeurs  $> 0$ ,  $f(y) \rightarrow +\infty$  quand  $|y| \rightarrow +\infty$ ,  
 $g$  homogène de degré  $a$ .
  - Problème de Neumann avec champ magnétique dans le demi-espace

# Dégénérescences

- Potentiels dégénérés (ND non vérifiée).
  - Généralisation de l'exemple précédent :
$$V(x) = f(y)g(z), \quad x = (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$
 $f$  à valeurs  $> 0$ ,  $f(y) \rightarrow +\infty$  quand  $|y| \rightarrow +\infty$ ,  
 $g$  homogène de degré  $a$ .
  - Problème de Neumann avec champ magnétique dans le demi-espace
- Laplaciens magnétiques  $H_h(A) = ((h\nabla - iA))^2$ .  
Dégénérescence :  
 $\mathcal{H}(x, \xi) = (\xi - A(x))^2$ , le symbole principal de  $H_h(A)$ , s'annule sur une variété **non compacte** de  $T^*(\mathbb{R}^m)$ .

# Dégénérescences

- Potentiels dégénérés (ND non vérifiée).
  - Généralisation de l'exemple précédent :
$$V(x) = f(y)g(z), \quad x = (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$
 $f$  à valeurs  $> 0$ ,  $f(y) \rightarrow +\infty$  quand  $|y| \rightarrow +\infty$ ,  
 $g$  homogène de degré  $a$ .
  - Problème de Neumann avec champ magnétique dans le demi-espace
- Laplaciens magnétiques  $H_h(A) = ((h\nabla - iA))^2$ .  
Dégénérescence :  
 $\mathcal{H}(x, \xi) = (\xi - A(x))^2$ , le symbole principal de  $H_h(A)$ , s'annule sur une variété **non compacte** de  $T^*(\mathbb{R}^m)$ .

Si on peut définir la fonction de dénombrement  $N(\lambda, H_h(A))$ , la question se pose de trouver une alternative à la formule de Weyl.

# Bouteilles magnétiques en mécanique classique

- La trajectoire dans  $\mathbb{R}^3$  d'une particule de masse  $m$ , de charge  $e$ , soumise à un champ magnétique  $\vec{B}$  est décrite par l'équation de Lorentz :  $m\ddot{x} = e\dot{x} \wedge \vec{B}$ .
- Lagrangien associé ( $m = e = 1$ ) :  $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \dot{x} \cdot A(x)$

# Bouteilles magnétiques en mécanique classique

- La trajectoire dans  $\mathbb{R}^3$  d'une particule de masse  $m$ , de charge  $e$ , soumise à un champ magnétique  $\vec{B}$  est décrite par l'équation de Lorentz :  $m\ddot{x} = e\dot{x} \wedge \vec{B}$ .
- Lagrangien associé ( $m = e = 1$ ) :  $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \dot{x} \cdot A(x)$
- Moments conjugués :  $\xi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \implies \xi = \dot{x} + A(x)$
- Hamiltonien :  $\mathcal{H}(x, \xi) = \xi \dot{x} - \mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(\xi - A(x))^2$ .
- $\vec{B}$  constant  $\implies \mathcal{H}$  intégrable ,  
Trois intégrales du mouvement : l'énergie  $\mathcal{H}$ , le rayon de Larmor  $\rho = \frac{v_{\perp}}{B}$  et le moment magnétique  $I = \frac{v_{\perp}^2}{2B}$ .



# Champ symétrique linéaire

$$\vec{B}(x, y, z) = (x, y, -2z) .$$

- Coordonnées cylindriques :

$$B = d(-r^2 z) \wedge d\theta \implies A = (A_r, A_\theta, A_z) = (0, -rz, 0) .$$

- Lignes de champ :  $\theta = \text{constante}$  et  $r^2 z = \text{constante}$ .

- Moments conjugués :  $(\xi_r, \xi_\theta, \xi_z) = (\dot{r}, r^2(\dot{\theta} - z), \dot{z})$

- Hamiltonien :  $\mathcal{H}(r, \theta, z, \xi_r, \xi_\theta, \xi_z) = \frac{1}{2}(\xi_r^2 + \xi_z^2) + \frac{1}{2r^2}(\xi_\theta + r^2 z)^2 .$

# Champ symétrique linéaire

$$\vec{B}(x, y, z) = (x, y, -2z) .$$

- Coordonnées cylindriques :

$$B = d(-r^2 z) \wedge d\theta \implies A = (A_r, A_\theta, A_z) = (0, -rz, 0).$$

- Lignes de champ :  $\theta = \text{constante}$  et  $r^2 z = \text{constante}$ .

- Moments conjugués :  $(\xi_r, \xi_\theta, \xi_z) = (\dot{r}, r^2(\dot{\theta} - z), \dot{z})$

- Hamiltonien :  $\mathcal{H}(r, \theta, z, \xi_r, \xi_\theta, \xi_z) = \frac{1}{2}(\xi_r^2 + \xi_z^2) + \frac{1}{2r^2}(\xi_\theta + r^2 z)^2$  .

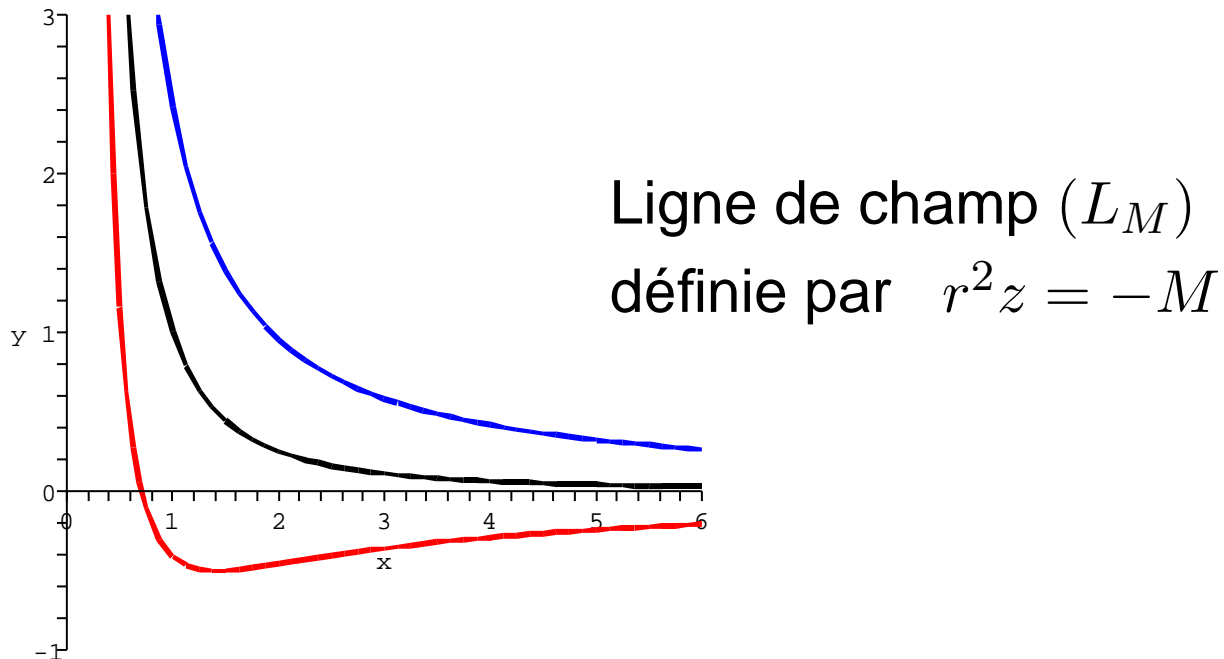
- $\dot{\xi}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \implies \xi_\theta$  intégrale première du mouvement.

- Nous sommes ramenés à l'étude d'un **hamiltonien à 2 degrés de liberté** :

$$\mathcal{H}_M(r, z, \xi_r, \xi_z) = \frac{1}{2}(\xi_r^2 + \xi_z^2) + \frac{(M + r^2 z)^2}{2r^2} .$$

# Trajectoire et ligne de champ

$M = \xi_\theta = \xi_\theta(0)$  fixée par les C I, ainsi que  $E = \mathcal{H}_M(0)$ .



L'inégalité  $\frac{(M+r^2 z)^2}{2r^2} < E$  contraint la trajectoire à rester dans une bande  $\mathcal{B}$  autour de  $(L_M)$ .

