OBSTRUCTIONS AU PRINCIPE DE HASSE ET À L'APPROXIMATION FAIBLE

par

Emmanuel PEYRE

Résumé. — Si un système d'équations polynomiales à coefficients entiers admet une solution dans $\mathbf{Q}^n$, il en admet sur tout complété p-adique ou réel de $\mathbf{Q}$. La réciproque a été démontrée par Hasse pour les quadriques, mais elle est fausse en général. Une grande partie des contre-exemples connus peuvent être expliqués à l'aide de l'obstruction de Brauer-Manin, basée sur la théorie du corps de classe. Il est donc naturel de se demander si, pour certaines classes de variétés, cette obstruction est la seule. Le but de cet exposé est de présenter un survol des techniques développées pour répondre à ce type de questions.

Abstract. — If a system of polynomial equations with integral coefficients has a solution in $\mathbf{Q}^n$, then it has one over any p-adic or real completion of $\mathbf{Q}$. The converse was proven by Hasse for quadrics but does not hold in general. Most counter-examples could be explained using Brauer-Manin obstruction. Thus it is natural to ask whether this obstruction is the only one for various classes of varieties. The aim of this talk is to present a short survey of the methods introduced to explore such questions.

Introduction

Face à un système d'équations polynomiales à coefficients entiers, les questions de l'existence d'une solution à coordonnées entières ou rationnelles sont les premières qui viennent à l'esprit. Bien que les travaux de Davis, Putnam, Robinson, Matijacevič et Čudnovskiĭ (cf. [**Az**] et [**Ma2**]) sur le dixième problème de Hilbert aient montré que l'existence d'une solution entière ne peut être déterminée de façon algorithmique et bien que le problème analogue sur $\mathbf{Q}$ soit toujours ouvert, il est par contre raisonnable de chercher des critères d'existence de solutions rationnelles pour certaines classes de variétés. Une condition nécessaire évidente pour l'existence d'une telle solution est l'existence d'une solution sur le corps des réels et sur tout complété p-adique de $\mathbf{Q}$. Hasse fut le premier à étudier de manière systématique la réciproque de cette condition nécessaire. En s'appuyant sur les progrès du corps de classes, il put démontrer cette réciproque pour certaines classes de variétés, dont les quadriques [**Has**], qui avaient été antérieurement étudiées par Legendre et Minkowski [**Mi**]. Mais ce passage du local au global ne s'étend pas à tout système d'équations. Hasse lui-même donna des contre-exemples à cette réciproque [**Hasse**]. Par la suite, ceux-ci se multiplièrent : Reichardt [**Re**] et Lind [**Li**] vers 1940 produisirent de manière indépendante une courbe de genre un, intersection de deux quadriques qui n'admet pas de points sur $\mathbf{Q}$ mais en admet sur tous ses complétés (cet exemple est également décrit dans [**Ca**]). La construction d'autres contre-exemples parmi les variétés géométriquement rationnelles demanda plus de temps, mais Swinnerton-Dyer en exhiba en 1962 au sein des surfaces cubiques non singulières [**SD1**]. En 1970, dans son exposé au congrès international de Nice [**Ma1**], Manin décrivit un critère général basé sur la formule de réciprocité de la théorie du corps de classes qui permit d'expliquer tous les contre-exemples antérieurs (cf. [**CTKS**]). De manière plus précise, supposons que V soit une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur $\mathbf{Q}$ et notons $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ l'espace adélique associé à V, c'est-à-dire l'espace topologique produit $V(\mathbf{R}) \times \prod_p V(\mathbf{Q}_p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers. Le principe du critère de Manin est de construire une partie $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ de $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ qui contient l'adhérence de l'ensemble des points rationnels dans l'espace adélique. Si $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}}) \neq \varnothing$ mais que $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ est vide, alors V n'admet pas de point rationnel sur $\mathbf{Q}$, alors qu'elle en admet sur tous ses complétés. Cette construction fournit également des contre-exemples à l'approximation faible : si $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}} \neq V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$, alors les points rationnels de V ne sont pas denses dans l'espace adélique (cf. [**CTS2**]).

Muni de cette construction, on peut alors affiner les questions précédentes de la façon suivante : étant donnée une variété projective, lisse et géométriquement intègre telle que $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ soit non vide,

- la variété V admet-elle un point rationnel ?
- L'ensemble de ces points rationnels est-il dense dans $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$?

Ces questions ont été explorées par de nombreux auteurs parmi lesquels on peut citer Borovoi, Colliot-Thélène, Harari, Salberger, Sansuc, Skorobogatov et Swinnerton-Dyer et une réponse positive à la seconde question fut obtenue pour diverses classes de variétés géométriquement rationnelles. Deux types de méthodes se sont révélées particulièrement efficaces. La première dite de descente consiste à construire des morphismes

$$f_i : W_i \to V$$

de sorte que W_i soit plus simple du point de vue arithmétique et de déduire le résultat pour V des propriétés des W_i. Cette méthode fut systématisée par Colliot-Thélène et Sansuc ([**CTS1**], [**CTS2**], [**CTS3**], [**CTS4**] et [**CTS5**]) à l'aide des torseurs universels. La seconde dite de fibration s'applique dans le cas où l'on dispose d'un morphisme

$$p : V \to B.$$

On cherche alors à déduire le résultat pour V des résultats connus pour les fibres de p.

