TERME PRINCIPAL DE LA FONCTION ZÊTA DES HAUTEURS ET TORSEURS UNIVERSELS*

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Soient V une variété de Fano et $\mathbf{H}$ un système de hauteurs d'Arakelov définissant un accouplement entre le groupe de Picard $\operatorname{Pic} V$ et les points rationnels de V à valeur dans $\mathbf{R}$. Soit $\zeta_{\mathbf{H}}$ la fonction zêta associée sur $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$. Batyrev, Manin et Tschinkel ont conjecturé que cette fonction est holomorphe sur un cône de sommet le faisceau anticanonique ω_V^{-1}. Il est en outre possible de donner une expression conjecturale du terme principal de cette fonction $\zeta_{\mathbf{H}}$ au voisinage de ce sommet. Le but de ce texte est de montrer comment cette expression conjecturale peut s'écrire naturellement en passant aux torseurs universels au-dessus de V.

Abstract. — Let V be a Fano variety and $\mathbf{H}$ a system of Arakelov's heights which defines a pairing between the Picard group $\operatorname{Pic} V$ and the set of rational points of V with values in $\mathbf{R}$. Let $\zeta_{\mathbf{H}}$ be the corresponding zeta function on $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$. Batyrev, Manin and Tschinkel conjectured that this function is holomorphic on a cone with appex at the anticanonical sheaf ω_V^{-1}. Moreover it is possible to give a conjectural formula for the principal term of this function in a neighbourhood of this point. The aim of this paper is to give new evidence for this formula by lifting it to the universal torsors over V.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — primaire 14G05; secondaires 14L30, 11D72.

*Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque 251, SMF, Paris, 259–298

1. Introduction

Soit V une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k telle que $H^i(V, \mathcal{O}_V)$ soit nul pour $i = 1$ ou 2 et telle que la classe du faisceau anticanonique ω_V^{-1} soit à l'intérieur du cône effectif. On suppose en outre que les points rationnels de V sont Zariski denses. Soit $\mathbf{h}$ une hauteur sur V correspondant à la donnée d'une paire $(L, (||.||_v)_{v \in M_k})$ où L est un fibré en droites dont la classe est dans le cône effectif et $(||.||_v)_{v \in M_k}$ un système adélique de métriques sur L. On s'intéresse alors au comportement asymptotique de

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) = \#\{x \in U(k) \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\}$$

où U est un ouvert dense de V.

A la connaissance de l'auteur, dans les exemples considérés à ce jour ce comportement est de la forme

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) \sim CH^a (\log H)^{b-1}$$

où C est une constante réelle strictement positive, $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 1$. Diverses conjectures à des degrés de précision divers ont été faites sur a et b par Batyrev et Manin (cf. [**FMT**], [**BM**] et [**Ma**]) puis, lorsque L est le faisceau anticanonique, sur C (cf. [**Pe**]). Les principales familles de variétés pour lesquelles des résultats ont été effectivement démontrés peuvent être regroupées en deux groupes : d'une part les intersections complètes lisses de grande dimension sur $\mathbf{Q}$, pour lesquelles on dispose de la méthode du cercle (cf. [**Bir**], [**FMT**]) et d'autre part les variétés sur lesquelles agissent des groupes algébriques avec une orbite ouverte pour lesquelles on utilise des techniques d'analyse harmonique fine (cf. [**FMT**], [**BT1**] et [**BT3**]). Peu de cas ont été traités en dehors de ces deux grands groupes, faute d'avoir une autre méthode générale. Toutefois Salberger a montré une majoration de la forme souhaitée pour la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}$, surface qui ne rentre dans aucun des deux groupes indiqués. La méthode qu'il utilise souligne le rôle du torseur universel pour attaquer le problème en général.

Ces torseurs universels, introduits par Colliot-Thélène et Sansuc en liaison avec les problèmes du principe de Hasse et de l'approximation faible (cf. [**CTS1**] et [**CTS2**]) apparaissent implicitement dans le cas des intersections complètes lisses en tant que cône au-dessus de la variété ainsi que dans des démonstrations directes de la formule asymptotique dans quelques cas particuliers de variétés toriques (cf. [**Pe**] et [**Ro**]). Tout récemment, Salberger a démontré dans [**Sal**] comment la constante $\# H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{V})\tau_{\mathbf{h}}(V)$ où $\tau_{\mathbf{h}}(V)$ a été défini dans [**Pe**], constante qui apparaît dans la plupart des cas considérés à ce jour, pouvait s'interpréter comme somme de nombres de Tamagawa associés aux torseurs universels ayant un point rationnel.

Le but de ce texte est similaire : il s'agit de montrer comment la conjecture actuellement la plus précise sur le terme principal de la fonction zêta des hauteurs

$$\zeta_{\mathbf{H}} : \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

peut s'exprimer de manière naturelle comme passage d'une sommation sur les points rationnels à une intégrale sur un domaine de type adélique muni d'une mesure canonique.

Les outils développés permettent également d'interpréter la conjecture de Manin raffinée sur $n_{U,\mathbf{h}}(H)$ pour une hauteur $\mathbf{h}$ associée a ω_V^{-1} en termes des torseurs universels.

Dans la partie 2, nous introduisons les notations qui nous sont nécessaires puis rappelons la formule empirique obtenue pour le terme principal de la fonction zêta des hauteurs. La partie 3 est consacrée à des rappels sur les torseurs universels.

La partie 4 décrit le relèvement de divers objets à ces torseurs. Enfin la partie 5 contient les deux résultats principaux et leurs démonstrations.

2. Le terme principal de la fonction zêta des hauteurs

2.1. Notations. — Nous allons tout d'abord fixer un certain nombre de notations qui seront utilisées dans l'ensemble du texte.

Notations 2.1.1. — Pour tout corps E, on note $\overline{E}$ une clôture algébrique de E et E^s la clôture séparable de E dans $\overline{E}$. Pour tout $\mathrm{Gal}(E^s/E)$-module discret M, on désigne par $H^i(E,M)$ le groupe de cohomologie $H^i(\mathrm{Gal}(E^s/E),M)$.

Dans la suite k désigne un corps de nombres, $\mathcal{O}_k$ son anneau des entiers et d son discriminant. L'ensemble des places de k est noté M_k, l'ensemble des places finies M_f et l'ensemble des places archimédiennes M_∞. Pour tout $v \in M_k$, on note k_v le complété de k en v, $|.|_v$ la norme associée normalisée par

$$\forall v|p, \quad \forall x \in k_v, \quad |x|_v = \left|N_{k_v/\mathbf{Q}_p}(x)\right|_p.$$

Si v appartient à M_f, $\mathcal{O}_v$ désigne l'anneau des entiers de k_v et $\mathbf{F}_v$ le corps résiduel. Pour tout v de M_∞ tel que $[k_v : \mathbf{R}] = 2$, on fixe un isomorphisme de k_v sur $\mathbf{C}$. Pour toute place v, la mesure de Haar dx_v sur k_v est normalisée comme dans [**We**, § 2.1.1] ; autrement dit,

- si $v \in M_f$, alors $\int_{\mathcal{O}_v} dx_v = 1$,
- si $k_v = \mathbf{R}$, alors dx_v est la mesure de Lebesgue usuelle,
- si $k_v = \mathbf{C}$, alors $dx_v = i\,dz\,d\bar{z} = 2\,dx\,dy$.

Soit $\mathcal{V}$ un schéma sur un anneau A. Alors pour toute A-algèbre B, $\mathcal{V}(B)$ désigne l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,A}(\mathrm{Spec}\,B, \mathcal{V})$ et $\mathcal{V}_B$ le produit $\mathcal{V} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,B$. Si V est défini sur k et $v \in M_k$, on note V_v le schéma V_{k_v}.

Si V est une variété lisse sur un corps E, son groupe de Picard est noté $\mathrm{Pic}\,V$, son groupe de Neron-Severi $\mathrm{NS}(V)$ et son faisceau canonique ω_V. On note également $C_{\mathrm{eff}}(V)$ le cône dans $\mathrm{NS}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ engendré par les classes de diviseurs effectifs. Si V est une variété sur k, $V(\boldsymbol{A}_k)$ désigne l'espace adélique associé (cf. [**We**, § 1]).

Si A est une partie de B, on note $\mathbf{1}_A$ sa fonction indicatrice.

Hypothèses 1. — Dans la suite V désigne une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur k qui satisfait les conditions suivantes :

(i) $H^i(V,\mathcal{O}_V) = 0$ pour $i = 1$ ou 2,

(ii) $\mathrm{Pic}\,\overline{V} = \mathrm{NS}\,\overline{V}$ est sans torsion,

(iii) ω_V^{-1} appartient à l'intérieur du cône $C_{\text{eff}}(V)$ et
(iv) $V(k)$ est Zariski dense dans V.

Ces hypothèses suffisent pour définir les objets décrits dans [**Pe**]. Toutefois nous serons amenés par la suite à supposer que la variété vérifie d'autres conditions plus techniques.

2.2. Hauteurs. — Dans la suite nous utiliserons les hauteurs d'Arakelov qui sont définies de la manière suivante :

Définitions 2.2.1. **—** Soit X une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur k, L un faisceau inversible sur X. Pour toute place v de k, une *métrique v-adique* sur L est une application qui à tout point x de $X(k_v)$ associe une norme $\|.\|_v$ sur $L(x) = L_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k_v$ de sorte que pour tout ouvert W de X et toute section s de L sur W l'application

$$x \mapsto \|\mathrm{s}(x)\|_v$$

soit continue.

Une *métrique adélique* sur L est une famille de métriques $(\|.\|_v)_{v \in M_k}$ de sorte qu'il existe un ensemble fini $S \subset M_f$, un modèle projectif et lisse $\mathscr{X}$ de X sur $\mathcal{O}_S$ et un modèle $\mathscr{L}$ de L sur $\mathscr{X}$ de sorte que pour tout $v \in M_f - S$, pour tout $x \in X(k_v)$, correspondant à $\tilde{x} \in \mathscr{X}(\mathcal{O}_v)$, la norme $\|.\|_v$ sur $L(x)$ soit définie à l'aide d'un générateur y_0 du $\mathcal{O}_v$-module de rang un $\tilde{x}^*(\mathscr{L})$ par la formule

$$\forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = \left|\frac{y}{y_0}\right|_v.$$

Une *hauteur d'Arakelov* $\mathbf{h}$ sur X est la donnée d'une paire $(L, (\|.\|_v)_{v \in M_k})$ où L est un fibré en droites et $(\|.\|_v)_{v \in M_k}$ une métrique adélique sur le fibré en droites L. Si $\mathbf{h}$ est une hauteur sur X et si x est un point rationnel de X, alors la *hauteur de x relativement à* $\mathbf{h}$ est définie par

$$\mathbf{h}(x) = \prod_{v \in M_k} \|\mathrm{s}(x)\|_v^{-1}$$

où s est une section de L sur un voisinage de x avec $\mathrm{s}(x) \neq 0$. Par la formule du produit cela est indépendant du choix de la section.

Pour tout sous-espace constructible W de V et tout $H > 0$ on pose

$$n_{W,\mathbf{h}}(H) = \#\{x \in W(k) \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\} \leqslant +\infty.$$

Remarques 2.2.1. — (i) Si $[L]$ appartient à l'intérieur du cône effectif, alors il existe un ouvert non vide U de X tel que $n_{U,\mathbf{h}}(H)$ soit fini pour tout H.

(ii) On a une notion évidente de produit tensoriel de hauteurs et

$$\forall x \in X(k), \quad \mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_2(x) = \mathbf{h}_1(x)\mathbf{h}_2(x).$$

2.3. Mesures de Tamagawa. — Nous allons maintenant rappeler comment toute métrique adélique sur ω_V^{-1} définit une mesure sur $V(\boldsymbol{A}_k)$.

Notations 2.3.1. — Soit $\mathbf{h} = (\omega_V^{-1}, (\|.\|_v)_{v \in M_k})$ une hauteur sur V. Pour toute place v de k, on lui associe la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$ sur $V(k_v)$ définie par la relation (cf. [**We**], [**Pe**, § 2.2.1])

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_v dx_{1,v} \ldots dx_{n,v} \tag{2.3.1}$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des coordonnées locales analytiques au voisinage d'un point x de $V(k_v)$ et $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ est vu comme section locale de ω_V^{-1}.

Comme dans [**Pe**, Lemme 2.1.1], il existe un ensemble fini de places $S_0 \subset M_f$ et un modèle projectif et lisse $\mathcal{V}$ de V sur $\mathcal{O}_{S_0}$ dont les fibres sont géométriquement intègres et tel que, pour tout $\mathfrak{p} \in M_f - S_0$, il existe un isomorphisme de $\operatorname{Pic}(\overline{V})$ sur $\operatorname{Pic}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ compatible aux actions des groupes de Galois et tel que pour tout nombre premier l non divisible par $\mathfrak{p}$ la partie l-primaire du groupe de Brauer $\operatorname{Br}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}})$ soit finie.

On considère alors les termes locaux de la fonction L associée à $\operatorname{Pic} \overline{V}$, définis pour toute place $\mathfrak{p} \in M_f - S_0$ par

$$L_\mathfrak{p}(s, \operatorname{Pic} \overline{V}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(1 - (\#\mathbf{F}_\mathfrak{p})^{-s} \operatorname{Fr}_\mathfrak{p} \mid \operatorname{Pic} \mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{p}} \otimes \mathbf{Q})}$$

où $\operatorname{Fr}_\mathfrak{p}$ désigne le Frobenius géométrique en $\mathfrak{p}$. La fonction L globale est alors définie par le produit eulérien

$$L_{S_0}(s, \operatorname{Pic} \overline{V}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S_0} L_\mathfrak{p}(s, \operatorname{Pic} \overline{V}).$$

Comme dans [**Pe**, lemme 2.2.5], on montre que ce produit converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 1$ et s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle d'ordre $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V$ en 1.

On utilise les facteurs de convergences $(\lambda_v)_{v\in M_k}$ définis par

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \operatorname{Pic}\overline{V}) & \text{si } v \in M_f - S_0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il résulte alors des conjectures de Weil démontrées par Deligne que la mesure adélique $\prod_{v\in M_k} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$ converge (cf. [**Pe**, proposition 2.2.2]).

Remarque 2.3.1. — Il est également possible d'utiliser la série L associée au groupe de cohomologie $H^2_{\text{ét}}(\overline{V}, \mathbf{Q}_l(1))$ comme le propose Swinnerton-Dyer dans [**SD**].

Définition 2.3.2. — Avec les notations qui précèdent, la *mesure de Tamagawa* associée à $\mathbf{h}$ est donnée par

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}} = \left(\lim_{s\to 1}(s-1)^t L_{S_0}(s, \operatorname{Pic}\overline{V})\right) \frac{1}{\sqrt{d}^{\dim V}} \prod_{v\in M_k} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v},$$

où t est le rang de $\operatorname{Pic} V$. Elle est indépendante du choix de S_0.

On pose également

$$\tau_{\mathbf{h}}(V) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}\left(\overline{V(k)}\right).$$

2.4. Notions de répartition. — Une des premières questions qu'on est amené à se poser lorsqu'on étudie le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur une variété est la question de la répartition asymptotique des points rationnels. Ce phénomène peut être considéré à différents niveaux de précision.

La notion la plus stricte, introduite par Manin, est celle de sous-variété accumulatrice.

Définition 2.4.1. — Soit F un sous-espace constructible de V. Alors pour toute hauteur $\mathbf{h} = (L, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_k})$ avec $[L]$ appartenant à l'intérieur du cône $C_{\text{eff}}(V)$, on note

$$a_F(L) = \varlimsup_{H\to+\infty} \log(n_{F,\mathbf{h}}(H))/\log H \leqslant +\infty$$

qui donne la puissance de H apparaissant dans le comportement asymptotique de $n_{F,\mathbf{h}}(H)$.

Un fermé irréductible F de V est dit *L-accumulateur* (ou simplement *accumulateur* quand $L = \omega_V^{-1}$) si et seulement si, pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V avec $a_W(L) > a_U(L)$.