# Le hamiltonien en coordonnées curvilignes

- $\Omega_M$  : le point unique pour lequel la norme  $B$  sur  $(L_M)$  est minimale .
- Nouveau système de coordonnées :  $P(r, z) \implies P(u, v)$  :
  - $v$  : distance de  $P(r, z)$  à la ligne de champ  $(L_M)$
  - $u$  : abcisse curviligne de la projection de  $P$  sur  $(L_M)$ , ( $\Omega_M$  est choisi comme origine).

# Le hamiltonien en coordonnées curvilignes

- $\Omega_M$  : le point unique pour lequel la norme  $B$  sur  $(L_M)$  est minimale .
- Nouveau système de coordonnées :  $P(r, z) \implies P(u, v)$  :
  - $v$  : distance de  $P(r, z)$  à la ligne de champ  $(L_M)$
  - $u$  : abscisse curviligne de la projection de  $P$  sur  $(L_M)$ , ( $\Omega_M$  est choisi comme origine).
- Le hamiltonien  $\mathcal{H}_M(u, v, \xi_u, \xi_v)$  peut être rendu proche de

$$\mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi_u^2}{[1 + vk(u)]^2} \right) + \frac{1}{2} (\xi_v^2 + B^2(u, 0)v^2) .$$

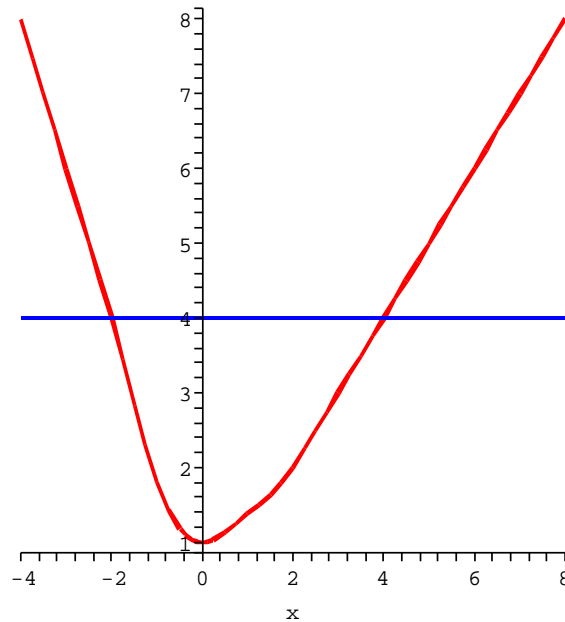
$k(u)$  courbure de  $(L_M)$  au point  $(u, 0)$

## Remarque

$$\mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v) \approx \frac{1}{2}\xi_u^2 + \frac{1}{2}\xi_v^2 + V(u, v) , \quad V(u, v) = \frac{1}{2}B^2(u, 0)v^2$$

# Remarque

$$\mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v) \approx \frac{1}{2}\xi_u^2 + \frac{1}{2}\xi_v^2 + V(u, v), \quad V(u, v) = \frac{1}{2}B^2(u, 0)v^2$$



$$u \longrightarrow B(u, 0)$$

Quantification de Weyl  $\implies$  opérateur  $H_h = -h^2\Delta + V$

$V$  potentiel dégénéré

# Action transversale

● Proposition : Pour toutes conditions initiales telles que

$$E < \frac{\epsilon^2}{16} |M|^{2/3} \quad (\text{CI})$$

- la distance  $v$  de la trajectoire à  $(L_M)$  est d'au plus  $\epsilon$
- il existe une constante  $C(E, M)$  telle que

$$|\mathcal{H}_M(u, v, \xi_u, \xi_v) - \mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v)| < C\epsilon^3$$



# Action transversale

- Proposition : Pour toutes conditions initiales telles que

$$E < \frac{\epsilon^2}{16} |M|^{2/3} \quad (\text{CI})$$

- la distance  $v$  de la trajectoire à  $(L_M)$  est d'au plus  $\epsilon$
- il existe une constante  $C(E, M)$  telle que

$$|\mathcal{H}_M(u, v, \xi_u, \xi_v) - \mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v)| < C\epsilon^3$$

- Le hamiltonien  $\mathcal{H}_u = \frac{1}{2} (\xi_v^2 + B^2(u, 0)v^2)$  représente à  $u$  fixé l'énergie d'un oscillateur harmonique . L'action correspondante est à  $2\pi$  près l'aire de l'ellipse  $\mathcal{H}_u = cte$  parcourue par le point  $(v, \xi_v)$  :

$$I_u = \frac{\xi_v^2 + B^2(u, 0)v^2}{2 B(u, 0)} .$$

# Borner la trajectoire

On a

$$\bullet \mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi_u^2}{[1 + vk(u)]^2} \right) + \frac{1}{2} (\xi_v^2 + B^2(u, 0)v^2) .$$

$$\bullet I_u = \frac{\xi_v^2 + B^2(u, 0)v^2}{2 B(u, 0)} .$$

Donc

$$\bullet \mathcal{H}_0(u, v, \xi_u, \xi_v) \approx \frac{1}{2} \xi_u^2 + B(u, 0) I_u$$

$$\bullet \text{La condition (CI) entraîne } B(u, 0) I_u < E + C\epsilon^3 .$$

$\implies$  si  $I_u$  est minorée indépendamment du temps, on obtient une borne pour  $B(u, 0)$  et donc pour la trajectoire puisque  $B(u, 0)$  grandit avec  $u$ .

# Coordonnées action-angle

● On pose

$$u = \epsilon u, \quad v = \epsilon v, \quad \xi_u = \epsilon \xi_u, \quad \xi_v = \epsilon \xi_v, \quad \mathcal{H}_M = \epsilon^2 \mathcal{H}_M, \quad E = \epsilon^2 E .$$

● Transformations symplectiques  $\implies$  coordonnées action-angle  
( $I, J, \phi, \psi$ )

● Théorème

$$\mathcal{H}_M(u, v, \xi_u, \xi_v) = E + B(\epsilon u, 0) [I + c(\epsilon J) + \mathcal{O}(\epsilon)] ,$$

où la fonction  $c(\epsilon J)$  a une dérivée seconde non nulle sur un intervalle du type  $]A, +\infty[$ .

# Coordonnées action-angle

- On pose

$$u = \epsilon u, \quad v = \epsilon v, \quad \xi_u = \epsilon \xi_u, \quad \xi_v = \epsilon \xi_v, \quad \mathcal{H}_M = \epsilon^2 \mathcal{H}_M, \quad E = \epsilon^2 E .$$

- Transformations symplectiques  $\implies$  coordonnées action-angle  $(I, J, \phi, \psi)$
- Théorème

$$\mathcal{H}_M(u, v, \xi_u, \xi_v) = E + B(\epsilon u, 0) [I + c(\epsilon J) + \mathcal{O}(\epsilon)] ,$$

où la fonction  $c(\epsilon J)$  a une dérivée seconde non nulle sur un intervalle du type  $]A, +\infty[$ .

- $I = \epsilon^{-2} I_u \quad ( \quad I_u = \frac{\xi_v^2 + B^2(u, 0) v^2}{2 B(u, 0)} . )$

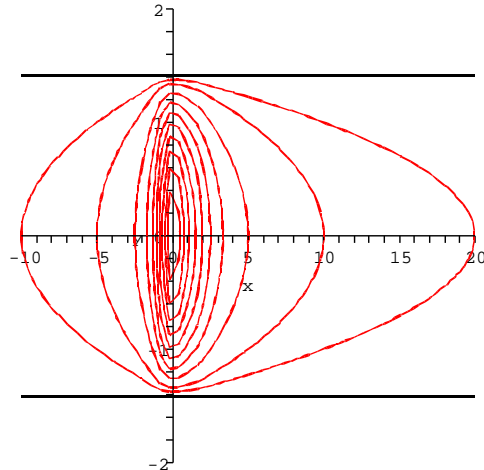
Pour les points de la trajectoire situés sur la ligne de champ, on retrouve le moment magnétique  $I = \frac{v_\perp^2}{2B}$  .

# Action longitudinale

- Seconde variable d'action :  $J(c) = \oint_{\mathcal{C}_c} \xi_u du$  : aire délimitée par la courbe  $\mathcal{C}_c$  d'équation :  $\frac{1}{2} \xi_u^2 - c B(u, 0) = E$ .
- Si l'on note  $B_M$  la valeur minimale de  $B$  sur  $(L_M)$ ,  $\mathcal{C}_c$  est **fermée** pour  $c \in ] -E/B_M, 0[$ .