Tous les experts se doutaient que la non vacuité de $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}}$ n'entraîne pas toujours celle de $V(\mathbf{Q})$, mais l'obtention d'un tel contre-exemple se révéla difficile. En 1999, dans [**Sk3**], Skorobogatov fut le premier à exhiber un exemple explicite de variété V vérifiant $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$ et ne possédant pas de points rationnels. Ce contre-exemple peut s'expliquer à l'aide d'un analogue non commutatif de l'obstruction de Brauer-Manin dû à Harari et Skorobogatov ([**Ha4**] et [**HS**]). Par ailleurs, Sarnak et Wang en 1995 dans [**SW**], puis Poonen en 2001 dans [**Po**] montrent que des conjectures de Lang impliquent l'existence de variétés sans point rationnel qui échappent au critère de Manin et à ses généralisations non abéliennes.

Dans la première partie de ces notes, nous revenons sur les notions de principe de Hasse et d'approximation faible, la seconde partie est consacrée à la description du critère de Brauer-Manin, la troisième aux méthodes utilisées pour montrer la densité des points rationnels dans l'espace $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ et la quatrième aux contre-exemples à cette densité. Nous terminons par des extensions de cette démarche à d'autres cadres.

1. Le principe de Hasse et l'approximation faible

1.1. Terminologie. — Fixons quelques notations pour la suite de cet exposé.

***Notations 1.1.* —** Désormais K désigne un corps de nombres, $\mathscr{O}_K$ son anneau des entiers et M_K l'ensemble des places de K. Pour toute place v de K, on note K_v le complété de K pour la topologie définie par v. Si la place v est non archimédienne, on note $\mathscr{O}_v$ l'anneau des entiers de K_v. Si $\mathscr{X}$ est un schéma sur le spectre d'un anneau A et B une A-algèbre commutative, on note $\mathscr{X}(B)$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(B), \mathscr{X})$ et $\mathscr{X}_B$ le produit $\mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B)$. En particulier, si V est une variété sur un corps F, $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et F^s la clôture séparable de F dans $\overline{F}$, $V(F)$ est l'ensemble des points rationnels de V et $\overline{V}$ (resp. V^s) désigne la variété $V_{\overline{F}}$ (resp. V_{F^s}) sur $\overline{F}$ (resp. F^s).

Nous dirons qu'une variété V sur un corps F est une *bonne variété* si elle est projective, lisse et géométriquement intègre. Deux variétés intègres V et W sur F sont
F-birationnellement équivalentes si un ouvert non vide de V est isomorphe à un ouvert de W. Une variété intègre V est dite *F-rationnelle* si elle est F-birationnellement équivalente à un espace projectif. Une variété géométriquement intègre V est dite *géométriquement rationnelle* si $\overline{V}$ est $\overline{F}$-rationnelle.

Une bonne variété V sur un corps F est dite *F-rationnellement connexe* s'il existe une variété M, un ouvert non vide U du produit $\mathbf{P}^1 \times M$ et un morphisme $e : U \to V$ de sorte que l'application induite $U \times_M U \to V \times_F V$ soit dominante. On dit que V est *géométriquement rationnellement connexe* si $\overline{V}$ est $\overline{F}$-rationnellement connexe ; autrement dit, il existe une famille de courbes rationnelles sur $\overline{V}$ de sorte que deux points généraux de $V(\overline{F})$ puissent être reliés par une courbe de cette famille.

Si V est une variété irréductible et $\mathscr{V}$ un modèle de V sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K)$, c'est-à-dire que $\mathscr{V}_K$ est isomorphe à V, alors pour toute place non archimédienne v de K, on a une application naturelle $j_v : \mathscr{V}(\mathscr{O}_v) \to V(K_v)$. L'espace des adèles associé à V est défini comme l'ensemble des $(x_v)_{v\in M_K}$ du produit $\prod_{v\in M_K} V(K_v)$ tels que x_v appartienne à l'image de j_v pour tout v en dehors d'une partie finie de M_K. Cet espace topologique est indépendant du modèle choisi et si V est projective, il coïncide avec le produit.

1.2. Passage du local au global. — Si V est une variété sur le corps de nombres K, on a une implication évidente :

$$V(K) \neq \varnothing \implies \forall v \in M_K, \quad V(K_v) \neq \varnothing. \tag{1}$$

L'intérêt de ce critère provient du fait qu'il est algorithmiquement possible de déterminer si la condition

$$\forall v \in M_K, \quad V(K_v) \neq \varnothing$$

est vérifiée ou pas. En effet, si K_v est isomorphe au corps des réels, la vacuité de $V(K_v)$ est une question décidable grâce aux travaux de Tarski et Seidenberg (cf. [**Ta**] et [**Sei**]) ; le lemme de Hensel et ses généralisations montrent que pour toute place non archimédienne v de K correspondant à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{O}_K$, déterminer si $V(K_v)$ est non vide se réduit à étudier des solutions d'équations polynomiales sur $\mathscr{O}_K/\mathfrak{p}^n$ pour un n convenable et, par conséquent, est décidable. Enfin les estimations de Lang-Weil [**LW**] permettent de montrer que si V n'est pas vide, alors $V(K_v) \neq \varnothing$ pour toute place v en dehors d'une partie finie de M_K que l'on peut déterminer explicitement.