Remarques 2.4.1. — (i) Par [**BM**, proposition 1.4.a], le fait d'être L-accumulateur ne dépend pas du choix de la métrique adélique sur L.

(ii) A la connaissance de l'auteur, dans les exemples étudiés à ce jour, si $[\omega_V^{-1}]$ appartient à l'intérieur de $C_{\text{eff}}(V)$, le complémentaire des sous-variétés $[L]$-accumulatrices dans V est un ouvert de Zariski non vide de V.

(iii) Batyrev et Manin ont défini dans [**BM**, §2.5] une notion de sous-variété géométriquement accumulatrice de la manière suivante : on considère pour toute sous-variété irréductible F de V, une normalisation $\overline{F}$ de F d'ouvert lisse $\overline{F}_0$; si $\phi : \overline{F}_0 \to V$ est l'application induite, on pose

$$a_F^{\text{géo}}(L) = \inf \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}_{>0} \,\middle|\, \Gamma(\overline{F}_0, \phi^*(L)^{\otimes p} \otimes \omega_{\overline{F}_0}^{\otimes q} \neq \{0\} \right\}$$

et la sous-variété est dite géométriquement accumulatrice si $a_F^{\text{géo}}(L) > a_V^{\text{géo}}(L)$. Il est envisageable que les deux notions coïncident lorsque le corps est suffisamment gros (i. e. contient un sous-corps fixé).

En ce qui concerne les sous-variétés accumulatrices, le faisceau anticanonique ne joue pas un rôle vraiment particulier. Il n'en est plus de même lorsqu'on considère la notion suivante :

Définition 2.4.2. — Soit $\mathbf{h}$ une hauteur dont le fibré est à l'intérieur de $C_{\text{eff}}(V)$. Un fermé irréductible strict F de V est dit *modérément accumulateur* pour $\mathbf{h}$ si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$\varlimsup_{H \to +\infty} \frac{n_{W,\mathbf{h}}(H)}{n_{U,\mathbf{h}}(H)} > 0$$

Remarques 2.4.2. — (i) Si pour une hauteur $\mathbf{h} = (L, (\|.\|_v)_{v \in M_k})$, pour tout ouvert U de V et tout nombre reel $B > 0$

$$\varliminf_{H \to +\infty} n_{U,\mathbf{h}}(BH)/n_{U,\mathbf{h}}(H) > 0,$$

ce qui est vérifié si $n_{U,\mathbf{h}}(H)$ est de la forme $CH^a(\log H)^{b-1}$ avec $a > 0$ alors un fermé est modérément accumulateur pour $\mathbf{h}$ si et seulement s'il l'est pour toute hauteur $\mathbf{h}'$ correspondant à une métrique sur L.

(ii) Il est aisé d'obtenir des variétés V telles que si $[L] \notin \mathbf{R}_{>0}[\omega_V^{-1}]$, alors les sous-variétés modérément accumulatrices pour L sont Zariski denses. Ainsi pour

$V = \mathbf{P}^1_k \times \mathbf{P}^1_k$ et $L = \mathcal{O}(m, m')$ avec $m > m' > 0$, toutes les fibres de la projection sur le premier facteur sont modérément accumulatrices pour L.

(iii) Lorsque $L = \omega_V^{-1}$, on ne connaît pas d'exemple où l'on ait montré que les sous-variétés modérément accumulatrices sont Zariski denses. Toutefois, dans le contre-exemple à la conjecture de Batyrev et Manin sur la puissance du logarithme, construit par Batyrev et Tschinkel dans [**BT2**] et qui est une variété fibrée en surfaces cubiques, il est vraisemblable que toutes les fibres dont le groupe de Picard est de rang 7 sur k sont faiblement accumulatrices. Or ces fibres sont Zariski denses.

(iv) Si F est une sous-variété lisse et si $0 < a_F^{\text{géo}}(L) < +\infty$, on peut également définir $b_F^{\text{géo}}(L)$ comme la codimension de la face du cône $[\omega_F^{-1}] + C_{\text{eff}}(F)$ contenant $a_F^{\text{géo}}(L)\left[L_{|F}\right]$ dans $\mathrm{NS}(F)$. On peut alors se poser la question de savoir si les sous-variétés modérément accumulatrices minimales sont données par les conditions :

$$a_F^{\text{géo}}(L) > a_V^{\text{géo}}(L),$$

auquel cas la sous-variété est géométriquement accumulatrice, ou

$$a_F^{\text{géo}}(L) = a_V^{\text{géo}}(L) \quad \text{et} \quad b_F^{\text{géo}}(L) \geqslant b_V^{\text{géo}}(L).$$

Il faut noter que le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel est basé sur cette idée géométrique.

Si le complémentaire des sous-variétés modérément accumulatrices est un ouvert de Zariski U non vide de V, ce qui semble être assez général pour $L = \omega_V^{-1}$, lorsque V vérifie les hypothèses 1, on peut se demander comment sont répartis les points rationnels d'un point de vue adélique. Une réponse semble être donnée à cette question par la notion d'équidistribution, définie dans [**Pe**, § 3] de la manière suivante :

Définition 2.4.3. — On dit qu'un ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$ est *bon* si et seulement s'il existe une hauteur $\mathbf{h}$ correspondant à une métrique sur ω_V^{-1} telle que $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(\partial W) = 0$ où ∂W désigne $\overline{W} - W$. Cela est alors vrai pour toute métrique.

On dit alors que les points de V sont *équidistribués* sur U ouvert de Zariski de V si et seulement s'il existe une métrique adélique sur ω_V^{-1} telle que pour tout bon ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\#\{x \in U(k) \cap W \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\}}{n_{U,\mathbf{h}}(H)} & \longrightarrow & \dfrac{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(W \cap \overline{V(k)})}{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(\overline{V(k)})} \\ H & \longrightarrow & +\infty \end{array}$$

Remarques 2.4.3. — (i) Dans [**Pe**], on montre que les points de V sont équidistribués sur V si c'est une variété de drapeau généralisée, c'est-à-dire de la forme $P\backslash G$ où G est un groupe algébrique linéaire semi-simple et P un k-sous-groupe parabolique de G, ou si V est une intersection complète lisse définie par m polynômes homogènes de degré d en $N+1$ variables avec

$$N > 2^{d-1}m(m+1)(d-1).$$

(ii) Comme dans [**Pe**, remarque 3.1], on montre que si les points sont équidistribués dans U alors cet ouvert est inclus dans le complémentaire des sous-variétés modérément accumulatrices pour la hauteur correspondante.

On peut alors poser la question suivante :

Question 2.4.4. — *Fixons une hauteur* $\mathbf{h}$ *définie par une métrique sur le faisceau* ω_V^{-1}. *Si U, le complémentaire des sous-variétés modérément accumulatrices de V est un ouvert de Zariski non vide, les points rationnels de V sont-ils équidistribués dans U ?*

Hypothèse 2. — Dans la suite on suppose en outre que le complémentaire U des sous-variétés modérément accumulatrices pour toute hauteur relative à ω_V^{-1} est un ouvert de Zariski non vide de V.

2.5. Fonction zêta des hauteurs

Définition 2.5.1. — On note $\mathscr{H}(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de hauteurs d'Arakelov modulo la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par

$$\forall (\lambda_v)_{v\in M_k} \in \bigoplus_{v\in M_k} \mathbf{R}_{>0}, \prod_{v\in M_k} \lambda_v = 1 \Rightarrow (L, (\|.\|_v)_{v\in M_k}) \sim (L, (\lambda_v\|.\|_v)_{v\in M_k}).$$

L'ensemble $\mathscr{H}(V)$ muni du produit tensoriel est un groupe commutatif et on a un morphisme canonique $\boldsymbol{o} : \mathscr{H}(V) \to \mathrm{Pic}(V)$.

On appelle *système de hauteurs* un morphisme $\mathbf{H} : \mathrm{Pic}\, V \to \mathscr{H}(V)$ qui est une section du morphisme d'oubli : $\boldsymbol{o}\circ\mathbf{H} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Pic}\, V}$.

Remarques 2.5.1. — (i) Si on se donne une base $([L_i])_{1\leqslant i\leqslant t}$ de $\mathrm{Pic}\, V \otimes \mathbf{R}$ où pour tout i, L_i est un faisceau très ample sur V et si on fixe des métriques m_i sur L_i données par des bases de $\Gamma(V, L_i)$ (cf. [**Pe**, page 107]), alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \{[L_i], 1\leqslant i\leqslant t\} & \to & \mathscr{H}(V) \\ {[L_i]} & \mapsto & [(L_i, m_i)] \end{array}$$

s'étend de manière unique en un système de hauteurs sur V.

(ii) Si $\mathbf{h} = (\omega_V^{-1}, (||.||_v)_{v\in M_k})$ est un représentant de $\mathbf{H}([\omega_V^{-1}])$, on notera, par abus de langage, $n_{U,\mathbf{H}}$ pour $n_{U,\mathbf{h}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}$ pour $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}$, etc. Il faut noter que, par la formule du produit, cela est indépendant du choix du représentant.

Définition 2.5.2. — ([**Ar**, page 408], [**FMT**, §2.1]) Soit $\mathbf{H}$ un système de hauteurs sur V, il induit un accouplement $\mathbf{H} : \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C} \times V(k) \to \mathbf{C}$ qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et tel que

$$\forall L \in \operatorname{Pic} V, \quad \forall x \in V(k), \quad \mathbf{H}(L, x) = \mathbf{H}(L)(x).$$

La fonction zêta des hauteurs associée au système $\mathbf{H}$ est définie par

$$\forall s \in \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}, \quad \zeta_{\mathbf{H}}(s) = \sum_{x \in U(k)} \mathbf{H}(s, x)^{-1}$$

qui converge absolument dans un cône ouvert de $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$.

2.6. Une question optimiste

Notations 2.6.1. — Comme dans [**BT1**, §2.4], on utilise la *fonction caractéristique* du cône effectif, qui remonte à [**Kö**], définie par

$$\forall s \in \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}, \quad \chi_{C_{\text{eff}}(V)}(s) = \int_{C_{\text{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle s, y\rangle}\, dy$$

où $C_{\text{eff}}(V)^\vee$ est le cône dual de $C_{\text{eff}}(V)$, c'est-à-dire

$$C_{\text{eff}}(V)^\vee = \{x \in (\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R})^\vee \mid \forall y \in C_{\text{eff}}(V), \langle x, y\rangle \geqslant 0\}$$

et dy est la mesure de Haar sur $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$ normalisée par le dual du réseau naturel de $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$.

On pose également $\alpha(V) = \chi_{C_{\text{eff}}(V)}(\omega_V^{-1})/(t-1)!$ où $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V$ qui coïncide avec la constante définie dans [**Pe**, définition 2.4] et, comme dans [**BT1**, corollary 1.4.16], $\beta(V) = \# H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{V})$.

Les divers exemples connus amènent à se poser la question suivante qui est une version raffinée d'une conjecture de Batyrev et Manin [**BM**, conjecture B$'$] :

Question 2.6.1 **(corrigée).** — *Pour quelles variétés V vérifiant les hypothèses 1 et 2, existe-t-il un système de hauteurs $\mathbf{H}$ tel que la fonction zêta $\zeta_{\mathbf{H}}$ converge sur*

$$\mathscr{C} = \omega_V^{-1} + \overset{\circ}{\overbrace{C_{\text{eff}}(V)}} + i \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$$

et tel que la fonction $s \mapsto \zeta_{\mathbf{H}}(s\omega_V^{-1})/\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}((s-1)\omega_V^{-1})$ *s'étende en une fonction holomorphe sur un ouvert contenant 1 et prenne la valeur* $\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V)$ *en 1 ?*[1]

Remarques 2.6.2. — (i) Par un théorème taubérien standard (cf. [**BT1**, theorem 3.3.2]), une réponse positive à cette question implique que

$$n_{U,\mathbf{H}}(H) \sim \alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V)H(\log H)^{t-1} \text{ quand } H \to +\infty,$$

où $t = \operatorname{rg} \operatorname{Pic} V$.

(ii) Par [**FMT**, §2] et [**Pe**, théorème 6.2.2], la réponse est positive si V est une variété de drapeaux généralisée grâce aux travaux de Langlands sur les séries d'Eisenstein. Par [**BT1**] et [**BT3**] elle est également positive pour les variétés toriques lisses.

(iii) Dans [**BT1**], Batyrev et Tschinkel donnent un exemple où la fonction $\zeta_{\mathbf{H}}$ ne peut pas avoir d'extension méromorphe à $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$.

3. Rappels sur les torseurs universels

3.1. Les tores. — Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques notions sur les tores algébriques ainsi que le résultat d'Ono sur leur nombre de Tamagawa.

Définition 3.1.1. — Soit E un corps. Un *tore* sur E est un groupe algébrique commutatif T tel que

$$\overline{T} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_{m,\overline{E}}^{\dim T}.$$

On dit qu'une extension F de E *déploie* T si et seulement s'il existe un isomorphisme $T_F \xrightarrow{\sim} (\mathbf{G}_{m,F})^{\dim T}$. Par [**Ono2**, proposition 1.2.1], il existe une telle extension de E qui est séparable et finie.

Théorème 3.1.1. — *(cf.* [**Ono2**, remark 1.2.1]*) Il existe une équivalence de catégories entre les tores algébriques sur un corps E et les* $\operatorname{Gal}(E^s/E)$*-réseaux, c'est-à-dire les* $\operatorname{Gal}(E^s/E)$*-modules qui sont libres et de rang fini en tant que* $\mathbf{Z}$*-modules. Cette*

1. Comme me l'a fait remarquer Yuri Tschinkel, la fonction

$$s \mapsto \zeta_{\mathbf{H}}(s)/\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})$$

ne peut pas s'étendre en un voisinage de ω_V^{-1} en raison des zéros du numérateur de $\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})$. En particulier cela est faux pour les variétés toriques lisses en général. La question posée dans Astérisque est donc affaiblie ici.

équivalence de catégories est donnée par le foncteur contravariant qui à T associe le groupe des caractères de T

$$X^*(T) = \mathrm{Hom}_{E^s}(T_{E^s}, \mathbf{G}_m).$$

Définition 3.1.2. — Soit $(\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant \dim T}$ une base de $X^*(T)$ alors la forme différentielle

$$\omega_T = \bigwedge_{i=1}^{\dim T} \xi_i^{-1} d\xi_i$$

est, au signe près, indépendante du choix de la base. Elle est invariante sous l'action de T et définie sur E. On l'appelle la *forme canonique* de T.

Passons maintenant au cas des tores sur le corps de nombres k.

Notations 3.1.3. — Soit T un tore sur k et K une extension séparable finie qui déploie T. Soit $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, $X^*(T)_k = X^*(T)^{\mathscr{G}}$, et $X_*(T)$ le $\mathscr{G}$-réseau dual $\mathrm{Hom}(X^*(T), \mathbf{Z})$.

Pour toute place v de k, soit $\mathscr{G}_v \subset \mathscr{G}$ le groupe de décomposition de v, $X^*(T)_v$ le groupe $X^*(T)^{\mathscr{G}_v}$ et $X_*(T)_v = X_*(T)^{\mathscr{G}_v}$. Par abus de notations, le sous-groupe compact maximal de $T(k_v)$ est noté $T(\mathcal{O}_v)$. On a alors une injection canonique (cf. [**Ono2**, §2.1]).

$$\log_v : T(k_v)/T(\mathcal{O}_v) \to X_*(T)_v \otimes \mathbf{R}$$

définie par $\forall r \in T(k_v)$, $\forall \xi \in X^*(T)_v$, $|\xi(r)|_v = q_v^{\log_v([r])(\xi)}$, où $q_v = \#\mathbf{F}_v$ si $v \in M_f$, $q_v = e$ si $k_v = \mathbf{R}$ et $q_v = e^2$ sinon. Par [**Ono2**, §2.1], $\log_v$ est un isomorphisme si v est archimédienne, d'après [**Dr**, page 449] l'image de $\log_v$ est $X_*(T)_v$ si v est finie et non ramifiée dans K/k et c'est un sous-module d'indice fini de $X_*(T)_v$ dans le cas restant.