# Action longitudinale

- Seconde variable d'action :  $J(c) = \oint_{\mathcal{C}_c} \xi_u du$  : aire délimitée par la courbe  $\mathcal{C}_c$  d'équation :  $\frac{1}{2} \xi_u^2 - c B(u, 0) = E$ .
- Si l'on note  $B_M$  la valeur minimale de  $B$  sur  $(L_M)$ ,  $\mathcal{C}_c$  est **fermée** pour  $c \in ] -E/B_M, 0[$ .



$$E = B_M = 1;$$

les courbes  $\mathcal{C}_c$  délimitent une aire de plus en plus grande quand  $c$  croît de  $-0,9$  à  $-0,1$ .

# Conséquence

- $c''(\epsilon J)$  ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs  $J_1, \dots, J_p$ .  
Nous pouvons alors appliquer le **théorème de Moser** sur chacun des anneaux  $\mathcal{A}(\epsilon J_k, \epsilon J_{k+1})$  et sur tout anneau extérieur aux cercles  $J = J_1$  et  $J = J_p$ .

# Conséquence

- $c''(\epsilon J)$  ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs  $J_1, \dots, J_p$ .  
Nous pouvons alors appliquer le **théorème de Moser** sur chacun des anneaux  $\mathcal{A}(\epsilon J_k, \epsilon J_{k+1})$  et sur tout anneau extérieur aux cercles  $J = J_1$  et  $J = J_p$ .
- Sur un tel anneau : nouveau temps  $\phi$  . **le difféomorphisme de l'anneau  $(J(0), \psi(0)) \rightarrow (J(2\pi), \psi(2\pi))$  vérifie la condition de Moser** (  $c''(\epsilon J)$  ne s'annule pas).
- Il existe une infinité de courbes invariantes par ce difféomorphisme.  
Ces courbes engendrent des tores invariants ; ils feuillettent la surface d'énergie  $\mathcal{H} = E$  et toute trajectoire commençant entre deux tores reste entre ces tores. En conséquence  **$I_u$  est un invariant adiabatique perpétuel.**



## Théorème ( T )

- Soit  $M$  fixé . Il existe  $\epsilon_0 > 0$  et  $K > 0$  tels que **la trajectoire de la solution est bornée**, si les conditions suivantes sont satisfaites

$$(CI) \quad E < \frac{\epsilon^2}{16} |M|^{2/3}, \quad (CI)' \quad I_u(0) > 2K\epsilon^3$$

pour un  $\epsilon < \epsilon_0$ .

# Théorème ( T )

- Soit  $M$  fixé . Il existe  $\epsilon_0 > 0$  et  $K > 0$  tels que **la trajectoire de la solution est bornée**, si les conditions suivantes sont satisfaites

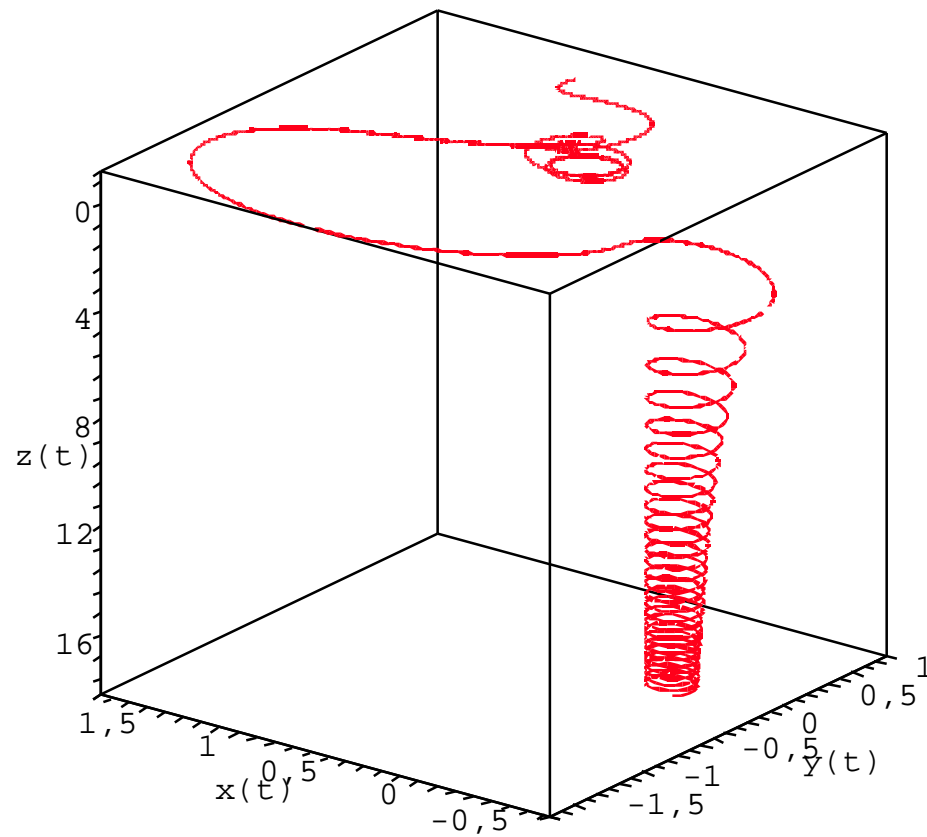
$$(CI) \quad E < \frac{\epsilon^2}{16} |M|^{2/3}, \quad (CI)' \quad I_u(0) > 2K\epsilon^3$$

pour un  $\epsilon < \epsilon_0$ .

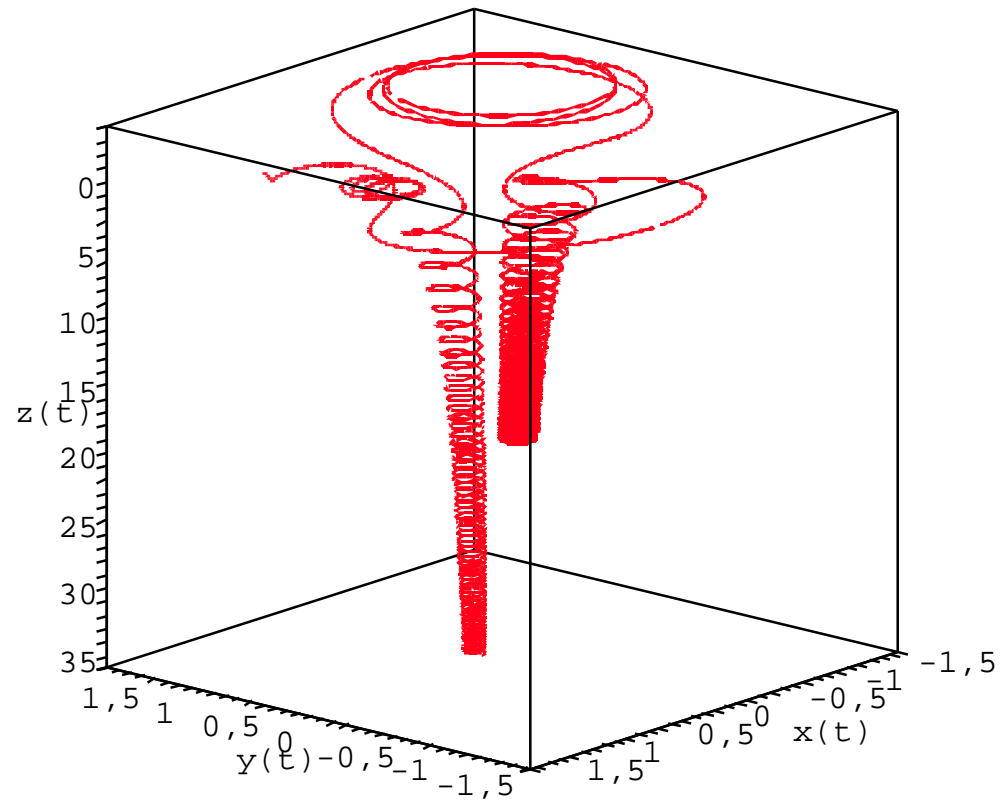
- Les conditions  $(CI)$  et  $(CI)'$  sont compatibles.
  - $(CI) \implies$  vitesses petites en comparaison des positions
  - $(CI)' \implies$  vitesse orthogonale à la ligne de champ pas trop faible par rapport à l'énergie totale.
- Exclut le cas  $z(0) = \dot{z}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ , ( départ sur la ligne de champ  $(L_0)$  (la droite  $\theta = \theta(0)$ ,  $z = 0$ ) avec une vitesse parallèle à cette ligne).  $(L_0)$  peut être vue comme le fonds de puits pour le potentiel dégénéré  $V(u, v) = B(u, 0) v^2$ .