Hasse fut le premier à étudier de façon systématique la réciproque de l'implication (1). Il énonça en particulier le résultat suivant :

Théorème 1.2 **(Hasse [Has], Minkowski [Mi]).** — *Une forme quadratique $\sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ à coefficients dans $\mathbf{Q}$ admet un zéro non trivial dans $\mathbf{Q}^n$ si et seulement si elle en a sur tout complété de $\mathbf{Q}$.*

Le cas $n = 2$ est élémentaire, le cas $n = 3$ remonte à Legendre. La difficulté de la démonstration réside dans le passage de trois à quatre variables qui utilise le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet et la formule de réciprocité de Gauss. Nous suggérons à l'auditeur de cet exposé qui n'aurait jamais lu la démonstration de ce théorème de se reporter à l'article de Hasse [**Has**] ou au cours d'arithmétique de Serre [**Se2**]. Ce résultat se généralise à tout corps de nombres.

Une autre famille d'équations considérée par Hasse est celle associée aux normes d'extensions galoisiennes cycliques de corps.

Théorème 1.3 **(Hasse [Hasse]).** — *Soit L/K une extension galoisienne cyclique de corps de nombres. Notons $N_{L/K} : L^\times \to K^\times$ le morphisme de norme. Un élément a de $K^\times$ appartient à son image si et seulement si, pour toute place v de K et toute extension w de v à L, a appartient à l'image de la norme N_{L_w/K_v}.*

Dans ce cas, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base du K-espace vectoriel L, la variété considérée est la variété affine définie par l'équation

$$N_{L/K}\left(\sum_{i=1}^n X_i e_i\right) = a.$$

1.3. Le principe de Hasse et l'approximation faible. — Pour une variété V arbitraire sur un corps de nombres K, il est aisé de donner des contre-exemples à la réciproque de (1). Considérons par exemple le polynôme

$$P(X) = (X^2 - 3)(X^2 + 3)(X^2 + 1)(X^2 + 23).$$

Pour tout nombre premier p impair, le groupe $\mathbf{F}_p^\times/\mathbf{F}_p^{\times 2}$ est cyclique d'ordre 2. Par conséquent si $p \geqslant 5$, au moins un des entiers -1, 3 ou -3 est un carré modulo

p et donc dans $\mathbf{Q}_p$. D'autre part -23 est un carré dans $\mathbf{Q}_2$ et $\mathbf{Q}_3$. Enfin 3 est un carré sur $\mathbf{R}$. Le polynôme P a donc une racine dans chacun des complétés de $\mathbf{Q}$. Toutefois, il n'a pas de racine sur $\mathbf{Q}$.

Plus généralement, si $(V_i)_{i\in I}$ est une famille finie de sous-variétés d'une variété V sur le corps de nombres K telle que

$$\forall v \in M_K, \quad \exists i \in I, \quad V_i(K_v) \neq \varnothing$$

et

$$\forall i \in I, \quad \exists v \in M_K, \quad V_i(K_v) = \varnothing,$$

alors $\bigcup_{i\in I} V_i$ est un contre-exemple à la réciproque de (1).

D'autre part, si on considère la surface affine S d'équation

$$Y^2 + Z^2 = -(X^2-3)^2(X^2+3)(X^2+1)(X^2+23),$$

cette surface est irréductible, les remarques faites sur les racines de P montrent qu'elle admet un point sur chaque complété de $\mathbf{Q}$, mais ses seuls points réels sont $(\sqrt{3}, 0, 0)$ et $(-\sqrt{3}, 0, 0)$ qui ne sont pas définis sur $\mathbf{Q}$. On obtient à nouveau un contre-exemple à la réciproque de (1). Là encore, cet exemple se généralise aisément en considérant des variétés dont les seuls points sur un des complétés sont des points singuliers.

Par contre, si V est une variété géométriquement irréductible, v une place de K et x_0 un point lisse de $V(K_v)$, le théorème des fonctions implicites [**Bki**, VAR, §1, n°5] assure qu'il existe un homéomorphisme d'un voisinage ouvert de x_0 pour la topologie v-adique sur un ouvert de $K_v^{\dim(V)}$. En particulier, $V(K_v)$ est dense dans V_{K_v} pour la topologie de Zariski. Les arguments qui précèdent ne permettent donc plus de montrer la vacuité de $V(K)$.

Ces considérations amènent aux définitions qui suivent :

Définition 1.4. — On dira par la suite qu'une bonne variété V sur le corps de nombres K vérifie *le principe de Hasse* si et seulement si elle vérifie l'implication suivante

$$(\forall v \in M_K, \quad V(K_v) \neq \varnothing) \quad \Longrightarrow \quad V(K) \neq \varnothing.$$

On dira qu'une bonne variété V sur le corps de nombres K vérifie *l'approximation faible* si et seulement si l'ensemble des points rationnels $V(K)$ est dense dans l'espace topologique produit $\prod_{v\in M_K} V(K_v)$.