L'espace adélique associé, $T(\boldsymbol{A}_k)$ est, par définition, le produit restreint des $T(k_v)$ relativement aux $T(\mathcal{O}_v)$.

On note $K_T = \prod_{v \in M_k} T(\mathcal{O}_v)$, $W(T) = K_T \cap T(k)$ et

$$T^1(\boldsymbol{A}_k) = \{ (r_v)_{v \in M_k} \in T(\boldsymbol{A}_k) \mid \forall \xi \in X^*(T)_k, \prod_{v \in M_k} |\xi(r_v)| = 1 \}.$$

Si S est une partie finie de M_k, on note

$$T_S(\boldsymbol{A}_k) = \prod_{v \in S} T(k_v) \times \prod_{v \in M_k - S} T(\mathcal{O}_v) \subset T(\boldsymbol{A}_k).$$

***Proposition 3.1.2* (Ono, [Ono1, theorem 4] et [Ono2, pages 120–122])**
On conserve les notations qui précèdent. On a alors :
(i) $T(\boldsymbol{A}_k)/T^1(\boldsymbol{A}_k) \xrightarrow{\sim} (X^*(T)_k)^\vee \otimes \mathbf{R}$,
(ii) $T^1(\boldsymbol{A}_k)/T(k)$ *est compact,*
(iii) $W(T)$ *est le groupe fini des éléments de torsion dans* $T(k)$,
(iv) Il existe un ensemble fini de places S_1 *contenant* M_∞, *tel que pour tout* S *contenant* S_1

$$T_S(\boldsymbol{A}_k).T(k) = T(\boldsymbol{A}_k).$$

Autrement dit, il existe S_1 *tel que l'application naturelle*

$$T(k) \to \bigoplus_{v \in M_k - S_1} X_*(T)_v$$

soit surjective,
(v) Soit S *comme dans* (iv) *et* $\mathcal{O}_S$ *l'anneau des* S*-entiers. On a une suite exacte*

$$0 \to W(T) \to T(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\log_S} \prod_{v \in S} X_*(T)_v \otimes \mathbf{R}$$

et l'image de $\log_S$ *est un réseau du noyau du morphisme naturel*

$$\begin{array}{rcl} \prod_{v \in S} X^*(T)_v^\vee \otimes \mathbf{R} & \to & X^*(T)_k^\vee \otimes \mathbf{R} \\ (\lambda_v)_{v \in S} & \mapsto & \sum_{v \in S} (\log q_v) \lambda_v. \end{array}$$

Nous passons maintenant à la définition du nombre de Tamagawa de T.

Notations 3.1.4. — Pour toute place v de k, soit $\boldsymbol{\omega}_{T,v}$ la mesure de Haar sur $T(k_v)$ définie par la forme différentielle ω_T (cf. [**We**]).

Soit S un ensemble fini de places contenant les places archimédiennes, les places ramifiées dans K/k et vérifiant l'assertion (iv) de la proposition. Pour tout $v \in M_f - S$, le terme local de la fonction L associé à $X^*(T)$ est défini par

$$L_v(s, X^*(T)) = \frac{1}{\det(1 - (\#\mathbf{F}_v)^{-s} \operatorname{Fr}_v \mid X^*(T))}$$

où Fr_v est un morphisme de Frobenius en v. La fonction L globale associée est donnée par

$$L_S(s, X^*(T)) = \prod_{v \in M_f - S} L_v(s, X^*(T)).$$

Comme dans [**Ono2**, §3.3], on utilise les facteurs de convergence

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, X^*(T))^{-1} & \text{si } v \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on considère la mesure adélique

$$\boldsymbol{\omega}_T = \left(\lim_{s\to 1}(s-1)^{\operatorname{rg} X^*(T)_k} L_S(s, X^*(T))\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{d}^{\dim T}} \prod_{v\in M_f} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{T,v}$$

qui est indépendante du choix de S. En outre le réseau $X^*(T)_k^\vee$ fournit une mesure canonique $\boldsymbol{\omega}_{T/T^1}$ sur $X^*(T)_k^\vee \otimes \mathbf{R}$. Il existe alors une unique mesure $\boldsymbol{\omega}_{T^1}$ sur $T^1(\boldsymbol{A}_k)$ telle qu'on ait la formule

$$\int_{T(\boldsymbol{A}_k)/T^1(\boldsymbol{A}_k)} \boldsymbol{\omega}_{T/T^1}(x) \int_{xT^1(\boldsymbol{A}_k)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{T^1}(y) = \int_{T(\boldsymbol{A}_k)} f(y)\boldsymbol{\omega}_T(y).$$

Définition 3.1.5. — Le *nombre de Tamagawa* de T est alors défini par

$$\tau(T) = \boldsymbol{\omega}_{T^1}(T^1(\boldsymbol{A}_k)/T(k))$$

où on note également $\boldsymbol{\omega}_{T^1}$ la mesure induite sur $T^1(\boldsymbol{A}_k)/T(k)$.

Notations 3.1.6. — On définit

$$Ш^1(k, T) = \operatorname{Ker}(H^1(k, T) \to \prod_{v\in M_k} H^1(k_v, T))$$

et on pose $h(T) = \# H^1(k, X^*(T))$ et $i(T) = \# Ш^1(k, T)$.

Théorème 3.1.3 **(Ono, [Ono3, §5]).** — *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\tau(T) = h(T)/i(T).$$

3.2. Cônes et structures associées. — Dans ce paragraphe, on se donne en outre un cône dans $X^*(T)$, ce qui correspond à une variété torique affine pour T. Dans cette situation diverses notions qui nous seront utiles ont été introduites par Draxl dans [**Dr**].

Notations 3.2.1. — Soit T un tore sur le corps de nombres k déployé par une extension finie K et soit C un cône rationnel polyédrique strictement convexe de l'espace vectoriel $X^*(T) \otimes \mathbf{R}$; c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de $X^*(T)$ telle que $C = \sum_{i=1}^m \mathbf{R}_{\geqslant 0}\xi_i$ et $C \cap -C = \{0\}$. On suppose en outre que C est invariant sous l'action du groupe de galois $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et que C est d'intérieur non vide.

Par la théorie des variétés toriques (cf. [**Da**, chapter 1]) cela correspond à la variété torique affine $\mathbf{A}_{C,k}$ sur k définie par

$$\mathbf{A}_{C,k} = \mathrm{Spec}(\overline{k}[C \cap X^*(T)])^{\mathscr{G}}$$

où $\overline{k}[C\cap X^*(T)]$ est l'algèbre associée au monoïde $C\cap X^*(T)$. Cette variété a un modèle naturel, à savoir le schéma affine

$$\mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{k}}[C \cap X^*(T)])^{\mathscr{G}}$$

où $\mathcal{O}_{\overline{k}}$ désigne l'anneau des entiers algébriques.

D'autre part pour toute place $\mathfrak{p}$ de k, Draxl définit [**Dr**, page 447]

$$T(C, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) = T(C, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}) \cap T(k_{\mathfrak{p}})$$

où $\mathfrak{P}$ désigne une place de K au-dessus de $\mathfrak{p}$ et $T(C, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$ est défini par

$$T(C, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}) = \{\, r \in T(K_{\mathfrak{P}}) \mid \forall \xi \in C \cap X^*(T),\ \xi(r) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \}.$$

Lemme 3.2.1. — *Il existe un entier N tel que si A est une $\mathcal{O}_k$-algèbre dans laquelle N est inversible, alors les A-points de $\mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k}$ sont donnés par*

$$\mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/k)}(C \cap X^*(T), (A \otimes \mathcal{O}_K, .))$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/k)}$ *désigne l'ensemble des homomorphismes de monoïdes invariants sous le groupe* $\mathrm{Gal}(K/k)$. *En particulier, pour toute place v de k ne divisant pas N,*

$$T(C, \mathcal{O}_v) = \mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k}(\mathcal{O}_v) \cap T(k_v).$$

Démonstration. — Le schéma $\mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k}$ peut aussi se décrire comme

$$\mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[C \cap X^*(T)])^{\mathrm{Gal}(K/k)}.$$

Comme il existe une base de K sur k invariante sous l'action de Galois, il existe un entier N_0 tel que $\mathcal{O}_K[1/N_0]$ ait une base invariante sur $\mathcal{O}_k[1/N_0]$. D'autre part il résulte du lemme sans nom qu'il existe un isomorphisme naturel

$$K[C \cap X^*(T)]^{\mathrm{Gal}(K/k)} \otimes_k K \xrightarrow{\sim} K[C \cap X^*(T)]$$

il existe donc un entier N_1 tel que

$$\mathcal{O}_K[C \cap X^*(T)]^{\mathrm{Gal}(K/k)} \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_K[1/N_1] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K[1/N_1][C \cap X^*(T)].$$

Si N est un multiple de N_0 et N_1, et si N est inversible dans A, alors on a une suite d'isomorphismes naturels

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/k)}(C \cap X^*(T), (A \otimes \mathcal{O}_K, .)) \\
&\quad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K[1/N][C \cap X^*(T)], A \otimes \mathcal{O}_K)^{\mathrm{Gal}(K/k)} \\
&\quad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}((\mathcal{O}_K[C \cap X^*(T)])^{\mathrm{Gal}(K/k)} \otimes \mathcal{O}_K[1/N], A \otimes \mathcal{O}_K)^{\mathrm{Gal}(K/k)} \\
&\quad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_k}((\mathcal{O}_K[C \cap X^*(T)])^{\mathrm{Gal}(K/k)}, A) \\
&\quad = \mathbf{A}_{C,\mathcal{O}_k}(A),
\end{aligned}
$$

ce qui montre la première assertion. La seconde s'en déduit à partir des définitions. □

Définition 3.2.2. — Soient T et C comme ci-dessus. Pour toute place finie v de k, on définit un accouplement

$$\langle .,. \rangle_v : X^*(T)_v \otimes \mathbf{C} \times T(k_v) \to \mathbf{C}^\times$$

qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et tel que pour tout ξ de $X^*(T)_v$ et tout r de $T(k_v)$ on ait

$$\langle \xi \otimes 1, r \rangle_v = |\xi(r)|_v.$$

La *fonction L associée à C* est alors définie pour tout s de $(\overset{\circ}{C} + iX^*(T) \otimes \mathbf{R})^{\mathcal{G}_v}$ par la formule

$$L_v(s, T, C) = \frac{1}{\boldsymbol{\omega}_{T,v}(T(\mathcal{O}_v))} \int_{T(C,\mathcal{O}_v)} \langle s, r \rangle_v \, \boldsymbol{\omega}_{T,v}(r).$$

Il résulte de [**Dr**, proposition 2] que cette intégrale converge bien sur le domaine indiqué.

Cette fonction L peut également s'exprimer de la manière suivante :

Proposition 3.2.2 **(Draxl,** [**Dr**, proposition 4]**).** — *Si v est une place finie non ramifiée dans l'extension K/k alors*

$$L_v(s, T, C) = \sum_{y \in C^\vee \cap X_*(T)_v} (\#\mathbf{F}_v)^{-\langle y,s \rangle}.$$

Définition 3.2.3. — La fonction L globale associée est alors définie par le produit eulérien

$$L_S(s, T, C) = \prod_{v \in M_f - S} L_v(s, T, C)$$

pour tout ensemble fini de places S.

***Théorème 3.2.3* (Draxl, [Dr, proposition 5]). —** *On considère le domaine* $\mathcal{D}(C)$ *de l'espace vectoriel* $X^*(T)_k \otimes \mathbf{R}$ *défini comme l'ensemble des* y *tels que*

$$\forall x \in C^\vee - \{0\} \cap X_*(T), \quad \langle x, y \rangle > 1$$

où $C^\vee$ *est le cône dual de* C *dans* $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$. *Alors le produit eulérien définissant la fonction* $L_S(s, T, C)$ *converge sur* $\mathcal{D}(C) + iX^*(T)_k \otimes \mathbf{R}$.

3.3. Torseurs universels. — La notion de torseur universel a été introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans [**CTS1**] et [**CTS2**] en liaison avec le principe de Hasse et l'approximation faible. Nous allons en rappeler la définition et en donner quelques propriétés. Nous nous restreindrons ici au cas où le groupe de Picard géométrique est sans torsion.

***Définition 3.3.1.* —** Si G est un groupe algébrique linéaire sur un corps E, X et Y deux variétés sur E, $\pi : X \to Y$ un morphisme fidèlement plat et $\mu : G \times X \to X$ une action de G sur X, alors X est appelé un *G-torseur* ou *espace principal homogène sous* G au-dessus de Y si et seulement si l'application $(g, x) \mapsto (gx, x)$ définit un isomorphisme de variétés de $G \times_E X$ sur $X \times_Y X$.

Si $\eta : G \to H$ est un morphisme de groupes algébriques et X un G-torseur au-dessus de Y, on peut considérer le produit contracté $X \times^G H$ qui est un H-torseur au-dessus de Y et qu'on notera $\eta_*(X)$.

Par [**Mi**, III, 3.9], si G est lisse et abélien, les G-torseurs au-dessus de Y sont classifiés à isomorphisme près par le groupe de cohomologie $H^1_{\text{ét}}(Y, G)$.

***Proposition 3.3.1* (Colliot-Thélène, Sansuc [CTS2**, (2.0.2), §2.2]**)**

Si E *est un corps*, X *une* E*-variété algébrique propre, lisse et géométriquement intègre et* T *un tore sur* E, *alors on a une suite exacte naturelle*

$$0 \to H^1(E, T) \to H^1_{\text{ét}}(X, T) \xrightarrow{\rho} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Gal}(E^s/E)}(X^*(T), \operatorname{Pic} X_{E^s}) \xrightarrow{\delta} H^2(k, T)$$

où l'application ρ *est définie de la manière suivante : pour tout torseur* $\mathcal{T}$ *et tout caractère* ξ *de* T, $\rho(\mathcal{T})(\xi)$ *est la classe du* $\mathbf{G}_m$*-torseur* $\xi_*(\mathcal{T})$ *dans* $\operatorname{Pic} X_{E^s}$. *En outre* δ *est nulle si* X *a un point rationnel.*

***Définition 3.3.2* (Colliot-Thélène, Sansuc [CTS2**, (2.0.4)]**)**

Un *torseur universel* pour une variété X propre, lisse et géométriquement intègre sur un corps E de groupe de Picard de type fini et sans torsion sur E^s est un torseur $\mathscr{T}$ au-dessus de X sous le tore T_{NS} associé au $\mathscr{G}$-module $\mathrm{Pic}\, X_{E^s}$ et tel que $\rho(\mathscr{T}) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Pic}\, X_{E^s}}$.

Par la proposition de tels torseurs existent si la variété X a en outre un point rationnel. En outre, par [**CTS1**, proposition 2], si E est un corps de nombres les classes d'isomorphismes de torseurs universels ayant un point rationnel sont en nombre fini.

Nous allons maintenant en donner quelques exemples.

Exemple 3.3.1. — Soit X une intersection complète lisse de dimension $n \geqslant 3$ dans $\mathbf{P}^N_E$. Par [**SGA2**, exposé XII, corollaire 3.7], le groupe de Picard de X_{E^s} est de rang 1 engendré par $\mathcal{O}_X(1)$. Soit $\mathscr{T}$ le cône épointé de $\mathbf{A}^{N+1}_E$ au-dessus de X muni de l'action naturelle de $\mathbf{G}_m$. Le cône $\mathscr{T}$ est un $\mathbf{G}_m$-torseur au-dessus de X.

On identifie $X^*(\mathbf{G}_m)$ avec $\mathrm{Pic}\, X$ en envoyant $\mathrm{Id}_{\mathbf{G}_m}$ sur $\mathcal{O}_X(-1)$. Le morphisme $\rho(\mathscr{T})$ envoie alors $\mathcal{O}_X(-1)$ sur la classe de $\mathscr{T}$ donc $\rho(\mathscr{T}) = \mathrm{Id}$ et $\mathscr{T}$ représente l'unique classe d'isomorphisme de torseurs au-dessus de X.