# Trajectoire

$M_0(1, 1, 0)$  et  $V_0(0, 15; -0, 25; 0, 25)$



# Trajectoire (suite)



# Bouteilles magnétiques, définition

- $(M, g)$  variété riemannienne connexe de dimension  $d$
- $A = \sum_{j=1}^d a_j dx_j$  1-forme réelle sur  $M$ .
- Pour  $h \in ]0, 1[$  on définit  $H_h(A) = (ih d + A)^*(ih d + A)$  ,  
 $(ih d + A)u = ih du + uA$  ,  $\forall u \in C_0^\infty(M)$  .
- Le champ magnétique est la 2-forme exacte  $B = dA$  .

# Bouteilles magnétiques, définition

- $(M, g)$  variété riemannienne connexe de dimension  $d$
- $A = \sum_{j=1}^d a_j dx_j$  1-forme réelle sur  $M$ .
- Pour  $h \in ]0, 1[$  on définit  $H_h(A) = (ih d + A)^*(ih d + A)$  ,  
 $(ih d + A)u = ih du + uA$  ,  $\forall u \in C_0^\infty(M)$  .
- Le champ magnétique est la 2-forme exacte  $B = dA$  .
- A la 2-forme  $B$  on associe un opérateur linéaire  $L_B$   
 $dA(X, Y) = g(L_B.X, Y)$  ;  $\forall X, Y \in TM \times TM$  .
- L'intensité du champ magnétique **b** est alors

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} \text{tr} \left( (L_B^* L_B)^{1/2} \right) .$$

# Bouteilles magnétiques, suite de la définition

- Changement de jauge

Si  $A' = A + d\phi$  est un autre potentiel magnétique associé à  $B$ , les opérateurs  $H_h(A)$  et  $H_h(A')$  sont unitairement équivalents.

# Bouteilles magnétiques, suite de la définition

- Changement de jauge

Si  $A' = A + d\phi$  est un autre potentiel magnétique associé à  $B$ , les opérateurs  $H_h(A)$  et  $H_h(A')$  sont unitairement équivalents.

- Conséquence :  $H_h(A)$  et de  $H_h(A')$  ont le même spectre,

- ce qui permet de donner un sens à la définition suivante :

On dit que  $(M, h, B)$  est une **bouteille magnétique** si

1)  $H_h(A)$  est **ess. auto-adjoint** avec domaine  $C_0^\infty(M; L)$

2)  $H_h(A)$  est à **résolvante compacte**.

- Il existe des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que  $H_h(A)$  soit à résolvante compacte.

(J .Avron, I.Herbst et B.Simon, A.Dufresnoy, A.Iwatsuka)



# Bouteilles magnétiques, le cas euclidien

$(M, g)$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$

● 
$$H_h(A) = \sum_{j=1}^d \left( \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - a_j \right)^2 .$$

# Bouteilles magnétiques, le cas euclidien

$(M, g)$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$

● 
$$H_h(A) = \sum_{j=1}^d \left( \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - a_j \right)^2 .$$

● il existe, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , une base orthonormée  $(e_j(x))$  de  $\mathbb{R}^d$

t.q. 
$$B(x) = \sum_{j=1}^{r(x)} b_j(x) dx_j \wedge dy_j, \quad b_1(x) \geq b_2(x) \geq \dots \geq b_{r(x)}(x) > 0 .$$

● L'intensité du champ est la norme du vecteur  $(b_j(x))_j$ . Les  $b_j(x)$  sont les modules des valeurs propres non nulles de l'endomorphisme  $L_B$  associé à  $B(x)$  et  $2r(x)$  est son rang.

● On pose pour tout  $x$   $d = 2r(x) + k(x)$  .

# Asymptotique à grande énergie

- $(B_1) \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|B(x)\| = \infty$
- $(B_2) \exists C > 0 \text{ t.q. } \|x - x'\| \leq 1 \implies \|B(x)\| \leq C\|B(x')\|$
- $(B_3) M(x) = o(\|B(x)\|^{\frac{3}{2}}) \text{ quand } \|x\| \rightarrow \infty$   
où  $M(x) = \max_{|\beta|=2} \left( \sup_{\|x-x'\| \leq 1} \|D^\beta A(x')\| \right).$

# Asymptotique à grande énergie

- $(B_1) \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|B(x)\| = \infty$
- $(B_2) \exists C > 0 \text{ t.q. } \|x - x'\| \leq 1 \implies \|B(x)\| \leq C\|B(x')\|$
- $(B_3) M(x) = o(\|B(x)\|^{\frac{3}{2}}) \text{ quand } \|x\| \rightarrow \infty$   
 où  $M(x) = \max_{|\beta|=2} \left( \sup_{\|x-x'\| \leq 1} \|D^\beta A(x')\| \right).$

**Théorème** (Y. Colin de Verdière, 86 )

Sous  $(B_1 - B_3)$ ,  $(\mathbb{R}^d, 1, B)$  est une **bouteille magnétique** et  $N(\lambda, H_1(A))$  se comporte ( quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ ) comme

$$N_B^{as}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} C_{k,r} \prod_{i=1}^r b_i(x) \sum^* (\lambda - \sum_{i=1}^r (2n_i + 1)b_i(x))_+^{k/2} dx$$

$$C_{k,r} = \frac{\gamma_k}{(2\pi)^{k+r}}, \quad \gamma_k = \text{vol de la b. u. de } \mathbb{R}^k, \quad \sum^* = \sum_{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_r^+}.$$

$k$  et  $r$  dépendent de  $x$

# Densité d'état

● On a

$$N_B^{as}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu_{B(x)}(\lambda) dx .$$

avec

$$\nu_{B(x)}(\lambda) = C_{k,r} \prod_{i=1}^r b_i(x) \sum^* (\lambda - \sum_{i=1}^r (2n_i + 1)b_i(x))_+^{k/2} .$$

Si  $B$  est constant,  $\nu_B(\lambda)$  s'interprète comme la **densité d'état** pour l'op. de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^d$ .

# Densité d'état

● On a

$$N_B^{as}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu_{B(x)}(\lambda) dx .$$

avec

$$\nu_{B(x)}(\lambda) = C_{k,r} \prod_{i=1}^r b_i(x) \sum^* \left( \lambda - \sum_{i=1}^r (2n_i + 1) b_i(x) \right)_+^{k/2} .$$

Si  $B$  est constant,  $\nu_B(\lambda)$  s'interprète comme la **densité d'état** pour l'op. de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^d$ .

●  $N_{B,R}(\lambda)$  : fonction de dénombrement du pb de Dirichlet pour le champ constant  $B$  dans le cube  $[0, R]^d$ .

**Théorème** (Y. Colin de Verdière) Il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $d$  t. q.  $\forall A$  avec  $0 < A < R/2$ :

●  $N_{B,R}(\lambda) \leq R^d \nu_B(\lambda).$

●  $N_{B,R}(\lambda) \geq (R - A)^d \nu_B(\lambda - C/A^2).$

# Asymptotique semi-classique

$$H_h(A) = \sum_{j=1}^d \left( \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - a_j \right)^2, \quad H_1(A/h) = \sum_{j=1}^d \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{a_j}{h} \right)^2.$$

$H_1(A/h)$  est l'opérateur de Schrödinger (non semi-classique) associé au champ magnétique  $\frac{B}{h}$ .

- $\lambda$  énergie fixée  $\implies N(\lambda, H_h(A)) = N(\frac{\lambda}{h^2}, H_1(A/h))$ ,
- **Théorème** (T) Sous les hyp.  $(B_1 - B_3)$ ,  $(\mathbb{R}^d, h, B)$  est une **bouteille magnétique** et pour tout  $\lambda$ ,  $N(\lambda, H_h(A))$  se comporte ( quand  $h \rightarrow 0$ ) comme  $\frac{1}{h^d} N_{hB}^{as}(\lambda)$ .

# Asymptotique semi-classique

$$H_h(A) = \sum_{j=1}^d \left( \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - a_j \right)^2, \quad H_1(A/h) = \sum_{j=1}^d \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{a_j}{h} \right)^2.$$

$H_1(A/h)$  est l'opérateur de Schrödinger (non semi-classique) associé au champ magnétique  $\frac{B}{h}$ .