Remarques 1.5. — (i) Si le produit $\prod_{v\in M_K} V(K_v)$ n'est pas vide, la variété V vérifie l'approximation faible si et seulement si $V(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} V(K_v)$ pour toute partie finie S de M_K.

(ii) Notons qu'avec ces définitions, toute variété qui vérifie l'approximation faible vérifie également le principe de Hasse.

Ces deux propriétés sont des invariants birationnels des bonnes variétés :

Proposition 1.6. — *Soient V et V' deux bonnes variétés sur le corps de nombres K qui sont K-birationnellement équivalentes. Alors V vérifie le principe de Hasse* (*resp. l'approximation faible*() *si et seulement s'il en est de même pour V'.*

Cette proposition découle du lemme de Nishimura [**Ni**], qui assure que l'existence d'un point rationnel est un invariant birationnel des bonnes variétés, et du théorème des fonctions implicites.

1.4. Classes de variétés vérifiant le principe de Hasse et l'approximation faible. — L'approximation faible et, par conséquent, le principe de Hasse ont été démontrés pour plusieurs familles de variétés. Nous en donnerons ici deux exemples qui nous semblent particulièrement marquants :

Théorème 1.7. — *Si V est une variété de drapeaux généralisée sur K, c'est-à-dire une variété projective homogène sous l'action d'un groupe algébrique linéaire connexe, alors V vérifie l'approximation faible et le principe de Hasse.*

Ce résultat englobe le résultat de Legendre, Hasse et Minkowski sur les quadriques et celui de Châtelet sur les variétés de Severi-Brauer, c'est-à-dire les K-formes des espaces projectifs. Eichler [**Ei**], Landherr [**Lan**], Kneser [**Kn**], Harder [**Harder1**] [**Harder2**], Chernousov [**Che**] ont montré le principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous un groupe algébrique semi-simple simplement connexe. Platonov et Rapinchuk ont prouvé l'approximation faible pour ces groupes [**PR**, theorem 7.8]. Les travaux de Harder [**Harder3**, Satz 4.3.3] et Borovoi [**Bo1**] permettent d'en déduire le théorème qui précède.

Le second résultat que je souhaite mentionner est une conséquence de la méthode du cercle et s'applique aux intersections complètes lisses dans l'espace projectif lorsque la dimension est grande relativement aux degrés des équations.

Théorème 1.8 **(Hardy, Littlewood, Davenport, Birch [Bir])**

Si $V \subset \mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$ est une intersection complète non singulière définie par des équations $f_1, \dots, f_m$ de même degré d avec

$$N > 2^{d-1} m(m+1)(d-1),$$

alors V vérifie l'approximation faible et le principe de Hasse.

Pour les cubiques, ce résultat vaut en fait dès que $N \geqslant 8$ (Heath-Brown [**HB**] et Hooley [**Ho1**], [**Ho2**], cf. l'exposé de Deshouillers [**De**]).

La méthode du cercle s'applique aussi à des équations de degrés différents (cf. les travaux de Schmidt [**Sch**]) et fournit également des résultats sur un corps de nombres (Skinner [**Skinner**]).

2. L'obstruction de Brauer-Manin

2.1. Un premier contre-exemple au principe de Hasse. — Hasse lui-même savait que le théorème 1.3 qu'il avait démontré pour les extensions de corps cycliques L/K ne se généralisait pas : il connaissait des exemples d'extension galoisienne L/K de groupe de Galois $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ telle que l'équation

$$N_{L/K}(x) = a$$

avec a un élément de K a une solution sur tous les complétés de K mais n'en possède pas sur K.

Le principe de Hasse n'est donc pas toujours vérifié. Je voudrais en donner maintenant un exemple dû à Iskovskih [**?**] qui fut revisité par Colliot-Thélène, Coray et Sansuc [**CTCS**]. On considère la surface S fibrée en coniques définie sur $\mathbf{Q}$ par l'équation

$$Y^2 + Z^2 = (3 - X^2)(X^2 - 2). \tag{2}$$

Rappelons (cf. [**Se2**, chap. III]) que si v est une place de $\mathbf{Q}$ et si a, b sont deux éléments inversibles de $\mathbf{Q}_v$, le symbole de Hilbert $(a, b)_v$ est défini par

$$(a,b)_v = \begin{cases} 1 & \text{si } Z^2 - aX^2 - bY^2 = 0 \text{ a une solution non nulle dans } \mathbf{Q}_v^3, \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

que ce symbole est bilinéaire et qu'il vérifie la formule du produit :

$$\forall a, b \in \mathbf{Q}^\times, \qquad \prod_{v \in M_{\mathbf{Q}}} (a,b)_v = 1$$

qui découle de la formule de réciprocité quadratique de Gauss. En outre, on dispose des formules explicites suivantes :