Exemple 3.3.2. — De même si $X \subset \prod_{i=1}^m \mathbf{P}^{N_i}_E$ est intersection normale d'hypersurfaces définies par des équations multihomogènes en les variables

$$((X_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant N_i})$$

de sorte qu'on ait un isomorphisme

$$\mathrm{Pic} \prod_{i=1}^m \mathbf{P}^{N_i}_E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}\, X$$

alors l'unique torseur universel au-dessus de X est obtenu comme l'image inverse de X dans $\prod_{i=1}^m (\mathbf{A}^{N_i+1}_E - \{0\})$, l'action de $(\mathbf{G}_m)^m$ se faisant composante par composante.

Exemple 3.3.3. — Si X est une variété torique propre et lisse pour un tore T dont l'orbite ouverte a un point rationnel, autrement dit une compactification équivariante lisse du tore T, alors il résulte de [**Sal**, §8] qu'un torseur universel au-dessus de X est donné par un ouvert d'un espace affine dont la construction remonte à Delzant [**Del**]. Plus précisément, soit $D(X)$ le $\mathbf{Z}$-module libre ayant pour base les T_{E^s}-orbites dans X_{E^s} de codimension 1, ou encore, ce qui revient au même, les cônes de dimension 1 dans l'éventail de $X_*(T)$ correspondant à X (cf. [**Da**, §6.5] ou [**Oda1**]). On a alors une suite exacte

$$0 \to X^*(T) \to D(X) \to \mathrm{Pic}\, X_{E^s} \to 0.$$

En passant aux tores correspondants on a une injection $T_{\mathrm{NS}} \to T(D(X))$. Soit C le cône de $D(X) \otimes \mathbf{R}$ engendré par la base ci-dessus. Alors le tore T_{NS} agit sur l'espace affine $\mathbf{A}_{C,k} = \mathrm{Spec}(E^s(C \cap D(X))^{\mathrm{Gal}(E^s/E)})$. Soit $\mathscr{T}$ l'ouvert de $\mathbf{A}_{C,k}$ correspondant aux points dont l'orbite est de dimension maximale. Alors, par [**Del**] ou [**Oda2**], le quotient de $\mathscr{T}$ par T_{NS} est isomorphe à X, cet isomorphisme dépendant du choix d'un point rationnel dans l'orbite ouverte de X. Les différents torseurs universels au-dessus de X sont obtenus en faisant varier ce point rationnel dans l'orbite ouverte.

***Exemple 3.3.4* (Skorobogatov, [Sk1] et [Sk2]).** — On considére maintenant la surface X obtenue en éclatant les quatre points $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (0:0:1)$ et $P_4 = (1:1:1)$ dans $\mathbf{P}^2_E$. Alors $\mathrm{Pic}\, X$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^5$. On considére alors $\mathrm{Gr}(2,5)$, la Grassmanienne des sous-espaces de dimension 2 dans E^5. On a un plongement de $\mathrm{Gr}(2,5)$ dans $\mathbf{P}(\Lambda^2(E^5))$ par les coordonnées de Plücker. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 5}$ la base canonique de E^5 et pour tout $J \subset \{1, \ldots, 5\}$, soit M_J le sous espace $\bigoplus_{j \in J} E e_j$. Soit $W(2,5)$ l'ouvert de $\mathrm{Gr}(2,5)$ correspondant aux sous-espaces M tels que

$$\dim(M \cap M_J) \leqslant (2/5) \# J$$

et soit $\mathscr{T}$ le cône de $\Lambda^2(E^5)$ au-dessus de $W(2,5)$. Or les diviseurs exceptionnels de X sont les éclatés des quatres points P_i que l'on note $F_{i,5}$ et les relevés stricts des droites $(P_i P_j)$ notés $F_{l,m}$ si $\{i,j,l,m\} = \{1,2,3,4\}$. On identifie les $F_{i,j}$ pour $i<j$ avec la base naturelle de $\Lambda^2(E^5)$. L'épimorphisme du $\mathbf{Z}$ module libre de base $F_{i,j}$ sur $\mathrm{Pic}\, X$ induit un morphisme $T_{\mathrm{NS}} \to \mathbf{G}_m^{10}$ et une action de T_{NS} sur $\mathscr{T}$. Le quotient $\mathscr{T}/T_{\mathrm{NS}}$ est naturellement isomorphe à X donnant ici l'unique torseur universel au-dessus de X à isomorphisme près.

Du point de vue arithmétique un des intérêts des torseurs universels provient de l'annulation des obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible pour ces variétés, lorsque X est une variété algébrique propre, lisse et géométriquement intègre et rationnelle (cf. [**CTS2**, théorème 2.1.2]). Cela amène à envisager les hypothèses arithmétiques suivantes sur la variété V :

Hypothèses 3. — Désormais, on suppose en outre que

(i) les torseurs universels au-dessus de V vérifient le principe de Hasse, c'est-à-dire pour tout torseur universel $\mathscr{T}$ on a l'implication

$$(\forall v \in M_k,\ \mathscr{T}(k_v) \neq \varnothing) \Rightarrow \mathscr{T}(k) \neq \varnothing,$$

(ii) les torseurs universels au-dessus de V vérifient l'approximation faible, c'est-à-dire, pour tout ensemble fini S de places de k, $\mathscr{T}(k)$ est dense dans le produit $\prod_{v \in S} \mathscr{T}(k_v)$.

4. Montée aux torseurs universels

4.1. Les hauteurs

Notations 4.1.1. — Dans ce paragraphe, on fixe un torseur universel $\mathscr{T}$ au-dessus d'une variété vérifiant les hypothèses 1 à 3. On suppose en outre que $\mathscr{T}$ a un point rationnel y_0.

Si K/k est une extension finie et $\mathbf{H}_K$ un système de hauteurs pour V_K, alors pour tout fibré en droites L sur V, on a une métrique adélique définie par

$$\forall \mathfrak{p} \in M_k,\ \forall x \in V(k_\mathfrak{p}),\ \forall y \in L(x),\ ||y||_\mathfrak{p} = \left(\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} ||y||_\mathfrak{P} \right)^{\frac{1}{[K:k]}} \tag{4.1.1}$$

si $[(L, (||.||_\mathfrak{P})_{\mathfrak{P} \in M_K})] = \mathbf{H}_K([L])$ et on obtient ainsi un système de hauteurs $\mathbf{H}$ sur V appelé *système induit.*

Dans la suite, on note K une extension galoisienne finie de k de sorte que $\operatorname{Pic} V_K$ soit isomorphe à $\operatorname{Pic} \overline{V}$ et on choisit un système de hauteurs $\mathbf{H}_K$ sur V_K. On désignera par $\mathbf{H}$ le système induit sur V. Le système $\mathbf{H}_K$ permet également d'obtenir des métriques $||.||_\mathfrak{p}$ pour les fibrés en droites sur $V_\mathfrak{p}$ bien définies à une constante multiplicative près.

Soit $\mathfrak{P}$ une place de K et L un fibré en droites sur $V_{K_\mathfrak{P}}$. Le morphisme $\mathbf{Z} \to \operatorname{Pic} \overline{V}$ envoyant 1 sur $[L]$ induit un morphisme $\phi_L : T_{\mathrm{NS}} \to \mathbf{G}_m$; le $\mathbf{G}_m$-torseur $\phi_{L*}(\mathscr{T})$ est isomorphe au $\mathbf{G}_m$-torseur $L^\times$ obtenu en ôtant à L la section nulle. On obtient ainsi un morphisme $\psi_L : \mathscr{T} \to L^\times$ compatible avec ϕ_L. On fixe une place $\mathfrak{p}_0$ de k. La fonction $||.||_\mathfrak{P}^L$ qui envoie un élément y de $\mathscr{T}(K_\mathfrak{P})$ sur $||\psi_L(y)||_\mathfrak{P} / ||\psi_L(y_0)||_\mathfrak{P}$ si $\mathfrak{P}$ ne divise pas $\mathfrak{p}_0$ et sur la même expression multipliée par $\mathbf{H}_K(L, \pi(y_0))^{-[K_\mathfrak{P}:k_{\mathfrak{p}_0}]/[K:k]}$ sinon est alors indépendante du choix de l'isomorphisme de $\phi_*(\mathscr{T})$ sur $L^\times$ et du choix du représentant $(L, (\|.\|_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}\in M_K})$ de $\mathbf{H}_K([L])$, mais dépend du choix de y_0 et de $\mathfrak{p}_0$ [2].

On note $\tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathscr{T},\mathfrak{P}}$ l'application $(\operatorname{Pic} V_K \otimes \mathbf{C}) \times \mathscr{T}(K_{\mathfrak{P}}) \to \mathbf{C}^\times$ qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et telle que

$$\tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathscr{T},\mathfrak{P}}(L, y) = (\|y\|^L_{\mathfrak{P}})^{-1}.$$

on définit de manière similaire $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},\mathfrak{p}} : \operatorname{Pic} V_{\mathfrak{p}} \otimes \mathbf{C} \times \mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}}) \to \mathbf{C}^\times$.

Remarque 4.1.1. — Soit $\pi : \mathscr{T} \to V$ l'application quotient. Pour tout point y de $\mathscr{T}(k)$ et tout L de $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$, on a la relation

$$\mathbf{H}(L, \pi(y)) = \prod_{v\in M_k} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(L, y). \tag{4.1.2}$$

4.2. Un espace de type adélique. — Le but de ce paragraphe est d'utiliser le cône des diviseurs effectifs dans le groupe $\operatorname{Pic} V$ pour construire sur le torseur universel une structure adélique qui, fibre à fibre, est donnée par la construction de Draxl (cf §3.2). Nous en donnerons tout d'abord une construction pratique pour la descente avant d'en donner une interprétation plus intrinsèque. Pour cela, on fera l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4. — Le cône $C_{\text{eff}}(V)$ est un cône polyédrique rationnel de l'espace vectoriel $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$.

Remarque 4.2.1. — Par la théorie de Mori, cela est vérifié pour les surfaces de Del Pezzo. En outre, aucun contre-exemple ne semble être connu pour une variété vérifiant les hypothèses 1.

Notations 4.2.1. — Pour tout torseur universel $\mathscr{T}$ au-dessus de V ayant un point rationnel y_0 et pour tout système de hauteurs $\mathbf{H}_K$ sur V_K, on note pour

---

2. En dehors d'un ensemble fini S de places de k pour tout σ de $\operatorname{Gal}(K/k)$, pour tout fibré en droites L sur V_K, toute place $\mathfrak{P}$ de K ne divisant pas une place de S, et tout y de $L(K_{\mathfrak{P}})$, on a

$$\|y\|^L_{\mathfrak{P}} = \|\sigma(y)\|^{\sigma(L)}_{\sigma(\mathfrak{P})}$$

En effet si on fixe une famille $L_1, \ldots, L_t$ de fibrés en droites sur V_K de sorte que leur classes $[L_i]$ forment une base de $\operatorname{Pic}(V_K)$, pour tout σ de $\operatorname{Gal}(K/k)$, on peut écrire $[\sigma(L_i)] = \sum_{j=1}^t m^\sigma_{i,j}[L_j]$. Notons $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_t$ des modèles de $L_1, \ldots, L_t$. En dehors d'un nombre fini de places, la metrique sur $\sigma(L_i)$ est définie par $\prod_{j=1}^t \mathscr{L}_j^{\otimes m^\sigma_{i,j}}$.

toute place $\mathfrak{P}$ de K

$$\mathscr{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}}) = \{y \in \mathscr{T}(K_{\mathfrak{P}}) \mid \forall L \in C_{\text{eff}}(V_{K_{\mathfrak{P}}}),\ \tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathscr{T},\mathfrak{P}}(L,y) \leqslant 1\}$$

et pour toute place $\mathfrak{p}$ de k,

$$\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) = \mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}}) \cap \bigcap_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathscr{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}}).$$

Définition 4.2.2. — *L'espace adélique associé à $\mathscr{T}$ et $C_{\text{eff}}(\overline{V})$* est alors défini comme le produit restreint des $\mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}})$ relativement aux $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$. On le notera temporairement $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{A}_k)$.

Nous allons maintenant justifier cette terminologie en montrant qu'il s'agit de l'intersection d'un espace adélique avec $\prod_{v \in M_k} \mathscr{T}(k_v)$. L'idée de la construction est donnée par le paragraphe 3.2.

Proposition 4.2.2. — *Soit $\widehat{\mathscr{T}}$ le produit contracté $\mathscr{T} \times^{T_{\text{NS}}} \mathbf{A}_{-C_{\text{eff}}(\overline{V}),k}$ et $\widetilde{\mathscr{T}}$ un $\mathcal{O}_k$-modèle de $\widehat{\mathscr{T}}$. Alors il existe un ensemble fini de places S_2 contenant les places archimédiennes tel que pour tout $\mathfrak{p}$ de $M_k - S_2$, $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ coïncide avec $\mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}}) \cap \widetilde{\mathscr{T}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$.*

Démonstration. — Par définition de $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$, il suffit de démontrer le résultat sur K. On peut donc supposer que $\operatorname{Pic} V = \operatorname{Pic} \overline{V}$.

Soit L un fibré en droites sur V tel que $\Gamma(V,L) \neq \{0\}$. L'application de $\mathbf{Z}$ dans $\operatorname{Pic} V$ qui envoie 1 sur $-[L]$ induit un morphisme du monoïde $\mathbf{N}$ dans le monoïde $-C_{\text{eff}}(\overline{V}) \cap \operatorname{Pic} \overline{V}$ et donc un morphisme d'algèbres

$$\bar{k}[\mathbf{N}] \to \bar{k}[-C_{\text{eff}}(\overline{V}) \cap \operatorname{Pic} \overline{V}].$$

D'où un morphisme $\hat{\phi}_L : \mathbf{A}_{-C_{\text{eff}}(\overline{V}),k} \to \mathbf{A}^1_k$ compatible avec le morphisme de tores $T_{\text{NS}} \to \mathbf{G}_m$. En prenant le produit contracté par $\mathscr{T}$ relativement à T_{NS}, on obtient un morphisme $\hat{\psi}_{L^\vee} : \widehat{\mathscr{T}} \to L^\vee$ qui étend le morphisme $\psi_{L^\vee}$ défini au paragraphe précédent.