●  $\lambda$  énergie fixée  $\implies N(\lambda, H_h(A)) = N(\frac{\lambda}{h^2}, H_1(A/h))$ ,

● **Théorème** (T) Sous les hyp.  $(B_1 - B_3)$ ,  $(\mathbb{R}^d, h, B)$  est une **bouteille magnétique** et pour tout  $\lambda$ ,  $N(\lambda, H_h(A))$  se comporte ( quand  $h \rightarrow 0$ ) comme  $\frac{1}{h^d} N_{hB}^{as}(\lambda)$ .

**Remarque :**

Si  $d = 2$  on a  $b_1(x) = \|B(x)\| = \mathbf{b}(x)$ , et :

$$\frac{1}{h^d} N_{hB}^{as}(\lambda) = \frac{1}{2\pi h^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{b}(x) \sum_{n \in \mathbb{N}} [\lambda - (2n + 1) h \mathbf{b}(x)]_+^0 dx.$$



## Remarques (suite)

- Résultats voisins : (H. Tamura ,87, H. Matsumoto, 94)

$$\mathrm{Tr} (e^{-tH_h}) = 1/h^d Z_{hB}(t),$$

$Z_{hB}(t) = (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{r(x)} \frac{hb_i(x)}{\sinh hb_i(x)} dx$  : transformée de Laplace de  $N_{hB}^{as}(\lambda)$ .

- Hypothèses plus fortes sur le champ  $B \implies$  assurer que le semi-groupe soit à trace.

## Remarques (suite)

- Résultats voisins : (H. Tamura ,87, H. Matsumoto, 94)

$$\mathrm{Tr} (e^{-tH_h}) = 1/h^d Z_{hB}(t),$$

$Z_{hB}(t) = (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{r(x)} \frac{hb_i(x)}{\sinh hb_i(x)} dx$  : transformée de Laplace de  $N_{hB}^{as}(\lambda)$ .

- Hypothèses plus fortes sur le champ  $B \implies$  assurer que le semi-groupe soit à trace.
- La méthode du min-max  $\implies$  hypothèses minimales.

## Remarques (suite)

- Résultats voisins : (H. Tamura ,87, H. Matsumoto, 94)

$$\mathrm{Tr} (e^{-tH_h}) = 1/h^d Z_{hB}(t),$$

$Z_{hB}(t) = (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{r(x)} \frac{hb_i(x)}{\sinh hb_i(x)} dx$  : transformée de Laplace de  $N_{hB}^{as}(\lambda)$ .

- Hypothèses plus fortes sur le champ  $B \implies$  assurer que le semi-groupe soit à trace.
- La méthode du min-max  $\implies$  hypothèses minimales.
- Cadre des op. hypoelliptiques  $\sum_{i=1}^d X_k^* X_k$  (L. Hörmander ),  $X_k$  champs de vecteurs réels.

# Le cas du demi-plan hyperbolique

- Si  $\dim(M) = 2$ , alors  $dA = \tilde{\mathbf{b}} dv$ , avec  $|\tilde{\mathbf{b}}| = \mathbf{b}$ ,  
 $dv$  la mesure riemannienne sur  $M$ .
- Le champ magnétique est constant ssi  $\tilde{\mathbf{b}}$  est constant.

# Le cas du demi-plan hyperbolique

- Si  $\dim(M) = 2$ , alors  $dA = \tilde{\mathbf{b}} dv$ , avec  $|\tilde{\mathbf{b}}| = \mathbf{b}$ ,  
 $dv$  la mesure riemannienne sur  $M$ .
- Le champ magnétique est constant ssi  $\tilde{\mathbf{b}}$  est constant.
- On considère le cas où  $M = \mathbb{H}$  est le demi-plan de Poincaré :  
 $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ,  $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ .
  - $-\Delta_A = y^2(D_x - A_1)^2 + y^2(D_y - A_2)^2$ ,  
 $A_j(x, y) \in C^\infty(\mathbb{H}; \mathbb{R})$ ,  $j = 1, 2$
  - $\tilde{\mathbf{b}} = y^2(\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$
  - $dv = y^{-2} dx dy$ .
- $-\Delta_A$  est essentiellement auto-adjoint sur  $L^2(\mathbb{H})$ .

# Le spectre pour un champ constant

On suppose  $\tilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$  constant.

- Le spectre de  $-\Delta_A$  est essentiel:  $\text{sp}(-\Delta_A) = \text{sp}_{es}(-\Delta_A)$ .
- On a  $\text{sp}_{ac}(-\Delta_A) = [\mathbf{b}^2 + \frac{1}{4}, +\infty[$ .

# Le spectre pour un champ constant

On suppose  $\tilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$  constant.

- Le spectre de  $-\Delta_A$  est essentiel:  $\text{sp}(-\Delta_A) = \text{sp}_{es}(-\Delta_A)$ .
- On a  $\text{sp}_{ac}(-\Delta_A) = [\mathbf{b}^2 + \frac{1}{4}, +\infty[$ .
- Si  $0 \leq \mathbf{b} \leq 1/2$ , pas d'autre spectre.
- Si  $\mathbf{b} \geq \frac{1}{2}$ , il existe un nombre fini de valeurs propres de multiplicité infinie

$$\text{sp}_p(-\Delta_A) = \{(2j+1)\mathbf{b} - j(j+1) ; j \in \mathbb{N}, j < \mathbf{b} - \frac{1}{2}\}.$$

# Bouteilles Magnétiques : résolvante compacte

$$-\Delta_A = y^2(D_x - A_1)^2 + y^2(D_y - A_2)^2$$

## Hypothèses de type Bouteilles Magnétiques (BM)

- $\mathbf{b}(x, y) \rightarrow +\infty$  quand  $d(x, y) \rightarrow +\infty$  ,  
 $d(x, y)$  : distance hyperbolique de  $(x, y)$  à  $(0, 1)$  .
- $\exists C_0 > 0$  t.q., pour tout champ de vecteurs  $X$  sur  $\mathbb{H}$  ,

$$|X\tilde{\mathbf{b}}| \leq C_0(|\tilde{\mathbf{b}}| + 1)\sqrt{g(X, X)} .$$



# Bouteilles Magnétiques : résolvante compacte

$$-\Delta_A = y^2(D_x - A_1)^2 + y^2(D_y - A_2)^2$$

## Hypothèses de type Bouteilles Magnétiques (BM)

- $\mathbf{b}(x, y) \rightarrow +\infty$  quand  $d(x, y) \rightarrow +\infty$ ,  
 $d(x, y)$  : distance hyperbolique de  $(x, y)$  à  $(0, 1)$ .
- $\exists C_0 > 0$  t.q., pour tout champ de vecteurs  $X$  sur  $\mathbb{H}$ ,

$$|X\tilde{\mathbf{b}}| \leq C_0(|\tilde{\mathbf{b}}| + 1)\sqrt{g(X, X)}.$$

## Théorème ( T, A. Morame )

Sous les hypothèses (BM)  $P(A) = -\Delta_A$  est à **résolvante compacte**.

# Bouteilles Magnétiques : asymptotique

Pour tout réel  $\lambda$ , on désigne par  $N(\lambda, P)$  le nombre de valeurs propres de  $P$  qui sont strictement inférieures à  $\lambda$ .

**Théorème** ( T, A. Morame )

Sous les hypothèses (BM) et pour tout  $\delta \in ]\frac{1}{3}, \frac{2}{5}[$ , il existe une constante  $C > 0$  t.q.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{H}} \left(1 - \frac{C}{a_{\delta}(m)}\right) \mathbf{b}(m) \sum_{k=0}^{+\infty} [\lambda(1 - C\lambda^{-3\delta+1}) - \frac{1}{4} - (2k+1)\mathbf{b}(m)]_+^0 dv \\ \leq N(\lambda, -\Delta_A) \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{H}} \left(1 + \frac{C}{(a_{\delta}(m))}\right) \mathbf{b}(m) \sum_{k=0}^{+\infty} [\lambda(1 + C\lambda^{-3\delta+1}) - \frac{1}{4} - (2k+1)\mathbf{b}(m)]_+^0 dv$$

$$a_{\delta}(m) := (\mathbf{b}(m) + 1)^{(2-5\delta)/2}.$$

## Corollaire ( T, A. Morame )

- Si de plus  $\omega(\lambda) = \int_{\mathbb{H}} [\lambda - \mathbf{b}(m)]_+^0 dv$  vérifie  
 $\exists C_1 > 0$  t.q.  $\forall \lambda > C_1$  ,  
 $\forall \tau \in ]0, 1[$  ,  $\omega((1 + \tau)\lambda) - \omega(\lambda) \leq C_1 \tau \omega(\lambda)$  (\*), alors

$$N(\lambda; -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{H}} \mathbf{b}(m) \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[ \lambda - \frac{1}{4} - (2k + 1) \mathbf{b}(m) \right]_+^0 dv .$$

## Corollaire ( T, A. Morame )

- Si de plus  $\omega(\lambda) = \int_{\mathbb{H}} [\lambda - \mathbf{b}(m)]_+^0 dv$  vérifie  
 $\exists C_1 > 0$  t.q.  $\forall \lambda > C_1$  ,  
 $\forall \tau \in ]0, 1[$  ,  $\omega((1 + \tau)\lambda) - \omega(\lambda) \leq C_1 \tau \omega(\lambda)$  (\*), alors

$$N(\lambda; -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{H}} \mathbf{b}(m) \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[ \lambda - \frac{1}{4} - (2k + 1) \mathbf{b}(m) \right]_+^0 dv .$$

- (\*) est satisfaite si  $\omega(\lambda) \sim \alpha \lambda^k \ln^j \lambda$   
avec  $k > 0$  , (ou avec  $k = 0$  et  $j > 0$ ) .