- si p est un nombre premier impair et $a \in \mathbf{Q}_p^\times$,

$$(-1, a)_p = (-1)^{v_p(a)\varepsilon(p)}$$

où $\varepsilon(p)$ est la classe de $(p-1)/2$ modulo 2,

- si $a = 2^k u$ avec $u \in \mathbf{Z}_2^\times$, on a

$$(-1, a)_2 = (-1)^{\varepsilon(u)}$$

- et si $a \in \mathbf{R}^\times$,

$$(-1, a) = \frac{a}{|a|}.$$

Si v est une place de $\mathbf{Q}$ et x un élément de $\mathbf{Q}_v$ tel que $(3-x^2)(x^2-2)$ soit inversible, alors la conique définie par $Y^2 + Z^2 = (3-x^2)(x^2-2)$ admet un point défini sur $\mathbf{Q}_v$ si et seulement si

$$(-1, 3-x^2)_v = (-1, x^2-2)_v. \tag{3}$$

Des expressions qui précèdent on déduit que cette condition est vérifiée pour tout x de $\mathbf{Q}_p$ tel que $(3-x^2)(x^2-2)$ soit inversible si $4 \mid p-1$. Si $4 \mid p-3$, cette égalité vaut dès que $v_p(x) < 0$. Pour $p = 2$, elle est vérifiée pour $x = 0$ et sur $\mathbf{R}$ on l'obtient pour $x \in]-\sqrt{3}, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, \sqrt{3}[$. Il en résulte que la surface définie par (2) admet un point lisse sur tout complété de $\mathbf{Q}$. Supposons que $(x, y, z) \in \mathbf{Q}^3$ soit solution de (2). Notons tout d'abord que $(3-x^2)(x^2-2) \neq 0$. D'autre part, les formules qui précèdent donnent que

- si p est un nombre premier tel que $4 \mid p-1$, alors $(-1, 3-x^2) = 1$,
- si p est un nombre premier congru à 3 modulo 4, alors soit $v_p(x) < 0$ auquel cas on obtient $(-1, 3-x^2) = 1$; soit $v_p(x) \geqslant 0$, mais la relation $x^2-2 = 1-(3-x^2)$ fournit $v_p(x^2-2) = 0$ ou $v_p(3-x^2) = 0$ et en utilisant la relation (3), on en déduit que $(-1, 3-x^2) = 1$.
- Pour $p = 2$, si $v_2(x) > 0$, alors $3-x^2 \equiv 3 \mod 4$ et donc $(-1, 3-x^2) = -1$; de même si $v_2(x) < 0$, alors $3/x^2 - 1 \equiv 3 \mod 4$ et donc $(-1, 3-x^2)_2 = -1$. Enfin si $v_2(x) = 0$, alors $x^2 \equiv 1 \mod 8$ d'où $(3-x^2)/2 \equiv 1 \mod 4$ et $x^2 - 2 \equiv 3 \mod 4$, ce qui contredit la relation (3).
- Pour la place archimédienne, la relation $(-1, 3-x^2)_\infty = (-1, x^2-2)_\infty$ entraîne $x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ et donc $(-1, 3-x^2)_\infty = 1$.

En définitive, on a obtenu

$$(-1, 3-x^2)_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v \neq 2, \\ -1 & \text{si } v = 2. \end{cases}$$

Mais ceci implique la relation

$$\prod_{v \in M_{\mathbf{Q}}} (-1, 3-x^2)_v = -1,$$

ce qui contredit la formule du produit. L'équation (2) n'a donc pas de solution sur $\mathbf{Q}$.

Un modèle projectif et lisse $\widetilde{S}$ de S est obtenu en recollant les deux sous-variétés lisses de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ d'équations respectives

$$Y^2 + Z^2 = (3 - X^2)(X^2 - 2)T^2$$

et

$$Y^2 + Z^2 = (3X^2 - 1)(1 - 2X^2)T^2.$$

Cette dernière n'ayant pas de point rationnel pour $X = 0$, on obtient que $\widetilde{S}$ ne vérifie pas le principe de Hasse.

Le critère de Brauer-Manin est une généralisation de cet exemple, la formule de réciprocité de la théorie du corps de classes prenant le rôle de la formule du produit pour les symboles de Hilbert.

2.2. Rappels sur le groupe de Brauer cohomologique des variétés. — Avant de passer au critère lui-même, nous rappelons ici quelques propriétés du groupe de Brauer cohomologique qui nous seront utiles par la suite (cf. [**Ma3**, chap. VI]).