Soient $L_1, \ldots, L_m$ des fibrés en droites tels que les classes d'isomorphismes $[L_i]$ forment un système de générateurs du monoïde $C_{\text{eff}}(V) \cap \operatorname{Pic} V$. Alors on a

$$\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) = \{y \in \mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}}) \mid \forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant m \Rightarrow \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},\mathfrak{p}}(L_i,y) \leqslant 1\}.$$

Soit S_2 un ensemble fini de places tel que pour toute place $\mathfrak{p}$ de $M_k - S_2$, les métriques sur les fibrés $L_i^\vee$ soient définies par un modèle $\mathscr{L}_i^\vee$ défini sur $\mathcal{O}_{S_2}$ et tel que pour tout i le morphisme $\hat{\psi}_{L_i^\vee}$ s'étende en un morphisme

$$\tilde{\psi}_{L_i^\vee} : \widetilde{\mathscr{T}} \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S_2} \to \mathscr{L}_i^\vee.$$

Si $\mathfrak{p} \in M_k - S_2$ et $y \in \mathscr{T}(k_\mathfrak{p}) \cap \widetilde{\mathscr{T}}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$, alors pour tout i compris entre 1 et m, $\tilde{\psi}_{L_i^\vee}(y)$ appartient à $\mathscr{L}_i^\vee(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ et par conséquent $\|\psi_{L_i^\vee}(y)\|_\mathfrak{p} \leqslant 1$. Quitte à augmenter S_2, on peut également supposer que $\|\psi_{L_i^\vee}(y_0)\|_\mathfrak{p} = 1$ et que $\mathfrak{p}_0$ appartient à S_2. Il résulte alors des définitions que $x \in \mathscr{T}_\mathbf{H}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$. On a donc montré l'inclusion

$$\mathscr{T}(k_\mathfrak{p}) \cap \widetilde{\mathscr{T}}(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) \subset \mathscr{T}_\mathbf{H}(\mathcal{O}_\mathfrak{p}).$$

D'autre part le morphisme $\bigoplus_{i=1}^m \hat{\psi}_{L_i^\vee} : \widehat{\mathscr{T}} \to \bigoplus_{i=1}^m L_i^\vee$ est une immersion fermée. En effet il suffit de le démontrer pour l'application

$$\bigoplus_{i=1}^m \hat{\phi}_{L_i^\vee} : \mathbf{A}_{-C_{\text{eff}}(\overline{V}),k} \to \bigoplus_{i=1}^m \mathbf{A}_k^1.$$

Mais ceci résulte du fait que le choix des L_i donne une surjection

$$\mathop{\times}_{i=1}^m \mathbf{N} \to -C_{\text{eff}}(V) \cap \operatorname{Pic} V.$$

Quitte à augmenter S_2, on peut supposer que $\widetilde{\mathscr{T}} \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S_2}$ est l'adhérence de $\widehat{\mathscr{T}}$ dans $(\bigoplus_{i=1}^m \mathscr{L}_i^\vee) \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S_2}$. Soit $\mathfrak{p} \in M_k - S_2$ et $y \in \mathscr{T}_\mathbf{H}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$. Alors pour tout i entre 1 et m, $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},\mathfrak{p}}(L_i, y) \leqslant 1$ entraîne que $\|\psi_{L_i^\vee}(y)\|_v \leqslant 1$ et donc $\hat{\psi}_{L_i^\vee}(y) \in \mathscr{L}_i^\vee(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$. Donc

$$\bigoplus_{i=1}^m \hat{\psi}_{L_i^\vee}(y) \in (\bigoplus_{i=1}^m \mathscr{L}_i^\vee)(\mathcal{O}_\mathfrak{p}).$$

Par conséquent $y \in \widetilde{\mathscr{T}}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$. □

Corollaire 4.2.3. — *L'espace adélique $\mathscr{T}_{\mathbf{H}_K}(\boldsymbol{A}_k)$ est indépendant du choix du système de hauteurs et du choix de y_0.*

Notation 4.2.3. — Dans la suite, on notera $\mathscr{T}_{C_{\text{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ cet espace adélique.

Remarque 4.2.4. — Il faut noter qu'en général $C_{\text{eff}}(\overline{V})$ ne définit pas un éventail régulier. Le nombre de raies extrêmales peut, par exemple, être supérieur au rang de $\operatorname{Pic}\overline{V}$. La variété $\mathbf{A}_{-C_{\text{eff}}(\overline{V}),k}$ est alors singulière et il en est a fortiori de même de la variété $\widehat{\mathscr{T}}$.

Exemple 4.2.1. — Soit X une intersection complète lisse de dimension $n \geqslant 3$ dans $\mathbf{P}_k^N$ et $\mathscr{T}$ le cône épointé de $\mathbf{A}_k^{N+1}$ au-dessus de X. Par l'exemple 3.3.1, $\mathscr{T}$ est, à isomorphisme près, l'unique torseur universel au-dessus de X. On peut en outre choisir comme système de hauteurs celui induit par le système générateur $(X_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$. Autrement dit, pour toute place v de k, tout x de $X(k_v)$ et toute section s de $\mathcal{O}_X(1)$ correspondant à une forme linéaire l sur k^{N+1},

$$\|\mathrm{s}(x)\|_v = \inf_{X_i(x)\neq 0} \left|\frac{l}{X_i}(x)\right|_v.$$

On suppose qu'il existe $\boldsymbol{y}_0 \in \mathscr{T}(k)$. Le morphisme $\psi_{\mathcal{O}(1)}$ envoie le point $\boldsymbol{y}$ de coordonnées $(y_0, \ldots, y_N)$ de $\mathscr{T}(k)$ sur $1/y_i X_i(y_0 : \ldots : y_N)$ pour un i tel que $y_i \neq 0$. On a donc

$$\left\|\psi_{\mathcal{O}(1)}(\boldsymbol{y})\right\|_v = \inf_{y_i\neq 0}\left|\frac{1}{y_i}\right|_v = \frac{1}{\sup_{0\leqslant i\leqslant N}|y_i|_v}.$$

Donc $\check{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(\mathcal{O}(1), \boldsymbol{y}) = \sup_{0\leqslant i\leqslant N}|y_i|_v / \sup_{0\leqslant i\leqslant N}\left|y_{0,i}\right|_v$ si $v \neq \mathfrak{p}_0$. Par conséquent pour presque toute place v de k

$$\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v) = \mathbf{A}_{\mathcal{O}_k}^{N+1}(\mathcal{O}_v) \cap \mathscr{T}(k_v)$$

et l'espace adélique considéré est égal à $\mathbf{A}_k^{N+1}(\boldsymbol{A}_k) \cap \prod_{v\in M_k} \mathscr{T}(k_v)$. C'est donc celui utilisé pour la méthode du cercle.

Exemple 4.2.2. — Plus généralement, si $X \subset \prod_{i=1}^m \mathbf{P}_k^{N_i+1}$ est donnée comme intersection normale d'hypersurfaces définies par des équations multihomogènes et si

$$\mathbf{Z}^m = \operatorname{Pic}(\prod_{i=1}^m \mathbf{P}_k^{N_i+1})$$

est isomorphe à $\operatorname{Pic}\overline{X}$, l'unique torseur universel $\mathscr{T}$ au-dessus de X est l'image inverse de X dans $\prod_{i=1}^m(\mathbf{A}_k^{N_i+1} - \{0\})$. Le cône effectif est donné par $\mathbf{R}_{\geqslant 0}^m \subset \mathbf{R}^m$ et comme dans le cas précédent, on vérifie que

$$\mathscr{T}_{C_{\text{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k) = \mathbf{A}^{\sum_{i=1}^m (N_i+1)}(\boldsymbol{A}_k) \cap \prod_{v\in M_k} \mathscr{T}(k_v).$$

Remarque 4.2.5. — Une des raisons de l'apparition du cône $-C_{\text{eff}}$ plutôt que C_{eff} dans les construction précédentes est donnée par les exemples 4.2.1 et 4.2.2 : dans ces cas les structures adéliques usuelles sur les cônes sont induites par celle de $\mathbf{A}^{N+1}$ vu au-dessus de $\mathbf{P}^N$ et correspondent donc à $\mathcal{O}(-1)$ et non à $\mathcal{O}(1)$.

Exemple 4.2.3. — Considérons le cas où V est une compactification lisse d'un tore T sur k. Soit $D(V)$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base les $\overline{T}$-orbites $(T_j)_{j\in J}$ de codimension 1 dans $\overline{V}$, soit C le cône naturel dans ce module et $\mathbf{A}_{C,k}$ l'espace affine correspondant. La suite exacte

$$0 \to X^*(T) \xrightarrow{j} D(V) \to \operatorname{Pic} \overline{V} \to 0$$

induit une action de T_{NS} sur $\mathbf{A}_{C,k}$. Dans ce cas, par l'exemple 3.3.3, les torseurs universels au-dessus de V sont isomorphes en tant que variété à un ouvert $\mathscr{T}$ de $\mathbf{A}_{C,k}$ et les morphismes $\pi : \mathscr{T} \to V$ sont paramétrés par le choix d'un point x_0 de l'orbite ouverte de V et donnés comme les uniques extensions du morphisme équivariant de $T(D(V))$ dans V envoyant l'élément neutre sur x_0.

On prend pour y_0 l'image de l'élément neutre de $T(D(V))$ dans $\mathscr{T}$. En outre, on choisit l'extension K/k de sorte que K trivialise le $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$-ensemble J. Soit F_j l'adhérence de T_j pour $j \in J$. On se donne un ensemble fini $S \subset M_f$ et un modèle $\mathscr{V}$ de V sur $\mathcal{O}_S$. On peut supposer que S contient les places ramifiées dans l'extension K/k et que, S_K désignant les places de K au-dessus de celles de S, il existe des modèles $\mathscr{L}_j$ des fibrés associés à F_j pour j décrivant J, de sorte que les métriques sur ces fibrés soient définies en dehors de S_K par les $\mathscr{L}_j$. Enfin on suppose que l'on a $\|\psi_{[F_j]}(y_0)\|_v = 1$ en dehors de S et que l'adhérence $\mathscr{F}_j$ de F_j dans $\mathscr{V}_{\mathcal{O}_{S_K}}$ est définie comme le lieu des zéros d'une section s_j de $\mathscr{L}_j$.

La description de l'espace $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ nous amène à considérer des multiplicités d'intersection. Soit $\mathfrak{P}$ une place finie de K en dehors de S_K et $i \in J$. Pour tout $x \in V(K_{\mathfrak{P}})$ n'appartenant pas à F_i, on note $m_i(x)$ la multiplicité d'intersection de l'adhérence $\tilde{x}$ de x dans $\mathscr{V}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}$ avec $(\mathscr{F}_i)_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}$. Cette intersection étant de dimension 0 par hypothèse, on peut utiliser la formule de Serre (cf. [**Se**, page V-32])

$$m_i(x) = \sum_{y \in (\mathscr{V}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}})_{(0)}} \sum_{j \geqslant 0} (-1)^j l \operatorname{Tor}_j^{\mathcal{O}_{\mathscr{V},y}}(\mathcal{O}_{\mathscr{V},y}/\mathscr{I}_{y,\tilde{x}}, \mathcal{O}_{\mathscr{V},y}/\mathscr{I}_{y,\mathscr{F}})$$

où $\mathcal{O}_{\mathscr{V},y}$ désigne $\mathcal{O}_{\mathscr{V}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}},y}$ et pour tout sous-schéma fermé Y de $\mathscr{V}$, $\mathscr{I}_{y,Y}$ désigne l'idéal associé à Y dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathscr{V},y}$ et l la longueur d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$-module.

Dans ce cas particulier, la formule se réduit à

$$m_i(x) = l_{\mathbf{F}_{\mathfrak{P}}}(\mathscr{L}_i(\tilde{x})/(\mathrm{s}_i(x))).$$

De manière plus intuitive, on peut également décrire $m_i(x)$ comme le plus grand entier j tel que, modulo $\mathfrak{P}^j$, $\tilde{x}$ appartienne à $\mathscr{F}_i$.

Soit $\mathfrak{p} \in M_f - S$. On a $k_\mathfrak{p} \otimes K = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} K_\mathfrak{P}$. Comme $\mathfrak{p}$ n'est pas ramifiée dans K/k, on peut choisir des uniformisantes $\pi_\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$ pour $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ de sorte que $(\pi_\mathfrak{P})_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}$ soit invariant sous l'action du groupe de Galois. On considère alors pour tout $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ l'application

$$\eta_{K_\mathfrak{P}} : T(D(V))(K_\mathfrak{P}) \to T(D(V))(K_\mathfrak{P})$$

qui à $\boldsymbol{y} = (y_j)_{j\in J}$ associe $(y_j/\pi_\mathfrak{P}^{v_\mathfrak{P}(y_j) - m_j(\pi(\boldsymbol{y}))})_{j\in J}$. On obtient alors que pour tout j de J, l'entier $v_\mathfrak{P}(\eta_{K_\mathfrak{P}}(\boldsymbol{y})_j)$ vaut $m_j(\pi(\boldsymbol{y}))$. Le produit $\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \eta_{K_\mathfrak{P}}$ définit par passage aux invariants une application

$$\eta_\mathfrak{p} : T(D(V))(k_\mathfrak{p}) \to T(D(V))(k_\mathfrak{p}).$$

Proposition 4.2.6. — *Avec les notations qui précèdent, pour tout élément $\boldsymbol{y}$ de l'ensemble $T(D(V))(k_\mathfrak{p})$, l'intersection de $\mathscr{T}_\mathbf{H}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ avec la fibre de π en $\pi(\boldsymbol{y})$ est donnée par*

$$T(C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathcal{O}_\mathfrak{p}).\eta_\mathfrak{p}(\boldsymbol{y}).$$

Démonstration. — Toutes les définitions étant obtenues par descente galoisienne à partir de K, il suffit de montrer le résultat dans le cas où le $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-ensemble J est trivial.

Notons tout d'abord que la formule $m_j(x) = l_{\mathbf{F}_\mathfrak{p}}(\mathscr{L}_j(\tilde{x})/(\mathrm{s}_j(x)))$ se réécrit également

$$\left\|\mathrm{s}_j(x)\right\|_\mathfrak{p} = (\#\mathbf{F}_\mathfrak{p})^{-m_j(x)}. \tag{4.2.1}$$

Vérifions que, pour tout $\boldsymbol{y}$ de $T(D(V))(k_\mathfrak{p})$, on a $\pi(\eta_\mathfrak{p}(\boldsymbol{y})) = \pi(\boldsymbol{y})$. Pour cela, on étend l'application $F_j \mapsto y_j$ en un morphisme $u_{\boldsymbol{y}} : D(V) \to {k_\mathfrak{p}}^\times$. Alors $\pi(\boldsymbol{y})$ est caractérisé par les relations $\xi(\pi(\boldsymbol{y})) = u_{\boldsymbol{y}}(\xi)$ où ξ décrit $X^*(T)$. Il nous faut donc calculer $u_{\eta_\mathfrak{p}(\boldsymbol{y})}(\xi)$. Mais la fonction $F_j \mapsto \left\|\mathrm{s}_j(\boldsymbol{y})\right\|_\mathfrak{p}$ s'étend également en un morphisme $w_{\boldsymbol{y}} : D(V) \to \mathbf{R}_{>0}$ qui vérifie

$$\forall \xi \in X^*(T), \quad w_{\boldsymbol{y}}(\xi) = |\xi(\pi(\boldsymbol{y}))|_\mathfrak{p}$$

et, par conséquent, les morphismes $D(V) \to \mathbf{Z}$ qui étendent les applications $F_j \mapsto m_j(\pi(\boldsymbol{y}))$ et $F_j \mapsto v_{\mathfrak{p}}(y_j)$ coïncident sur $X^*(T)$ et, par définition de $\eta_{\mathfrak{p}}$, on obtient que $u_{\eta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{y})}(\xi) = u_{\boldsymbol{y}}(\xi)$ pour tout caractère ξ de T.