# Exemple

- $\mathbf{b}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{2j} + p_1(y) + p_2(1/y) ,$

avec  $j \in \mathbb{N}^*$ , et  $p_1(s), p_2(s)$  se comportant comme des fonctions polynomiales d'ordre  $\geq 1$  pour les grandes valeurs de  $s$ .

- $\omega(\lambda) \sim \alpha \lambda^{\frac{1}{2j}} \ln \lambda \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty ,$

# Exemple

- $\mathbf{b}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{2j} + p_1(y) + p_2(1/y) ,$

avec  $j \in \mathbb{N}^*$ , et  $p_1(s), p_2(s)$  se comportant comme des fonctions polynomiales d'ordre  $\geq 1$  pour les grandes valeurs de  $s$ .

- $\omega(\lambda) \sim \alpha \lambda^{\frac{1}{2j}} \ln \lambda \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty ,$

- $N(\lambda; -\Delta_A) \sim \frac{C}{2\pi} \lambda^{1+1/2j} \ln \lambda \text{ quand } \lambda \rightarrow +\infty .$

## Remarque

- Cas euclidien,  $d = 2$  :

$$N(\lambda; -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{b}(x) \sum_{k \in \mathbb{N}} [\lambda - (2k + 1)\mathbf{b}(x)]_+^0 dx$$
$$(b_1(x) = \|B(x)\| = \mathbf{b}(x))$$

- Cas du demi-plan hyperbolique

$$N(\lambda; -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{H}} \mathbf{b}(m) \sum_{k \in \mathbb{N}} [\lambda - \frac{1}{4} - (2k + 1)\mathbf{b}(m)]_+^0 dv .$$

$$[\rho]_+^0 = 1 \text{ si } \rho > 0 , \quad [\rho]_+^0 = 0 \text{ si } \rho \leq 0 .$$

# Résultats reliés

- Résultats sur le demi-plan hyperbolique
  - Laplacien de Maass : (Elstrodt(73), Grosche(88), Comtet(87), Ikeda-Matsumoto (99), Kim-Lee(02))
  - Asympt. constant magnetic fields ,Pauli operators : (Inahama-Shirai (03))
  - Asymptotic distribution for Schrödinger operators : (Inahama-Shirai (04))
- Sur les variétés cuspidales :  
Asymptotic distribution for Schrödinger operators :  
(S.Golénia-Moroianu (08))



# Preuve

- La méthode du Minimax sur les formes quadratiques

# Preuve

- La méthode du Minimax sur les formes quadratiques
- Idées
  - Se ramener à  $\mathbb{R}^2$ ,
  - Choisir un bon potentiel vecteur,
  - Se localiser dans un "bon" rectangle  $\implies$  remplacer le problème initial par un problème à champ constant ,
  - Ecrire l' asymptotique sur un rectangle à champ constant,
  - Faire une partition de l'unité.

# Changement de variables

- difféomorphisme :  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $(x, y) = \phi(x, t) := (x, e^t)$
- opérateur unitaire  $\hat{U} : L^2(\mathbb{H}; dv) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2; dx dt)$   
 $w(x, t) = (\hat{U}u)(x, t) := e^{-t/2} u(x, e^t) \quad u \in L^2(\mathbb{H}).$

# Changement de variables

● difféomorphisme :  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$  ,  $(x, y) = \phi(x, t) := (x, e^t)$

● opérateur unitaire  $\hat{U} : L^2(\mathbb{H}; dv) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2; dxdt)$   
 $w(x, t) = (\hat{U}u)(x, t) := e^{-t/2} u(x, e^t) \quad u \in L^2(\mathbb{H}).$

● forme quadratique associée à  $P(A) = -\Delta_A$  :

$$q(u) = \int_{\mathbb{H}} [|y(D_x - A_1)u|^2 + |y(D_y - A_2)u|^2] \frac{dx dy}{y^2} , \quad u \in L^2(\mathbb{H})$$

## Changement de variables

● difféomorphisme :  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$  ,  $(x, y) = \phi(x, t) := (x, e^t)$

● opérateur unitaire  $\hat{U} : L^2(\mathbb{H}; dv) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2; dxdt)$   
 $w(x, t) = (\hat{U}u)(x, t) := e^{-t/2} u(x, e^t) \quad u \in L^2(\mathbb{H}).$

● forme quadratique associée à  $P(A) = -\Delta_A$  :

$$\begin{aligned} q(u) &= \int_{\mathbb{H}} [|y(D_x - A_1)u|^2 + |y(D_y - A_2)u|^2] \frac{dx dy}{y^2} , \quad u \in L^2(\mathbb{H}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [|e^t(D_x - \tilde{A}_1)w|^2 + |(D_t - e^t \tilde{A}_2)w|^2 + 1/4|w|^2] dx dt \end{aligned}$$

$$w \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad \tilde{A}_i(x, t) = A_i(x, e^t) \quad , \quad i = 1, 2 \quad .$$

## Jauge et contrôle du champ

- On choisit un potentiel tel que  $A_2 = 0$ .

Puisque  $\tilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$ , on prend

$$A_1(x, y) = - \int_1^y \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds \implies \tilde{A}_1(x, t) := - \int_1^{e^t} \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds$$

- La forme quadratique associée est

$$\hat{q}(w) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[ |e^t (D_x - \tilde{A}_1) w|^2 + |D_t w|^2 + 1/4 |w|^2 \right] dx dt .$$

## Jauge et contrôle du champ

- On choisit un potentiel tel que  $A_2 = 0$ .

Puisque  $\tilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$ , on prend

$$A_1(x, y) = - \int_1^y \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds \implies \tilde{A}_1(x, t) := - \int_1^{e^t} \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds$$

- La forme quadratique associée est

$$\hat{q}(w) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[ |e^t (D_x - \tilde{A}_1) w|^2 + |D_t w|^2 + 1/4 |w|^2 \right] dx dt .$$

- L'hypothèse (BM) permet de contrôler le champ par un champ **constant** sur les cubes de  $\mathbb{H}$  du type

$$\Omega(x_0, y_0, \varepsilon_0) := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq \varepsilon_0 y_0, |y - y_0| \leq \varepsilon_0 y_0\} :$$

## Jauge et contrôle du champ

- On choisit un potentiel tel que  $A_2 = 0$ .