Notations 2.1. **—** Si V est une variété lisse et géométriquement intègre sur un corps F, on note $\mathrm{Pic}(V)$ le groupe de Picard de V et $\mathrm{Br}(V)$ le groupe de Brauer cohomologique de V, c'est-à-dire le groupe

$$\mathrm{Br}(V) = H^2_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m),$$

où $\mathbf{G}_m$ désigne le faisceau associé au groupe multiplicatif, qui à une variété U associe $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)^\times$. Si V est le spectre d'un corps F, son groupe de Brauer peut être décrit comme un groupe de cohomologie galoisienne

$$\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(F)) = H^2(\mathrm{Gal}(F^s/F), F^{s\times}),$$

où $\mathrm{Gal}(F^s/F)$ désigne le groupe de Galois de l'extension F^s/F. Dans ce cas, ce groupe coïncide avec le groupe des classes d'équivalence d'algèbres simples centrales sur F pour la relation d'équivalence $\sim$ définie par $A \sim B$ si et seulement s'il existe deux entiers strictement positifs m, n et un isomorphisme d'algèbres $M_m(A) \xrightarrow{\sim} M_n(B)$, la loi de groupe étant induite par le produit tensoriel des algèbres simples centrales sur F (cf. [**Se1**, X, §5]). Si v est une valuation discrète de rang un sur F, de corps résiduel parfait $\kappa(v)$, on dispose d'un morphisme résidu

$$\partial_v : \mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}\Big(\mathrm{Gal}\big(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)\big), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\Big).$$

Si F est un corps local non archimédien ce morphisme induit un isomorphisme

$$\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

(cf [**Se1**, XII §3]). D'autre part, le groupe $\mathrm{Br}(\mathbf{R})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, engendré par la classe de l'algèbre de quaternions. Pour toute place v du corps de nombres K, on dispose donc d'un morphisme injectif canonique

$$\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(K_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

La théorie du corps de classes global (cf. [**NSW**, theorem 8.1.17]) fournit alors une suite exacte naturelle :

$$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in M_K} \mathrm{Br}(K_v) \xrightarrow{\sum_{v \in M_K} \mathrm{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0. \tag{4}$$

Notons au passage que l'injectivité du morphisme de gauche peut se réinterpréter comme le principe de Hasse pour les variétés de Severi-Brauer ; d'autre part la formule de réciprocité du corps de classes, c'est-à-dire le fait que cette suite forme un complexe, implique la formule du produit pour les symboles de Hilbert.

Décrivons deux méthodes pour construire des éléments dans le groupe de Brauer d'une variété.

Si V est une variété intègre sur un corps F, de corps de fonctions $F(V)$, la contravariance du groupe de Brauer fournit un morphisme

$$\mathrm{Br}(V) \to \mathrm{Br}(F(V)).$$

Si V est une bonne variété sur un corps F de caractéristique 0, il découle des théorèmes de pureté de Grothendieck [**Gr**, §6.7] que ce morphisme induit un isomorphisme de $\mathrm{Br}(V)$ sur

$$\bigcap_{v \in \mathscr{P}(F(V)/F)} \ker(\partial_v)$$

où $\mathscr{P}(F(V)/F)$ désigne l'ensemble des valuations discrètes de rang un sur $F(V)$ dont la restriction à F est triviale. On retrouve en particulier que le groupe de Brauer est un invariant birationnel des bonnes variétés (cf. [**Gr**, corollaire 7.5]).

Si V est une bonne variété sur un corps F de caractéristique nulle, la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie étale à coefficients dans $\mathbf{G}_m$ donne une suite exacte

$$\begin{aligned} (5) \quad 0 \to \mathrm{Pic}(V) \to \mathrm{Pic}(\overline{V})^{\mathscr{G}} \to \mathrm{Br}(F) \to \\ \to \ker(\mathrm{Br}(V) \to \mathrm{Br}(\overline{V})) \to H^1(F, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \to H^3(F, \mathbf{G}_m), \end{aligned}$$

où $\mathscr{G}$ désigne le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Si V est une bonne variété sur le corps de nombres K, alors $H^3(K, \mathbf{G}_m)$ est nul et on en déduit une suite exacte

$$\mathrm{Br}(K) \to \ker(\mathrm{Br}(V) \to \mathrm{Br}(\overline{V})) \to H^1(K, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \to 0.$$

Notations 2.2. — Si V est une bonne variété sur un corps F de caractéristique nulle, on note

$$\mathrm{Br}_1(V) = \ker(\mathrm{Br}(V) \to \mathrm{Br}(\overline{V}))$$

et

$$\mathrm{Br}_0(V) = \mathrm{Im}(\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(V)).$$

Par abus de langage, un élément de $\mathrm{Br}(V) - \mathrm{Br}_1(V)$ est dit transcendant.

Remarque 2.3. — Notons que si V est géométriquement rationnelle, alors $\mathrm{Br}(\overline{V})$ est nul puisque c'est un invariant birationnel et le groupe $\mathrm{Br}(V)$ coïncide avec $\mathrm{Br}_1(V)$. En outre, le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est alors un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini (cf. [**CTS5**, corollaire 2.A.2]) et le groupe $H^1(F, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$ est fini. Par conséquent, le groupe $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ est fini dans ce cas.