Pour montrer la proposition, il reste à montrer que pour tout j, on a

$$\left\|\psi_{[F_j]}(\eta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{y}))\right\|_{\mathfrak{p}} = 1.$$

Mais il découle des définitions que l'on peut choisir $\psi_{[F_j]}$ de sorte que $\boldsymbol{y}$ soit envoyé sur $y_j^{-1} s_j(\pi(y))$ et il résulte de (4.2.1) que

$$\left\|\psi_{[F_j]}(\eta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{y}))\right\|_{\mathfrak{p}} = \left\|y_j^{-1} \pi_{\mathfrak{p}}^{v_{\mathfrak{p}}(y_j) - m_j(\pi(\boldsymbol{y}))} s_j(\pi(\boldsymbol{y}))\right\|_{\mathfrak{p}} = 1. \quad \square$$

***Cas particulier* . —** Si V est la variété torique obtenue en éclatant 3 points rationnels P_1, P_2 et P_3 en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$, alors les diviseurs F_j sont les images inverses E_1, E_2 et E_3 des points ainsi que les relevés stricts $E_{1,2}$, $E_{2,3}$ et $E_{3,1}$ des droites (P_1P_2), (P_2P_3) et (P_3P_1). On note $(y_1, y_2, y_3, y_{1,2}, y_{2,3}, y_{3,1})$ les coordonnées naturelles sur $D(V)^\vee \otimes k$ et $(x_1 : x_2 : x_3)$ des coordonnées sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ de sorte que $P_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_2 = (0 : 1 : 0)$ et $P_3 = (0 : 0 : 1)$. Soit U le complémentaire des diviseurs F_j que l'on peut identifier avec son image dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Au-dessus de U le morphisme $\pi : \mathscr{T} \to V$ est donné par

$$x_1 = y_{2,3} y_2 y_3, \quad x_2 = y_{1,3} y_1 y_3 \quad \text{et} \quad x_3 = y_{1,2} y_1 y_2.$$

Considérons la section ensembliste $s : U(\mathbf{Q}) \to \pi^{-1}(U)(\mathbf{Q})$ qui apparaît notamment dans [**BM**, §5] et [**Pe**, §7.1.2] et définie par, si $(x_1, x_2, x_3) = 1$,

$$s(x_1 : x_2 : x_3) = (y_1, y_2, y_3, y_{1,2}, y_{2,3}, y_{3,1}),$$

où $y_i = (x_j, x_l)$ et $y_{i,j} = x_l y_i^{-1} y_j^{-1}$ pour $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$. Il est aisé de vérifier que pour tout nombre premier p, et pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1 : x_2 : x_3)$, les valuations en p des coordonnées de son image par s coïncident avec les multiplicités d'intersection de $\boldsymbol{x}$ avec les diviseurs correspondants dans V_p. On en déduit comme dans le cas général que l'intersection de $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathbf{Z}_p)$ avec la fibre en $\boldsymbol{x}$ est le produit

$$T_{\mathrm{NS}}(C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathbf{Z}_p).s(\boldsymbol{x}).$$

Mais $\operatorname{Pic} V \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}[\Lambda] \oplus \mathbf{Z}[E_1] \oplus \mathbf{Z}[E_3]$ où Λ est le relevé d'une droite ne contenant aucun des points éclatés et pour la décomposition correspondante

$$T_{\mathrm{NS}}(C_{\mathrm{eff}}(V), \mathbf{Z}_p) = \left\{ (r, r_1, r_2, r_3) \in \mathbf{G}_m^4 \;\middle|\; \begin{cases} r_i \in \mathbf{Z}_p & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ r r_i^{-1} r_j^{-1} \in \mathbf{Z}_p & \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant 3 \end{cases} \right\}.$$

Or, pour tout nombre premier p,

$$s(\pi(p, p, 1, 1, 1, 1)) = s(p : p : p^2) = s(1 : 1 : p) = (1, 1, 1, p, 1, 1)$$

et donc $(p, p, 1, 1, 1, 1) \notin \mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathbf{Z}_p)$. L'espace adélique $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ est donc différent de l'intersection de $\prod_v \mathscr{T}(\mathbf{Q}_v)$ avec l'espace adélique associé à l'espace affine.

Exemple 4.2.4. — On reprend les notations de l'exemple 3.3.4. On considére donc la surface de Del Pezzo V obtenue en éclatant les quatre points de coordonnées $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ et $(1 : 1 : 1)$ dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ et l'unique torseur universel au-dessus de V est décrit comme un ouvert du cône de $\Lambda^2 k^5$ au-dessus de l'image de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2, 5)$ (cf. [**Sk1**], [**Sk2**] et l'exemple 3.3.4). Ce cône est donné par les équation de Plücker :

$$\begin{cases} y_{1,2}y_{3,4} - y_{1,3}y_{2,4} + y_{1,4}y_{2,3} = 0, \\ y_{1,2}y_{3,5} - y_{1,3}y_{2,5} + y_{1,5}y_{2,3} = 0, \\ y_{1,2}y_{4,5} - y_{1,4}y_{2,5} + y_{1,5}y_{2,4} = 0, \\ y_{1,3}y_{4,5} - y_{1,4}y_{3,5} + y_{1,5}y_{3,4} = 0, \\ y_{2,3}y_{4,5} - y_{2,4}y_{3,5} + y_{2,5}y_{3,4} = 0. \end{cases}$$

Soit W l'image inverse dans $\mathscr{T}$ du complémentaire des diviseurs exceptionnels. Alors, comme dans le cas des variétés toriques, on peut définir des applications

$$\eta_p : W(k_{\mathfrak{p}}) \to W(k_{\mathfrak{p}})$$

avec $\pi \circ \eta_p = \pi$ et telles que, si $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, la composante en i, j de $\eta_p(y)$ ait pour valuation la multiplicité d'intersection de $\pi(y)$ avec le diviseur exceptionnel $F_{i,j}$. On montre alors aisément que l'intersection de la fibre en $\pi(y)$ avec $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathbf{Z}_p)$ est donnée par le produit

$$T_{\mathrm{NS}}(C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathbf{Z}_p).\eta_p(y).$$

Remarque 4.2.7. — Pour presque toute place $\mathfrak{P}$ de K, on peut également décrire l'ensemble $\mathscr{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}})$ comme le produit

$$T_{\mathrm{NS}}(C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}).\mathscr{T}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$$

où $\mathscr{T}$ est un modèle de $\mathscr{T}$. Cette description est sous-jacente dans les exemples 4.2.3 et 4.2.4, puisque les applications $\eta_{\mathfrak{p}}$ ont en fait leur image dans $\mathscr{T}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ pour des modèles bien choisis de $\mathscr{T}$.

4.3. Un domaine fondamental sous $T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)$. — Comme dans le cas de l'espace projectif étudié par Schanuel dans [**Sc**], ou plus généralement celui des intersections complètes lisses (cf. [**Pe**, §5.1]), le passage aux torseurs universels nécessite la construction d'un domaine fondamental sous l'action des unités. L'objet de ce paragraphe est de définir ce domaine à l'aide des fonctions $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}$ introduites dans le paragraphe 4.1.

***Notations 4.3.1.* —** Dans la suite S désigne un ensemble fini de places contenant l'ensemble S_0 défini au paragraphe 2.3 ainsi que l'ensemble S_2 défini dans la démonstration de la proposition 4.2.2, les places archimédiennes, les places ramifiées dans l'extension K/k, et tel que les conditions (iv) et (v) de la proposition 3.1.2 soient vérifiées pour le tore T_{NS} associé au groupe de Picard.

On a donc, d'une part, une surjection

$$\log'_S : T_{\mathrm{NS}}(k) \to \bigoplus_{v \notin S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v$$

et, d'autre part, une suite exacte

$$0 \to W(T_{\mathrm{NS}}) \to T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\log_S} \prod_{v \in S} (X_*(T_{\mathrm{NS}})_v) \otimes \mathbf{R}.$$

Soit M l'image de $\log_S$. Le $\mathbf{Z}$-module M est un réseau dans le noyau de l'application canonique

$$\prod_{v \in S} X^*(T_{\mathrm{NS}})_v^\vee \otimes \mathbf{R} \to X^*(T_{\mathrm{NS}})_k^\vee \otimes \mathbf{R}.$$

Soit Δ un domaine fondamental pour M dans ce noyau, donné par une base de M, et pr une projection de $\prod_{v \in S} X^*(T_{\mathrm{NS}})_v^\vee \otimes \mathbf{R}$ sur ce noyau.

Dans la section 4.1, on a construit des fonctions

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v} : \operatorname{Pic} V_v \otimes \mathbf{C} \times \mathscr{T}(k_v) \to \mathbf{C}^\times$$

pour tout torseur $\mathscr{T}$ ayant un point rationnel. Elles induisent des fonctions

$$\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v} : \mathscr{T}(k_v) \to (\operatorname{Pic} V_v)^\vee \otimes \mathbf{R}$$

données par

$$\forall y \in \mathscr{T}(k_v), \forall L \in \operatorname{Pic} V_v, \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(y, L) = q_v^{\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v}(y)(L)}$$

où $q_v = \#\mathbf{F}_v$ si $v \in M_f$, $q_v = e$ si $k_v = \mathbf{R}$ et $q_v = e^2$ sinon [3]. On définit alors un domaine $\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T})$ par

$$\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \prod_{v \in S} \mathscr{T}(k_v) \,\middle|\, \mathrm{pr}((\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v}(y_v))_{v \in S}) \in \Delta \right\}.$$

Proposition 4.3.1. — *L'ensemble $\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T})$ est un domaine fondamental de $\prod_{v \in S} \mathscr{T}(k_v)$ sous l'action de $T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)/W(T_{\mathrm{NS}})$. Autrement dit, il vérifie les conditions suivantes :*

(i) $\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T})$ est stable sous l'action de $W(T_{\mathrm{NS}})$,

(ii) $\forall r \in T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S) - W(T_{\mathrm{NS}})$, $r.\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) \cap \Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) = \varnothing$,

(iii) $\bigcup_{r \in T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)} r.\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) = \prod_{v \in S} \mathscr{T}(k_v)$.

Démonstration. — Notons tout d'abord que pour toute place v de k on a

$$\begin{aligned}\forall L \in \operatorname{Pic} V_v,\ \forall y \in \mathscr{T}(k_v),\ \forall r \in T_{\mathrm{NS}}(k_v),\ \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(L, ry) &= (\|ry\|_v^L)^{-1} \\ &= |L(r)|_v^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(L, y).\end{aligned}$$

Par conséquent la fonction

$$(y_v)_{v \in S} \mapsto (\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v}(y_v))_{v \in S}$$

est compatible avec les actions de $T(\mathcal{O}_S)$, l'action de ce groupe sur $\prod_{v \in S} (\operatorname{Pic} V_v)^\vee \otimes \mathbf{R}$ étant donnée par $-\log_S$.

L'assertion (i) résulte alors du fait que $W(T_{\mathrm{NS}})$ est contenu dans le noyau de $\log_S$ et les assertions (ii) et (iii) du fait que Δ est un domaine fondamental pour l'image de $\log_S$. □

Exemple 4.3.1. — Si V est l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$, alors on peut prendre pour S l'ensemble des places archimédiennes et pour métriques celles associées à la base

---

3. On peut également définir des fonctions analogues $\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T}_K, \mathfrak{P}}$ sur K. En utilisant la note (2), en dehors d'un nombre fini de places, ces fonctions sont compatibles avec l'action du groupe de Galois. Autrement dit, l'application

$$\mathscr{T}(\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{P}}) \to \bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} (\operatorname{Pic} V_K)^\vee \otimes \mathbf{R}$$

est covariante, l'action de Galois sur $\bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} (\operatorname{Pic} V_K)^\vee \otimes \mathbf{R}$ étant vue comme induite de $\mathscr{G}_v$. Quitte à agrandir S, la restriction de cette application à $\mathscr{T}(k_{\mathfrak{p}})$ est à valeur dans $\operatorname{Pic}(V_v)$ et coïncide avec $\tilde{\mathbf{H}}^{\log}_{\mathscr{T},v}$.

usuelle de l'espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}^n_k, \mathcal{O}(1))$. Le domaine fondamental coïncide alors avec celui construit par Schanuel [**Sc**].

Plus généralement, si V est une intersection complète lisse de dimension supérieure à 3 et si on prend $S = M_\infty$, alors, en utilisant les métriques obtenues par restriction à partir de $\mathbf{P}^n_k$, le domaine fondamental est celui décrit dans [**Pe**, §5.1].

En particulier si $k = \mathbf{Q}$ on a simplement dans ce cas

$$\Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{T}) = \prod_{v \in S} \mathcal{T}(\mathbf{Q}_v).$$

4.4. Mesures sur les torseurs universels. — Notre but dans cette section est de construire une mesure adélique canonique sur les torseurs universels. Là encore, notre fil conducteur sera le cas des intersections complètes lisses pour lesquelles on dispose de la mesure induite par la forme différentielle de Leray (cf. [**Lac**, page 148], [**Pe**, page 130]). Comme pour la mesure introduite par Salberger [**Sal**], il ne sera pas nécessaire d'introduire des facteurs de convergence, ce qui est un des avantages du passage aux torseurs universels. Toutefois l'espace adélique considéré par Salberger diffère de celui utilisé ici. En outre la mesure utilisée ici n'est pas invariante sous l'action du tore T_{NS}.

***Notations 4.4.1.* —** Soit $\mathcal{T}$ un torseur universel au-dessus de V ayant un point rationnel sur k. Pour toute place v de k et tout point x de $V(k_v)$ au-dessus duquel le torseur $\mathcal{T}$ a un point rationnel sur k_v, on considère la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x, v}$ définie par la relation :

$$\int_{\mathcal{T}_x(k_v)} f(r)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(r) = \int_{T_{\mathrm{NS}}(k_v)} f(r.y)\|r.y\|_v^{\omega_V}\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(r) \tag{4.4.1}$$

où f est une fonction sur $\mathcal{T}_x(k_v)$ et y un point fixé de $\mathcal{T}_x(k_v)$, où $\|.\|_v^{\omega_V}$ a été défini au paragraphe 4.1 et où $\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}$ est la mesure canonique sur $T_{\mathrm{NS}}(k_v)$, dont la définition a été rappelée dans le paragraphe 3.1.

On considère alors la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ définie sur $\mathcal{T}(k_v)$ par la relation :

$$\int_{\mathcal{T}(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}(y) = \int_{V(k_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}(x) \int_{\mathcal{T}_x(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(y).$$

***Remarque 4.4.1.* —** (i) Pour ces notations on fixe $(\omega_V, (\|.\|_v)_{v \in M_k})$, un représentant de $\mathbf{H}([\omega_V])$. Ce choix n'intervient que dans les termes locaux de la mesure.

(ii) En termes de celle de Salberger, cette mesure peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}(r) = \|r\|_v^{\omega_V} \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Salberger},v}(r).$$

Hypothèse 5. — Désormais on suppose en outre que le faisceau ω_V^{-1} appartient à l'ouvert $\mathcal{D}(C_{\mathrm{eff}}(V))$ défini dans le théorème 3.2.3.

Proposition 4.4.2. — *Avec les notations ci-dessus, le produit des mesures $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ définit une mesure adélique sur l'espace $\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$.*

Démonstration. — Il nous faut montrer que, quitte à élargir S, le produit

$$\prod_{v \notin S} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}(\mathcal{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v))$$

converge. Mais on a les relations

$$\begin{aligned}\forall v \in M_f,\ \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}(\mathcal{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)) &= \int_{\mathcal{T}(k_v)} \mathbf{1}_{\mathcal{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v} \\ &= \int_{V(k_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}(x) \int_{\mathcal{T}_x(k_v)} \mathbf{1}_{\mathcal{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)}(y) \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(y).\end{aligned}$$

Par [**CTS2**, lemme 3.2.3], quitte à augmenter S, pour tout v de $M_f - S$, l'application $\mathcal{T}(k_v) \to V(k_v)$ est surjective.