Puisque  $\tilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$ , on prend

$$A_1(x, y) = - \int_1^y \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds \implies \tilde{A}_1(x, t) := - \int_1^{e^t} \frac{\tilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds$$

- La forme quadratique associée est

$$\hat{q}(w) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[ |e^t (D_x - \tilde{A}_1) w|^2 + |D_t w|^2 + 1/4 |w|^2 \right] dx dt .$$

- L'hypothèse (BM) permet de contrôler le champ par un champ **constant** sur les cubes de  $\mathbb{H}$  du type

$$\Omega(x_0, y_0, \varepsilon_0) := \{(x, y) / |x - x_0| \leq \varepsilon_0 y_0, |y - y_0| \leq \varepsilon_0 y_0\} :$$

$$\exists C_1 > 0 \text{ t.q si } \mathbf{b}(x_0, y_0) > 1 ,$$

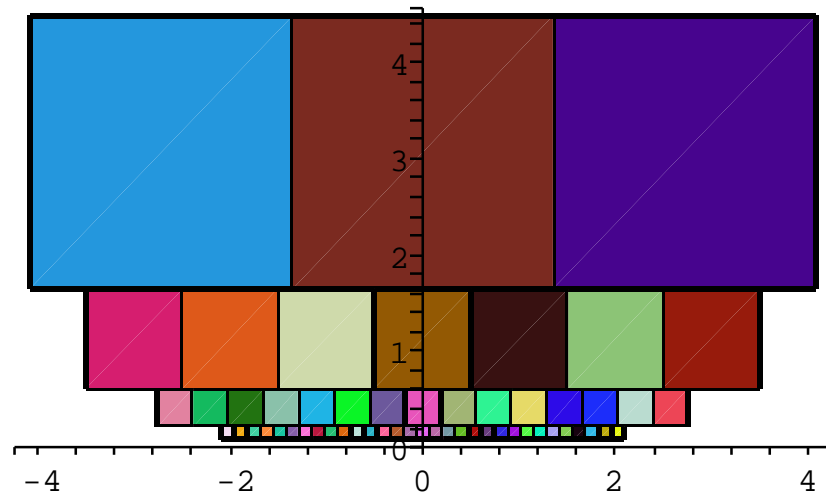
$$\frac{1}{C_1} \mathbf{b}(x_0, y_0) \leq \mathbf{b}(x, y) \leq C_1 \mathbf{b}(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in \Omega(x_0, y_0, \varepsilon_0).$$



# Pavage de $\mathbb{H}$

On pave  $\mathbb{H}$  au moyen des cubes du type

$$\Omega(x_0, y_0, \varepsilon_0) := \{(x, y) / |x - x_0| \leq \varepsilon_0 y_0, |y - y_0| \leq \varepsilon_0 y_0\}$$



# Passage de $\mathbb{H}$ à $\mathbb{R}^2$

- $\Omega(x_0, y_0, \varepsilon_0) := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq \varepsilon_0 y_0, |y - y_0| \leq \varepsilon_0 y_0\}$

- $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}, \quad \phi(x, t) = (x, e^t) .$

- Pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ , on désigne par  $K(\alpha)$  le rectangle

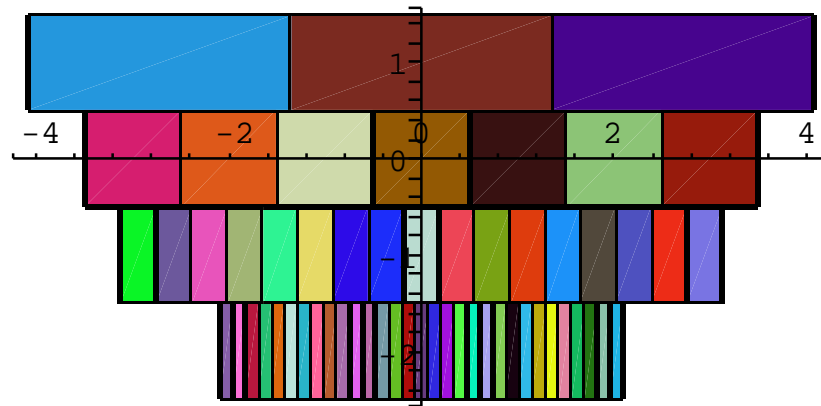
$$K(\alpha) = \left] -\frac{e^{\alpha_2}}{2} + e^{\alpha_2}\alpha_1, e^{\alpha_2}\alpha_1 + \frac{e^{\alpha_2}}{2} \right[ \times \left] -\frac{1}{2} + \alpha_2, \alpha_2 + \frac{1}{2} \right[ .$$

- On a

$$\mathbb{R}^2 = \cup_{\alpha} \overline{K(\alpha)} \quad \text{et} \quad K(\alpha) \cap K(\beta) = \emptyset \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta .$$

# Pavage de $\mathbb{R}^2$

On pave  $\mathbb{R}^2$  au moyen des rectangles  $\overline{K}(\alpha)$  .



# Surfaces hyperboliques de volume infini

## ● Définition

$(\mathcal{M}, g)$  : surface hyperbolique connexe

$$\mathcal{M} = \left( \bigcup_{j=0}^{J_1} M_j \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^{J_2} F_k \right) ;$$

●  $M_j$  ,  $F_k$  ouverts de  $\mathcal{M}$  ,  $M_0$  à fermeture compacte ,

●  $(j \neq 0$ :  $M_j$  isométriques à  $\mathbb{S} \times ]a_j^2, +\infty[$  , (cusps )

$$ds_j^2 = y^{-2} ( L_j^2 d\theta^2 + dy^2 )$$

$(a_j$  et  $L_j$  sont des constantes  $> 0$ )

●  $F_k$  isométriques à  $\mathbb{S} \times ]\alpha_k^2, +\infty[$  , (entonnoirs)

$$ds_k^2 = \tau_k^2 \cosh^2 t d\theta^2 + dt^2$$

$(\alpha_k$  et  $\tau_k$  sont des constantes  $> 0$ ) .

# Asymptotique

- On fixe  $z_0 \in M_0$  et on pose

$$d : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+ ; \quad d(z) = d_g(z, z_0) ;$$

$d_g(., .)$  : distance associée à la métrique  $g$ .

- (BMSH)

- $\lim_{d(z) \rightarrow \infty} \mathbf{b}(z) = +\infty$

- $|X\tilde{\mathbf{b}}(z)| \leq C_1(\mathbf{b}(z) + 1)e^{d(z)}|X|_g$

$$\forall X \in T_z\mathcal{M}, \forall z \in M_j, \quad j = 1, \dots, J_1 \quad (C_1 > 0)$$

- $|X\tilde{\mathbf{b}}(z)| \leq C_2(\mathbf{b}(z) + 1)|X|_g$

$$\forall X \in T_z\mathcal{M}, \forall z \in F_k, \quad k = 1, \dots, J_2 \quad (C_2 > 0)$$

- (T, A.Morame) Sous les hypothèses (BMSH) le théorème précédent reste vrai. .

# Corollaire

- Sous les hypothèses (BMSH) et si la fonction

$$\omega(\mu) = \int_{\mathcal{M}} [\mu - \mathbf{b}(m)]_+^0 dm \text{ vérifie :}$$

$$\exists C_1 > 0 \text{ t.q. } \forall \mu > C_1, \forall \tau \in ]0, 1[ ,$$

$$\omega((1 + \tau)\mu) - \omega(\mu) \leq C_1 \tau \omega(\mu) ,$$

$$\text{alors } N(\lambda, -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{N}(\lambda - \frac{1}{4}, \mathbf{b}(m)) dm .$$

$$\mathcal{N}(\mu, \mathbf{b}(m)) = \mathbf{b}(m) \sum_{k=0}^{+\infty} [\mu - (2k + 1)\mathbf{b}(m)]_+^0 \quad \text{si } \mathbf{b}(m) > 0 ,$$

$$\text{et } \mathcal{N}(\mu, \mathbf{b}(m)) = \mu/2 \quad \text{si } \mathbf{b}(m) = 0 .$$

# Corollaire

- Sous les hypothèses (BMSH) et si la fonction

$$\omega(\mu) = \int_{\mathcal{M}} [\mu - \mathbf{b}(m)]_+^0 dm \text{ vérifie :}$$

$$\exists C_1 > 0 \text{ t.q. } \forall \mu > C_1, \forall \tau \in ]0, 1[ ,$$

$$\omega((1 + \tau)\mu) - \omega(\mu) \leq C_1 \tau \omega(\mu) ,$$

$$\text{alors } N(\lambda, -\Delta_A) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{N}(\lambda - \frac{1}{4}, \mathbf{b}(m)) dm .$$

$$\mathcal{N}(\mu, \mathbf{b}(m)) = \mathbf{b}(m) \sum_{k=0}^{+\infty} [\mu - (2k + 1)\mathbf{b}(m)]_+^0 \quad \text{si } \mathbf{b}(m) > 0 ,$$

$$\text{et } \mathcal{N}(\mu, \mathbf{b}(m)) = \mu/2 \quad \text{si } \mathbf{b}(m) = 0 .$$

- On peut remplacer  $\int_{\mathcal{M}}$  par  $\sum_{k=1}^{J_2} \int_{F_k}$  ( les autres contributions sont bornées par  $C\lambda$  )

# Exemple

- On considère un champ magnétique du type suivant :
  - Sur  $F_k$ ,  $\mathbf{b}(\theta, t) = p_k(1/\cosh(t))$ ,
  - Sur  $M_j$ ,  $j > 0$ ,  $\mathbf{b}(\theta, y) = q_j(y)$ .
  - Les  $p_k(s)$  et les  $q_j(s)$  sont pour les grandes valeurs de  $s$  des fonctions polynomiales d'ordre  $\geq 1$ .
- Soit  $d = \max\{a_k, k = 1 \dots J_1\}$ , ( $a_k$  ordre de  $p_k(s)$ ) ; alors

$$N(\lambda, -\Delta_A) \sim \alpha \lambda^{1+1/d},$$

où  $\alpha > 0$  est une constante ne dépendant que des entonnoirs  $F_k$  sur lesquels  $p_k(s)$  est d'ordre  $d$ .