2.3. Le critère de Brauer-Manin. —

Notations 2.4. — Soit V une bonne variété sur le corps de nombres K. Pour toute place v de K et tout point x de $V(K_v)$, la contravariance du groupe de Brauer fournit un morphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Br}(V) & \to & \mathrm{Br}(K_v) \\ A & \mapsto & A(x_v). \end{array}$$

On obtient ainsi un accouplement

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Br}(V) \times V(K_v) & \to & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (A, x) & \mapsto & \langle A, x \rangle_v = \mathrm{inv}_v(A(x_v)). \end{array}$$

On peut montrer (cf [**San**, lemme 6.2]) que pour tout A de $\mathrm{Br}(V)$, l'application induite de $V(K_v)$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est localement constante. Pour une place réelle, cette application est donc constante sur les composantes connexes. En outre, cette application est triviale pour presque toute place v de K. On obtient donc un accouplement

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\boldsymbol{A}_K} : \mathrm{Br}(V) \times V(\boldsymbol{A}_K) & \to & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (A, (x_v)_{v \in M_K}) & \mapsto & \sum_{v \in M_K} \langle A, x_v \rangle_v \end{array}$$

tel que, pour tout A de $\mathrm{Br}(V)$, l'application induite de $V(\boldsymbol{A}_K)$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est localement constante.

L'idée cruciale du critère de Manin est alors la suivante : si x est un point rationnel de V sur K et A un élément de $\mathrm{Br}(V)$, alors

$$\langle A, x\rangle_{\boldsymbol{A}_K} = \sum_{v\in M_K} \langle A, x\rangle_v = \sum_{v\in M_K} \mathrm{inv}_v(A(x)) = 0$$

où la dernière égalité résulte du fait que la suite (4) est un complexe. On en déduit donc que, pour tout point x de l'adhérence de $V(K)$ dans $V(\boldsymbol{A}_K)$ et pour tout élément A de $\mathrm{Br}(V)$, on a

$$\langle A, x\rangle_{\boldsymbol{A}_K} = 0.$$

Ceci nous amène aux définitions suivantes :

Définition 2.5. — Soit V une bonne variété sur le corps de nombres K. Pour tout élément x de $V(\boldsymbol{A}_K)$, le morphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Br}(V) & \rightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ A & \mapsto & \langle A, x\rangle_{\boldsymbol{A}_K} \end{array}$$

s'annule sur l'image de $\mathrm{Br}(K)$ et définit par passage au quotient un morphisme ω_x de $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. On appellera obstruction de Brauer-Manin en x le morphisme ω_x et espace de Brauer-Manin l'ensemble

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \{\, x \in V(\boldsymbol{A}_K) \mid \omega_x = 0 \,\}.$$

Les remarques qui précèdent montre que, pour tout point adélique x, l'obstruction de Brauer-Manin en x est une obstruction à ce que x appartienne à l'adhérence des points rationnels. Autrement dit, on a la proposition suivante :

Proposition 2.6. — *Avec les notations qui précèdent, l'adhérence $\overline{V(K)}$ des points rationnels dans l'espace adélique est contenue dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.*

Remarque 2.7. — (i) Si A est un élément de $\mathrm{Br}(V)$, l'ensemble

$$\{\, x \in V(\boldsymbol{A}_K) \mid \langle x, A\rangle_{\boldsymbol{A}_K} = 0 \,\}$$

est à la fois ouvert et fermé dans $V(\boldsymbol{A}_K)$. Par conséquent, si $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ est fini, il en est de même de l'ensemble de $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$. Par la remarque 2.3, c'est le cas si V est géométriquement rationnelle.

(ii) On ne dispose pas de méthode algorithmique pour décider de la vacuité de $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ en général : pour une courbe de genre 1, cela revient en fait à calculer explicitement le groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne. Par contre, si V est géométriquement rationnelle (ou plus généralement géométriquement rationnellement connexe), alors le groupe quotient $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ est fini et des méthodes sont disponibles pour calculer explicitement $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.

Exemple 2.8. — Dans l'exemple du paragraphe 2.1, soit $\widetilde{S}$ un modèle projectif et lisse de $\mathbf{Q}(S)$ sur $\mathbf{Q}$, soit A l'algèbre de quaternions $\left(\frac{-1,\,3-x^2}{\mathbf{Q}(S)}\right)$ qui est l'algèbre associative unifère engendrée par deux éléments I et J avec les relations $I^2 = -1$, $J^2 = 3-x^2$ et $IJ = -JI$. La classe de cette algèbre provient de $\mathrm{Br}(\widetilde{S})$ et le raisonnement fait montre que

$$\{\, x \in \widetilde{S}(\boldsymbol{A}_K) \mid \langle [A], x\rangle_{\boldsymbol{A}_K} = 0 \,\}$$

est vide. Donc $\widetilde{S}(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$ et $\widetilde{S}(K) = \varnothing$.

Remarque 2.9. — La plupart des contre-exemples au principe de Hasse utilisent le quotient $\mathrm{Br}_1(V)/\mathrm{Br}_0(V)$. Toutefois quelques auteurs ont également fourni des exemples provenant de la partie transcendante du groupe de Brauer (Harari [**Ha2**] et Wittenberg [**Wi**]).

Abus de langage 2.10. — Suivant la terminologie couramment utilisée, nous dirons par abus de langage que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule pour une bonne variété V si on a l'implication

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow V(K) \neq \varnothing.$$

On dit également que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour V si et seulement si les points rationnels de V sont denses dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.