En outre, quitte à augmenter S, on peut supposer qu'il existe un modèle $\mathcal{T}$ de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{O}_S$ de sorte que pour toute place $\mathfrak{P}$ ne dominant pas un élément de S, tout y de $\mathcal{T}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$ et tout $L \in \operatorname{Pic} V_K$, on ait

$$\tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathcal{T},\mathfrak{P}}(L, y) = 1.$$

Quitte à augmenter S, si v appartient à $M_f - S$ et x à $V(k_v)$, il existe un élément y de $\mathcal{T}_x(k_v)$ provenant de $\mathcal{T}(\mathcal{O}_v)$ [4]. Mais alors

$$\int_{\mathcal{T}_x(k_v)} \mathbf{1}_{\mathcal{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)}(y) \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(y) = \int_{T_{\mathrm{NS}}(k_v)} \mathbf{1}_{T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\mathcal{O}_v)} \left|\omega_V(r)\right|_v \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(r).$$

4. En effet, quitte à augmenter S, en utilisant la note 3 et la surjectivité de $T_{\mathrm{NS}}(k_v) \to \operatorname{Pic}(V_v)$, on obtient un élément y de $\mathcal{T}_x(k_v)$ tel que, pour toute place $\mathfrak{P}$ de K au-dessus de $\mathfrak{p}$,

$$\forall L \in \operatorname{Pic}(V_K), \quad \tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathcal{T},\mathfrak{P}}(L, y) = 1.$$

On obtient donc les égalités

$$\begin{aligned}
&\prod_{v\in M_k - S} \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}(\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v))\\
&\qquad = \prod_{v\in M_k-S}\left[\int_{T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}),\mathcal{O}_v)} \left|\omega_V(r)\right|_v \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(r)\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}(V(k_v))\right]\\
&\qquad = \left[\prod_{v\in M_k-S} L_v(T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \omega_{\overline{V}}^{-1})\right]\\
&\qquad\qquad \times \left[\prod_{v\in M_k-S} \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v))L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V})\right]\\
&\qquad\qquad \times \left[\prod_{v\in M_k-S} L_v(1,\operatorname{Pic}\overline{V})^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}(V(k_v))\right].
\end{aligned}$$

La convergence du premier terme résulte des travaux de Draxl, (cf. théorème 3.2.3) et de l'hypothèse 5, la convergence du second des travaux de Weil et Ono et celle du troisième se démontre comme dans [**Pe**, proposition 2.2.2]. □

Il résulte de la preuve qu'il est possible de prendre la convention suivante :

Convention 4.4.2. — Dans la suite, on augmente S de façon à ce que pour tout $\mathfrak{p}$ de $M_k - S$ et tout x de $V(k_{\mathfrak{p}})$, il existe $y \in \mathscr{T}_x(k_{\mathfrak{p}})$ tel que

$$\forall \mathfrak{P}|\mathfrak{p},\ \forall L\in \operatorname{Pic} V_K,\ \tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathscr{T},\mathfrak{P}}(L,y) = 1.$$

Lemme 4.4.3. — *Le produit des mesures $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$ est indépendant du choix du système de hauteurs.*

Démonstration. — Soient $\mathbf{H}^1$ et $\mathbf{H}^2$ deux systèmes de métriques correspondant à deux métriques adéliques $(\|.\|_v^1)_{v\in M_k}$ et $(\|.\|_v^2)_{v\in M_k}$ sur $\omega_{\overline{V}}^{-1}$. La seconde peut alors s'écrire comme $(f_v\|.\|_v^1)_{v\in M_k}$ où les fonctions f_v sont continues, partout non nulles et presque toutes constantes et égale à 1 sur $V(k_v)$. Par la formule (2.3.1), la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}$ est multipliée par f_v. Mais par (4.4.1) et la définition de $\|.\|_v^{\omega_V}$, les mesures $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_x,v}$ sur $\mathscr{T}_x(k_v)$ sont divisées par $f_v\lambda_v$ où $(\lambda_v)_{v\in M_k}$ est une famille de réels presque tous égaux à 1 et telle que $\prod_{v\in M_k}\lambda_v = 1$. La mesure $\prod_{v\in M_k}\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$ est donc inchangée. □

Définition 4.4.3. — On définit alors la mesure adélique canonique $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}}$ sur l'espace adélique $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ par la formule

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}} = \frac{1}{\sqrt{d}^{\dim \mathscr{T}}} \prod_{v \in M_k} \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}.$$

Remarque 4.4.4. — Il est en fait également possible de définir cette mesure en termes d'une section partout non nulle de $\omega_{\mathscr{T}}$, mais la description donnée ici est plus pratique du point de vue de la descente.

Exemple 4.4.1. — Si V est une intersection complète lisse de dimension $n \geqslant 3$ dans $\mathbf{P}_k^N$ définie par l'annulation de m polynômes homogènes f_i de degré d_i et si $\mathscr{T}$ est le cône épointé au-dessus de V dans $\mathbf{A}_k^{N+1}$, alors la forme différentielle de Leray ω_{L} sur $\mathscr{T}$ est définie par la relation suivante : si y est un point rationnel de $\mathscr{T}$ et si $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{l_j}}(y)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ est inversible pour $l_1 < \cdots < l_m$, alors

$$\omega_{\mathrm{L}}(y) = (-1)^{Nm - \sum_{j=1}^m l_j} \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{l_j}}(y)\right)^{-1}_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$$
$$dX_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_{l_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_{l_m}} \wedge \cdots \wedge dX_N.$$

Cette forme définit des mesures $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{L},v}$ sur $\mathscr{T}(k_v)$ pour toute place v de k. D'autre part le choix des équations $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ définit un isomorphisme de ω_V^{-1} sur $\mathcal{O}_V(\delta)$ où $\delta = N + 1 - \sum_{i=1}^m d_i$. De manière plus explicite un polynôme homogène g de degré δ correspond à la forme $\omega(g)$ définie en $\boldsymbol{x} = (1 : x_1 : \ldots : x_N)$ par la formule (cf. [**Pe**, page 134])

$$\omega(g)(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) \det \left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(\boldsymbol{x})\right)_{\substack{N-m+1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \frac{\partial}{\partial X_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial X_{N-m}}.$$

Par ailleurs, le système de hauteurs est défini par le choix d'une métrique adélique sur $\mathcal{O}_V(1)$.

Proposition 4.4.5. — *Pour tout choix de la métrique sur $\mathcal{O}_V(1)$ et toute place v de k la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$ coïncide avec la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{L},v}$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer le résultat au-dessus d'un ouvert W de $V(k_v)$ pour la topologie v-adique sur lequel X_0 et $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(x)\right)_{\substack{N-m+1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ ne s'annulent pas. Soit $\rho : W \to \mathscr{T}$ l'application qui envoie $\boldsymbol{x}$ de coordonnées $(1 : x_1 : \ldots : x_N)$ sur $(1, x_1, \ldots, x_N)$. Alors par [**Pe**, Lemme 5.4.4], l'image de la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}$ sur $\rho(W)$ est donnée par

$$\rho_* \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v} = \frac{1}{\|y\|_v^{\omega_V} \left|\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(y)\right)_{\substack{N-m+1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\right|_v} dX_{1,v} \ldots dX_{N-m,v}.$$

Par définition, la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v}$ s'exprime par la formule suivante

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T},v} = \frac{1}{\left|\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(y)\right)_{\substack{N-m+1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\right|_v} dX_{1,v} \ldots dX_{N-m,v}$$

qui coïncide avec $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{L},v}$. $\square$

5. Deux résultats de descente

5.1. Une fonction de comptage. — Comme pour la méthode du cercle, il semble raisonnable de chercher à comparer dans certains cas des sommations du type

$$\sum_{y\in\mathscr{T}(k)} \Phi(y)$$

avec des intégrales de la forme

$$\int_{\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi \boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}}$$

où Φ est une fonction sur l'espace $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$. Or les différentes conjectures sur le nombre de points de hauteur bornée sur la variété V peuvent s'interpréter à l'aide de comparaisons de ce type.

A titre d'exemple, nous allons décrire comment la question 2.6.1 peut se relever. Il nous faut pour cela décrire les fonctions pour lesquelles devraient être effectuées les comparaisons.

Notations 5.1.1. — Si $\mathscr{T}$ est un torseur universel au-dessus de V avec $\mathscr{T}(k) \neq \varnothing$ et si s appartient à $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$, on définit $\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}}$ par le produit

$$\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}}(s,y) = \frac{1}{\#W(T_{\mathrm{NS}})} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},S}(s,y). \prod_{v \in M_k - S} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(s,y_v)$$

où pour tout v en dehors de S, $\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(s,.)$ est la fonction indicatrice de $\mathscr{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)$ et $\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},S}(s,\cdot)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble donné par

$$\left\{ (y_v)_{v\in S} \in \Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}) \;\middle|\; \begin{cases} \forall v \in S, \pi(y_v) \in U(k_v) \\ \forall L \in C_{\mathrm{eff}}(V), \prod_{v\in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(L,y_v) \geqslant 1 \end{cases} \right\}$$

multipliée par la fonction $\prod_{v\in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T},v}(s,y_v)^{-1}$ où U désigne le complémentaire dans V des sous-variétés modérément accumulatrices.

5.2. La descente pour la fonction zêta des hauteurs. — Nous nous placerons sous les hypothèses suivantes, qui contiennent toutes les hypothèses déjà effectuées.

Hypothèses . — La lettre V désigne une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur k qui satisfait les conditions suivantes :

(1) $H^i(V,\mathcal{O}_V) = 0$ pour $i = 1$ ou 2,

(2) $\operatorname{Pic} \overline{V} = \operatorname{NS} \overline{V}$ est sans torsion,

(3) ω_V^{-1} appartient à l'ouvert $\mathcal{D}(C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})) \subset C_{\mathrm{eff}}(V)$,

(4) $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ est un cône polyédrique rationnel,

(5) $V(k)$ est Zariski dense dans V,

(6) le complémentaire dans V des sous-variétés modérément accumulatrices pour toute hauteur de fibré ω_V^{-1} est un ouvert de Zariski non vide de V,

(7) les torseurs universels au-dessus de V vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible.

Remarque 5.2.1. — Les hypothèses 1 à 4 sont de nature géométrique alors que les conditions 5 à 7 sont de nature arithmétique. Comme indiqué précédemment, l'auteur ne connaît pas de variété vérifiant les conditions 1 à 3 sans vérifier la condition 4 ; la condition 7 a été étudiée par Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS2**, §3.8] et là encore aucun contre-exemple ne semble être connu lorsque V vérifie les conditions 1 à 3. Il n'en est peut-être pas de même de la condition 6 qui pourrait être fausse pour certaines variétés de Fano (cf. l'exemple de Batyrev et Tschinkel [**BT2**]).

Pour simplifier l'énoncé des résultats, nous supposerons que le système de hauteurs $\mathbf{H}_K$ vérifie la condition suivante :

$$\forall x \in V(K), \quad \forall L \in C_{\text{eff}}(\overline{V}) \cap \operatorname{Pic} \overline{V}, \quad \mathbf{H}_K(L,x) \geqslant 1$$

situation à laquelle on peut toujours se ramener.

Théorème 5.2.2. — *Soit V une variété vérifiant les conditions ci-dessus, K une extension galoisienne de k telle que* $\operatorname{Pic} V_K \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} \overline{V}$, $\mathbf{H}_K$ *un système de hauteurs sur V_K satisfaisant à la condition qui précède, soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de représentants des classes d'isomorphismes de torseurs universels au-dessus de V ayant un point rationnel sur k. Alors, pour tout s appartenant à un cône ouvert de* $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$

$$\sum_{i\in I} \sum_{y\in\mathcal{T}_i(k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i}(s,y) = \zeta_{\mathbf{H}}(s) L_S(s, T_{\text{NS}}, C_{\text{eff}}(\overline{V})).$$

Démonstration. — On se fixe un élément s de $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$ pour lequel les suites qui définissent $\zeta_{\mathbf{H}}(s)$ et $L_S(s, T_{\text{NS}}, C_{\text{eff}}(\overline{V}))$ convergent. Soit alors x un point rationnel de U et i l'unique élément de I tel que $\mathcal{T}_i$ ait un point rationnel au-dessus de x. Il nous faut donc démontrer la formule suivante :

$$\sum_{y\in\mathcal{T}_{i_x}(k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i}(s,y) = \mathbf{H}(s,x)^{-1} L_S(s, T_{\text{NS}}, C_{\text{eff}}(\overline{V})). \tag{5.2.1}$$

Par définition des fonctions $\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i}$ et par la formule (4.1.2), le terme de gauche s'écrit également

$$\frac{1}{\#W(T_{\text{NS}})} \sum_{y\in\mathcal{F}_x} \prod_{v\in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i,v}(s,y)^{-1} = \frac{1}{\#W(T_{\text{NS}})} \sum_{y\in\mathcal{F}_x} \frac{\prod_{v\in M_k-S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i,v}(s,y)}{\mathbf{H}(s,x)}$$

où $\mathcal{F}_x$ est l'ensemble des y de $\mathcal{T}_{i_x}(k)$ vérifiant les conditions suivantes

(i) $\forall \mathfrak{P} \in M_K - S_K$, $\forall L \in C_{\text{eff}}(\overline{V})$, $\tilde{\mathbf{H}}^K_{\mathcal{T}_i,\mathfrak{P}}(L,y) \leqslant 1$,

(ii) $\forall L \in C_{\text{eff}}(V)$, $\prod_{\mathfrak{p}\in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i,\mathfrak{p}}(L,y) \geqslant 1$,

(iii) $(y_v)_{v\in S} \in \Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{T}_i)$.

Mais l'hypothèse faite sur $\mathbf{H}_K$ et la formule (4.1.2) entraînent que la première assertion implique la seconde. Il suffit donc de considérer la première et la dernière.

Il résulte de la convention 4.4.2 que si $v \in M_k - S$, il existe $y_{0,v} \in \mathcal{T}_{i_x}(k_v)$ tel que pour tout L de $\operatorname{Pic} V_K$ on ait

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i,v}(L, y_{0,v}) = 1. \tag{5.2.2}$$

Mais comme le morphisme

$$T_{\mathrm{NS}}(k) \to \bigoplus_{v \in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v$$

est surjectif, il existe en fait $y_0 \in \mathcal{T}_{i_x}(k)$ tel que, pour tout v de $M_k - S$, l'image de y_0 dans $\mathcal{T}_{i_x}(k_v)$ vérifie (5.2.2). Considérons alors la bijection

$$\begin{array}{rcl} \theta : T_{\mathrm{NS}}(k) & \to & \mathcal{T}_{i_x}(k) \\ r & \mapsto & r.y_0. \end{array}$$

La somme $\sum_{y \in \mathcal{F}_x} \prod_{v \in M_k - S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i, v}(s, y)$ s'écrit alors

$$\sum_{\left\{ r \in T_{\mathrm{NS}}(k) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} \forall v \in M_k - S, r \in T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathcal{O}_v) \\ r y_0 \in \Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{T}) \end{array} \right. \right\}} \prod_{v \in M_k - S} \langle s, r \rangle_v$$

$$= \# W(T_{\mathrm{NS}}) \sum_{\{ r \in T_{\mathrm{NS}}(k) | \forall v \in M_k - S, r \in T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathcal{O}_v) \} / T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)} \prod_{v \in M_k - S} \langle s, r \rangle_v$$

où l'égalité résulte de la proposition 4.3.1. Mais par la proposition 3.1.2, on a une suite exacte

$$0 \to T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S) \to T_{\mathrm{NS}}(k) \to \bigoplus_{v \in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v \to 0$$

et donc la somme ci-dessus coïncide avec

$$\prod_{v \in M_k - S} \sum_{x \in -C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}) \cap X_*(T_{\mathrm{NS}})_v} (\# \mathbf{F}_v)^{\langle x, s \rangle}$$

qui par le résultat de Draxl, (cf. proposition 3.2.2) est égale à $L_S(s, T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}))$. □

5.3. La descente pour l'analogue intégral

Théorème 5.3.1. — *Sous les hypothèses du théorème 5.2.2, pour tout s appartenant à un cône ouvert de* Pic $V \otimes \mathbf{C}$, *on a la formule*

$$\sum_{i \in I} \int_{\mathcal{T}_{i\, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i}(s, y) \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i}(y)$$

$$= \# H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{V}) . \tau_{\mathbf{H}}(V) . \chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s - \omega_V^{-1}) L_S(\omega_V^{-1}, T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})).$$

Démonstration. — On fixe un élément s de $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$ pour lequel $\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s - \omega_V^{-1})$ est bien définie. Par définition, le terme de gauche du théorème s'écrit de la manière suivante

$$\sum_{i \in I} \int_{\mathcal{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \frac{1}{\# W(T_{\mathrm{NS}})} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i, S}(s, y) \prod_{v \in M_k - S} \mathbf{1}_{\mathcal{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)} \frac{1}{\sqrt{d}^{\dim \mathcal{T}_i}} \prod_{v \in M_k} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i, v}(x)$$

ou encore

$$\frac{1}{\# W(T_{\mathrm{NS}}) \sqrt{d}^{\dim \mathcal{T}_i}} \sum_{i \in I} \prod_{v \in M_k - S} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i, v}(\mathcal{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)) \int_{\prod_{v \in S} \mathcal{T}_i(k_v)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i, S}(s, x) \prod_{v \in S} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i, v}(x).$$