# Potentiels dégénérés

$$V(x) = f(y)g(z), \quad x = (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \quad n + p = d, \quad d \geq 2$$

$$f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+^*), \quad g \in C(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}_+),$$

# Potentils dégénérés

$$V(x) = f(y)g(z), \quad x = (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \quad n + p = d, \quad d \geq 2$$

$$f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+^*), \quad g \in C(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}_+),$$

● (H1)  $\exists a > 0$  t.q.  $g(tz) = t^a g(z) \quad \forall t > 0, \quad g(z) > 0 \quad \forall z \neq 0$ .

Le spectre de l'opérateur  $-\Delta_z + g(z)$  sur  $L^2(\mathbb{R}^p)$  est alors constitué de **valeurs propres positives**, que l'on note  $\mu_j$ .

# Potentils dégénérés

$$V(x) = f(y)g(z), \quad x = (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \quad n + p = d, \quad d \geq 2$$

$$f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+^*), \quad g \in C(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}_+),$$

- (H1)  $\exists a > 0$  t.q.  $g(tz) = t^a g(z) \quad \forall t > 0, \quad g(z) > 0 \quad \forall z \neq 0$ .

Le spectre de l'opérateur  $-\Delta_z + g(z)$  sur  $L^2(\mathbb{R}^p)$  est alors constitué de **valeurs propres positives**, que l'on note  $\mu_j$ .

- (H2)  $f(y) \rightarrow +\infty$  quand  $|y| \rightarrow +\infty$

Conséquence :  $H_h = -h^2 \Delta + V$  est **à résolvante compacte**.

# Potentiels dégénérés

$$V(x) = f(y)g(z), \quad x = (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \quad n + p = d, \quad d \geq 2$$

$$f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+^*), \quad g \in C(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}_+),$$

- (H1)  $\exists a > 0$  t.q.  $g(tz) = t^a g(z) \quad \forall t > 0, \quad g(z) > 0 \quad \forall z \neq 0$ .  
Le spectre de l'opérateur  $-\Delta_z + g(z)$  sur  $L^2(\mathbb{R}^p)$  est alors constitué de **valeurs propres positives**, que l'on note  $\mu_j$ .
- (H2)  $f(y) \rightarrow +\infty$  quand  $|y| \rightarrow +\infty$   
Conséquence :  $H_h = -h^2 \Delta + V$  est **à résolvante compacte**.
- (H3) hypothèse de régularité localement uniforme pour  $f$

## Théorème ( T, A.Morame)

On suppose vérifiées les conditions (H1)- (H3). Alors

$$N(\lambda; H_h) \approx h^{-n} (2\pi)^{-n} v_n n_{h,f}(\lambda) ,$$

$$n_{h,f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{N}} [\lambda - h^{2a/(2+a)} f^{2/(2+a)}(y) \mu_j]_+^{n/2} dy .$$

- Si de plus  $f^{-p/a} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in C^1(\mathbb{R}^p \setminus \{0\})$ , alors la formule de Weyl est encore vraie.
- Croissance de  $f$  à l'infini  $\implies$  ordre de grandeur de  $N(\lambda, H_h)$  :

## Théorème ( T, A.Morame)

On suppose vérifiées les conditions (H1)- (H3). Alors

$$N(\lambda; H_h) \approx h^{-n} (2\pi)^{-n} v_n n_{h,f}(\lambda) ,$$

$$n_{h,f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{N}} [\lambda - h^{2a/(2+a)} f^{2/(2+a)}(y) \mu_j]_+^{n/2} dy .$$

- Si de plus  $f^{-p/a} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in C^1(\mathbb{R}^p \setminus \{0\})$ , alors la formule de Weyl est encore vraie.
- Croissance de  $f$  à l'infini  $\implies$  ordre de grandeur de  $N(\lambda, H_h)$  :

Si  $\exists k > 0$  et  $C > 0$  t.q.  $\frac{1}{C}|y|^k \leq f(y) \leq C|y|^k$  pour  $|y| > 1$ , alors

$$\text{si } k > a \quad N(\lambda, H_h) \approx h^{-d}$$

$$\text{si } k = a \quad N(\lambda, H_h) \approx h^{-d} \ln \frac{1}{h}$$

$$\text{si } k < a \quad N(\lambda, H_h) \approx h^{-n - \frac{pa}{k}}$$

# Le min-max

- pavage de  $\mathbf{R}^n$  en cubes  $\{Q_r(r\gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^n\}$  + min-max

$$N(\lambda, H_{h,\gamma}^D) \leq N(\lambda, H_h) \leq N(\lambda, H_{h,\gamma}^N)$$

# Le min-max

- pavage de  $\mathbb{R}^n$  en cubes  $\{Q_r(r\gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^n\}$  + min-max

$$N(\lambda, H_{h,\gamma}^D) \leq N(\lambda, H_h) \leq N(\lambda, H_{h,\gamma}^N)$$

$$H_{h,\gamma}^D = -h^2 \Delta_y - h^2 \Delta_z + f(y)g(z) \quad \text{sur } Q_r(r\gamma) \times \mathbb{R}^p ,$$

avec condition de **Dirichlet** au bord .



# Le min-max

- pavage de  $\mathbb{R}^n$  en cubes  $\{Q_r(r\gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^n\}$  + min-max

$$N(\lambda, H_{h,\gamma}^D) \leq N(\lambda, H_h) \leq N(\lambda, H_{h,\gamma}^N)$$

$$H_{h,\gamma}^D = -h^2 \Delta_y - h^2 \Delta_z + f(y)g(z) \quad \text{sur } Q_r(r\gamma) \times \mathbb{R}^p ,$$

avec condition de **Dirichlet** au bord .

- Dans chaque  $Q_r(r\gamma)$  on majore  $f(y)$  par  $f(y_\gamma)$ .
- Homogénéité de  $g \implies$  les v.p. de l'opérateur  $-h^2 \Delta_z + f(y_\gamma)g(z)$  sont les  $\{(h^a f(y_\gamma))^\alpha \mu_j\}$  (  $\alpha = 2/(2+a)$  ).

# Le min-max

- pavage de  $\mathbf{R}^n$  en cubes  $\{Q_r(r\gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^n\}$  + min-max

$$N(\lambda, H_{h,\gamma}^D) \leq N(\lambda, H_h) \leq N(\lambda, H_{h,\gamma}^N)$$

$$H_{h,\gamma}^D = -h^2 \Delta_y - h^2 \Delta_z + f(y)g(z) \quad \text{sur } Q_r(r\gamma) \times \mathbb{R}^p ,$$

avec condition de **Dirichlet** au bord .

- Dans chaque  $Q_r(r\gamma)$  on majore  $f(y)$  par  $f(y_\gamma)$ .
- Homogénéité de  $g \implies$  les v.p. de l'opérateur  $-h^2 \Delta_z + f(y_\gamma)g(z)$  sont les  $\{(h^a f(y_\gamma))^\alpha \mu_j\}$  (  $\alpha = 2/(2+a)$  ).
- On minore  $N(\lambda, H_h)$  par la somme sur tous les cubes, de la somme pour tous les  $j$  de  $N(\lambda - (h^a f(y_\gamma))^\alpha \mu_j, -h^2 \Delta_{Q_r(r\gamma)}^D)$ .

# Résultats antérieurs

- $d = 2$ ,  $V(y, z) = y^{2k}(1 + z^2)^l$ , ( $k > 0, l > 0$ ) ( [D.Robert](#), 82)  
(opérateurs à symboles opérateurs)
- $d = 2$ , potentiels homogènes ( [B.Simon](#), 83)
- $d \geq 2$ , potentiels homogènes  $V(x) = F(y, z)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^p$ ,  
 $n + p = d$ , avec  $F(sy, tz) = s^b t^{a-b} F(y, z)$  ( $0 < a < b$ ) et  
 $F(y, z) > 0$  pour  $|z||y| \neq 0$  ( [M.Solomyak](#), 86)

Méthode: on donne le comportement asymptotique de l'opérateur d'évolution de l'opérateur  $H_1$  et on applique un théorème taubérien.