Soit v une place de k en dehors de S, i un élément de I et x un point de $V(k_v)$. On peut alors choisir dans la fibre un point y_0 tel que

$$\forall L \in \operatorname{Pic} \overline{V}, \quad \|y_0\|_v^L = 1.$$

On obtient la formule

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{T}_{i\,x}(k_v) \cap \mathcal{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i, v} &= \int_{T_{\mathrm{NS}}(-C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \mathcal{O}_v)} \left| \omega_V(r) \right|_v \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}}, v}(r) \\
&= \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}}, v}(T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v)) . L_v(T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \omega_V^{-1})
\end{aligned}$$

et donc

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i, v}(\mathcal{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)) = \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}}, v}(T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v)) L_v(T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \omega_V^{-1}) \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}, v}(V(k_v)).$$

En prenant le produit sur les places v en dehors de S, on obtient

$$\begin{aligned}
\prod_{v \in M_k - S} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i, v}(\mathcal{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)) &= \left[\prod_{v \in M_k - S} L_v(T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \omega_V^{-1}) \right] \\
&\quad \times \left[\prod_{v \in M_k - S} \boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}}, v}(T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v)) L_v(1, \operatorname{Pic} \overline{V}) \right] \\
&\quad \times \left[\prod_{v \in M_k - S} L_v(1, \operatorname{Pic} \overline{V})^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}, v}(V(k_v)) \right].
\end{aligned}$$

Soit i un élément de I et $(x_v)_{v \in S}$ un point de l'image de $\prod_{v \in S} \mathcal{T}_i(k_v)$. Comme, par la proposition 3.1.2 (i), le morphisme de $T_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_k)$ vers $(\operatorname{Pic} V)^\vee \otimes \mathbf{R}$ est surjectif, il existe un élément y_0 de $\prod_{v\in S}\mathcal{T}_i(k_v)$ tel que pour tout L de $\operatorname{Pic}V$ on ait $\prod_{v\in S}\|y_0\|_v^L = 1$. On a alors la relation

$$\begin{aligned}&\#W(T_{\mathrm{NS}})^{-1}\int_{\prod\limits_{v\in S}\mathcal{T}_{ix_v}(k_v)}\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i,S}(s,y)\left(\prod_{v\in S}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_{ix_v},v}\right)(y)\\&=\int_{\prod\limits_{v\in S}T_{\mathrm{NS}}(k_v)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)}\mathbf{1}_{\{(r_v)_{v\in S}|\forall\xi\in C_{\mathrm{eff}}(V),\ \prod\limits_{v\in S}|\xi(r_v)|_v\leqslant 1\}}\prod_{v\in S}\langle s-\omega_V^{-1},r_v\rangle_v\prod_{v\in S}\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(r_v).\end{aligned}$$

Notons $T^1_{\mathrm{NS}}(\prod_{v\in S}k_v)$ l'ensemble

$$\{(r_v)_{v\in S}\in\prod_{v\in S}T_{\mathrm{NS}}(k_v)\mid\forall\xi\in\operatorname{Pic}V,\ \prod_{v\in S}|\xi(r_v)|_v=1\}.$$

Comme dans le paragraphe 3.1, on définit une mesure $\boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}},S}$ sur ce groupe. Le terme ci-dessus est alors donné par la formule

$$\int_{C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee}e^{-\langle s-\omega_V^{-1},y\rangle}dy.\boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}},S}\Big(T^1_{\mathrm{NS}}\Big(\prod_{v\in S}k_v\Big)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)\Big).$$

On obtient donc l'égalité

$$\begin{aligned}\#W(T_{\mathrm{NS}})^{-1}&\int_{\prod_{v\in S}\mathcal{T}_i(k_v)}\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i,S}(s,y)\prod_{v\in S}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}(y_v)\\&=\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})\boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}},S}\Big(T^1_{\mathrm{NS}}\Big(\prod_{v\in S}k_v\Big)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)\Big)\\&\qquad\times\Big(\prod_{v\in S}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H},v}\Big)\Big(\pi\Big(\prod_{v\in S}\mathcal{T}_i(k_v)\Big)\Big).\end{aligned}$$

Or il résulte de la proposition 3.1.2 qu'on a un isomorphisme

$$T^1_{\mathrm{NS}}\Big(\prod_{v\in S}k_v\Big)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_S)\times\prod_{v\in M_k-S}T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v)\xrightarrow{\ \sim\ }T^1_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_k)/T_{\mathrm{NS}}(k).$$

En réunissant le terme obtenu pour les bonnes places à celui obtenu aux mauvaises, on obtient la formule

$$\int_{\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \Phi^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(s,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i}(y) = \chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})\boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}}}(T^1_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_k)/T_{\mathrm{NS}}(k))\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{H}}\Big(\pi\Big(\prod_{v\in M_k}\mathscr{T}_i(k_v)\Big)\Big).$$

Par le théorème d'Ono,

$$\boldsymbol{\omega}_{T^1_{\mathrm{NS}}}(T^1_{\mathrm{NS}}(\boldsymbol{A}_k)/T_{\mathrm{NS}}(k)) = \#H^1(k,\mathrm{Pic}\,\overline{V})/\#\text{Ш}^1(k,T_{\mathrm{NS}}).$$

D'autre part si $x\in V(k)$, alors le nombre de classes d'isomorphisme de torseurs universels au-dessus de V qui ont un point adélique au-dessus de l'image de x dans $V(\boldsymbol{A}_k)$ est précisément $\text{Ш}^1(k,T_{\mathrm{NS}})$. Et il résulte de l'hypothèse (7) du paragraphe précédent que

$$\pi\Big(\prod_{v\in M_k}\mathscr{T}_i(k_v)\Big)\subset\overline{V(k)}.$$

En sommant sur les différents torseurs universels, on obtient la formule recherchée. □

5.4. Conclusion. — En définitive on obtient que, sous les hypothèses faites à la section 5.2, la question optimiste 2.6.1, à savoir la comparaison entre $\zeta_{\mathbf{H}}(s)$ et

$$\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V)$$

au voisinage de ω_V^{-1} se ramène, au niveau des torseurs universels à des majorations de termes de la forme

$$\left|\sum_{y\in\mathscr{T}_i(k)}\Phi(s,y)-\int_{\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)}\Phi(s,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i}(y)\right|$$

où, par le corollaire 4.2.3 et le lemme 4.4.3, $\mathscr{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ et $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}_i}$ sont des structures canoniques associées au torseur universel.

De même la conjecture de Manin raffinée (cf. [**Pe**, conjecture 2.3.1] et [**BT1**]) qui relie $n_{U,\mathbf{H}}(H)$ à

$$\alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V)H(\log H)^{t-1}$$

avec $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic} V$, peut se ramener à des majorations similaires à l'aide des fonctions de comptage

$$\Phi'^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i}(H, \mathfrak{b}, y) = \Phi'^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i, S}(H, \mathfrak{b}, y) \prod_{v \in M_k - S} \Phi'^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i, v}(H, \mathfrak{b}, y)$$

avec $H \in \mathbf{R}_{>0}$ et $\mathfrak{b} \in \bigoplus_{v \in M_k - S} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v$ où, pour tout v en dehors de S, $\Phi'^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i, v}(H, \mathfrak{b}, y)$ est la fonction indicatrice de $b_v \mathscr{T}_{i\mathbf{H}}(\mathcal{O}_v)$ pour un élément b_v de l'ensemble $T_{\mathrm{NS}}(k_v)$ tel que $\log_v(b_v) = \mathfrak{b}_v$ et où $\Phi'^{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}_i, S}(H, .)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble défini par

$$\begin{cases} (y_v)_{v \in S} \in \Delta_{\mathbf{H}_K}(\mathscr{T}_i), \\ \forall v \in S,\ \pi(y_v) \in U(k_v), \\ \forall L \in C_{\mathrm{eff}}(V),\ \prod_{v \in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}, v}(L, y_v) \geqslant 1, \\ \prod_{v \in S} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathscr{T}, v}(\omega_V^{-1}, y_v) \leqslant H. \end{cases}$$

Ces réductions sont des généralisations du passage de la variété au cône épointé pour les intersections complètes lisses.

L'étape suivante dans le développement d'une hypothétique machinerie générale serait de passer d'un torseur $\mathscr{T}$ à un espace affine. Pour cela, il nous faut tout d'abord trouver un plongement de $\mathscr{T}$ dans un espace affine qui joue le même rôle que celui considéré dans le cas des variétés multihomogènes (cf. exemple 3.3.2) ou torique (cf. exemple 3.3.3).

Dans ce but, donnons-nous une famille génératrice $([L_j])_{j \in J}$ de $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ provenant de $\operatorname{Pic}\overline{V}$ et qui soit invariante sous l'action du groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ et soit $\mathscr{M}(\overline{V})$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base J. C'est un module de permutation et on a un épimorphisme naturel

$$p : \mathscr{M}(\overline{V}) \twoheadrightarrow \operatorname{Pic}\overline{V}.$$

Le fibré vectoriel $\overline{E} = \bigoplus_{j \in J} L_j^{\vee}$ provient d'un unique fibré E sur V et l'unique torseur $\mathscr{R}$ sous $T(\mathscr{M}(\overline{V}))$ au-dessus de V dont l'invariant $\rho(\mathscr{R})$ est p est donné comme k-forme de $\times_{V\, j \in J} L_j^{\times}$.

L'application p induit un morphisme de tores

$$j : T_{\mathrm{NS}} \to T(\mathscr{M}(\overline{V}))$$

et on a un morphisme de $\mathscr{T}$ vers $j_*(\mathscr{T})$ qui est isomorphe à $\mathscr{R}$. On obtient ainsi un morphisme

$$\tilde{j} : \mathscr{T} \to \mathscr{R} \subset E.$$

Comme dans la démonstration de la proposition 4.2.2, on peut montrer que

$$\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k) = \prod_{v\in M_k} \mathscr{T}(k_v) \cap E(\boldsymbol{A}_k).$$

Considérons maintenant l'espace vectoriel A obtenu par descente galoisienne à partir de

$$\overline{A} = \bigoplus_{j\in J} \Gamma(\overline{V}, L_j)^{\vee}.$$

On a un morphisme naturel $\mathrm{ev} : E \to A$. On suppose dans la suite que cela définit un plongement de $\mathscr{T}$ dans A. Ce plongement a l'avantage que l'action de T_{NS} sur $\mathscr{T}$ s'étend en une action sur A.

Un premier problème auquel on se heurte est, comme dans le cas des variétés toriques, la différence entre $\mathscr{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ et $\prod_{v\in M_k} \mathscr{T}(k_v) \cap A(\boldsymbol{A}_k)$. Plus précisément, soit v une place finie, $x \in V(k_v)$ au-dessus duquel $\mathscr{T}$ a un point y_0. En dehors de S, on peut choisir y_0 de sorte que

$$\forall L \in C_{\mathrm{eff}}(\overline{V}), \quad \|y_0\|_v^L = 1.$$

et on a un isomorphisme naturel

$$\mathscr{T}_x(k_v)/T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_v) \xrightarrow{\sim} X_*(T_{\mathrm{NS}})_v.$$

On se donne des bases $\mathrm{s}_{i,j}$ de $\Gamma(\overline{V}, L_j)$. Quitte à augmenter S, on peut supposer que l'image de $\mathscr{T}_x(K_{\mathfrak{P}}) \cap A(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$, qui est invariante sous $T_{\mathrm{NS}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$, est donnée par

$$\{\, \xi \in X_*(T_{\mathrm{NS}}) \mid \forall j \in J,\ \langle \xi, L_j \rangle \geqslant \sup\left(\log_{q_{\mathfrak{P}}} \left\| \mathrm{s}_{i,j}(x) \right\|_{\mathfrak{P}}^{j}\right) \}$$

où $(L_j, (\|.\|_{\mathfrak{P}}^{j})_{\mathfrak{P}\in M_K})$ représente $\mathbf{H}(L_j)$ pour $j \in J$. Il s'agit d'une réunion finie de translatés de $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})^{\vee}$ qui n'est autre que l'image de $\mathscr{T}_x(K_{\mathfrak{P}}) \cap \mathscr{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}})$. En outre le terme

$$\sup(\log_{q_{\mathfrak{P}}} \left\| \mathrm{s}_{i,j}(x) \right\|_{\mathfrak{P}}^{j})$$

est d'autant plus important que x est proche des points bases des faisceaux L_j, qui, dans plusieurs exemples, coïncident avec les sous-variétés accumulatrices.

Cette difficulté résolue, il faudrait alors passer de $\prod_{v\in M_k} \mathscr{T}(k_v) \cap A(\boldsymbol{A}_k)$ à $A(\boldsymbol{A}_k)$ et de $\mathscr{T}(k)$ à $A(k)$ ce qui devrait être réalisable en s'inspirant des travaux d'Igusa lorsque $\mathscr{T}$ est donné comme intersection complète dans A, puis majorer sur l'analogue des arcs majeurs les différences

$$\sum_{y\in A(k)} \phi(x) - \int_{A(\boldsymbol{A}_k)} \phi$$

pour les fonctions ϕ obtenues. Toutefois il n'est pas clair a l'heure actuelle que l'on puisse obtenir des généralisations du cœur de la méthode du cercle à savoir obtenir des majorations suffisamment fines de sommes d'exponentielles.

Je tiens à remercier Per Salberger et Yuri Tschinkel pour plusieurs dicussions qui ont permis la rédaction de cet article.

Références

[Ar] S. J. Arakelov, *Theory of intersections on the arithmetic surface*, Proceedings of the international congress of mathematicians, Vol. 1 (Vancouver, 1974), Canad. Math. Congress, Montréal, 1975, pp. 405–408.

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ———, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), n° 1, 41–46.

[BT3] ———, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), n° 1, 15–53.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS2] ———, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[Da] V. I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Uspekhi. Mat. Nauk **33** (1978), n° 2, 85–134; English transl. in Russian Math. Surveys **33** (1978), n° 2, 97–154.

[Del] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), n° 3, 315–339.

[Dr] P. K. J. Draxl, *L-Funktionen algebraischer Tori*, J. of Number Theory **3** (1971), 444–467.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[SGA2] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux.*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 2, North Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968.

[Kö] M. Köcher, *Positivitätsbereiche im* $\mathbf{R}^n$, Amer. J. Math. **79** (1957), 575–596.

[Lac] G. Lachaud, *Une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring*, Enseign. Math. (2) **28** (1982), 139–169.

[Ma] Y. I. Manin, *Problems on rational points and rational curves on algebraic varieties*, Surveys in differentiable geometry **2** (1995), 214–245.

[Mi] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.

[Oda1] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1988.

[Oda2] ———, *Recent topics on toric varieties*, Selected papers on number theory and algebraic geometry (K. Nomizu, ed.), Amer. Math. Soc. Trans. (2), vol. 172, AMS, Providence, 1996, pp. 77–91.

[Ono1] T. Ono, *On some arithmetic properties of linear algebraic groups*, Ann. of Math. (2) **70** (1959), n$^{\text{o}}$ 2, 266–290.

[Ono2] ———, *Arithmetic of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), n$^{\text{o}}$ 1, 101–139.

[Ono3] ———, *On the Tamagawa number of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), n$^{\text{o}}$ 1, 47–73.

[Pe] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n$^{\text{o}}$ 1, 101–218.

[Ro] M. Robbiani, *Rational points of bounded height on Del Pezzo surfaces of degree six*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 403–422.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Se] J.-P. Serre, *Algèbre locale, multiplicités (Troisième édition)*, Lecture Notes in Math., vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1975.

[Sk1] A. N. Skorobogatov, *On a theorem of Enriques—Swinnerton-Dyer*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **2** (1993), n$^{\text{o}}$ 3, 429–440.

[Sk2] ———, *Partial exceptional heights and descent on rational surfaces*, Unpublished text (1993).

[SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting rational points on cubic surfaces*, Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992) (C. Ciliberto, E. L. Livorni, and A. J. Sommese, eds.), Contemp. Math., vol. 162, AMS, Providence, 1994, pp. 371–379.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

1998

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`