Enfin si $\mathscr{C}$ est une classe de bonnes variétés, on dit que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour $\mathscr{C}$ si et seulement si c'est la seule pour toute variété V de $\mathscr{C}$.

Remarque 2.11. — La validité de l'implication

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow V(K) \neq \varnothing$$

ou la densité de $V(K)$ dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ est un invariant birationnel des bonnes variétés. On peut donc étendre la terminologie précédente aux variétés géométriquement irréductibles sur le corps de nombres K en disant que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour une variété géométriquement irréductible X si et seulement si c'est la seule pour un modèle projectif et lisse de $K(X)$.

3. L'obstruction de Brauer-Manin est la seule

Dans ce paragraphe, nous souhaitons décrire deux méthodes particulièrement efficaces pour montrer la densité des points rationnels dans l'espace de Brauer-Manin. Nous terminerons par une liste de cas pour lesquels cette densité a été démontrée.

3.1. Techniques de descente. — Inspirée du travail de Châtelet [**Ch**] et de la méthode de descente classique pour les courbes de genre 1, la méthode de descente a été développée par Colliot-Thélène et Sansuc avec l'introduction de la notion de torseur universel d'une variété géométriquement rationnelle.

Si F est un corps algébriquement clos et V une bonne variété sur F dont le groupe de Picard est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini, alors un torseur universel sur V peut être construit de la façon suivante : soient $L_1, \dots, L_t$ des fibrés en droites sur V dont les classes forment une base du groupe de Picard de V. Pour $i \in \{1, \dots, t\}$, notons $L_i^\times$ le complémentaire de la section nulle dans L_i et posons

$$\mathscr{T} = L_1^\times \times_V \cdots \times_V L_t^\times.$$

Le groupe algébrique $\mathbf{G}_m^t$ agit sur $\mathscr{T}$ et l'application naturelle $\pi : \mathscr{T} \to V$ fait de V un quotient de $\mathscr{T}$ sous l'action de ce groupe. En outre, à isomorphisme près, les structures obtenues ne dépendent pas des choix effectués.

Dans le cas général, nous allons définir les torseurs universels comme solution à un problème universel.

***Définitions 3.1.* —** On dit qu'un groupe algébrique G sur un corps F est *de type multiplicatif* si et seulement s'il existe un entier n tel que $\overline{G}$ soit isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathbf{G}^n_{m,\overline{F}}$. Notons $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(F^s/F)$ le groupe de Galois absolu de F. On a une équivalence de catégorie contravariante entre la catégorie des groupes de type multiplicatif et la catégorie des $\mathbf{Z}$-modules de type fini munis d'une action continue de $\mathscr{G}$, c'est-à-dire se factorisant via un quotient fini de $\mathscr{G}$. Cette équivalence associe à un groupe G le groupe des caractères de G

$$X^*(G) = \mathrm{Hom}_{F^s}(G^s, \mathbf{G}_{m,F^s}).$$

Si G est un groupe algébrique sur un corps F et X une variété sur F, on appelle *torseur sur X sous G* ou *espace principal homogène sur X sous G* la donnée d'une variété $\mathscr{T}$ sur F munie d'un morphisme $\pi : \mathscr{T} \to X$ fidèlement plat et d'une action de G au-dessus de X de sorte que, localement pour la topologie plate, $\mathscr{T}$ soit isomorphe au produit $G \times X$. Autrement dit, si $m : G \times \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ définit l'action de G, on a l'égalité $\pi \circ m = \pi \circ \mathrm{pr}_2$ et l'application

$$\rho : G \times_F \mathscr{T} \to \mathscr{T} \times_X \mathscr{T}$$

définie comme la composée des applications

$$G \times_F \mathscr{T} \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \delta} G \times_F \mathscr{T} \times_X \mathscr{T} \xrightarrow{m \times \mathrm{Id}} \mathscr{T} \times_X \mathscr{T}$$

où δ désigne la diagonale, est un isomorphisme.

Si X est une variété lisse et géométriquement intègre sur F telle que $\Gamma(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}})^\times = \overline{F}^\times$ et si x est un point rationnel de X, *un torseur universel* au-dessus de (X, x) est une paire $(\mathscr{T}, t)$ où $\mathscr{T}$ est un torseur sur X sous un groupe de type multiplicatif T et t un point rationnel de $\mathscr{T}$ au-dessus de x vérifiant en outre la propriété universelle suivante : pour toute paire $(\mathscr{T}', t')$ où $\mathscr{T}'$ est un torseur sur X sous un groupe de type multiplicatif T' et t' un point rationnel de $\mathscr{T}'$ au-dessus de x, il existe un unique morphisme de groupes $\phi : T \to T'$ et un unique morphisme $\psi : \mathscr{T} \to \mathscr{T}'$ au-dessus de X, compatible avec l'action de T sur $\mathscr{T}$ et de T' sur $\mathscr{T}'$ et tel que $\psi(t) = t'$.

Exemple 3.2. — Si G est un groupe semi-simple, et $\widetilde{G}$ le revêtement universel de G, alors $(\widetilde{G}, e)$ est un torseur universel au-dessus de (G, e) (cf [**Sk4**, §3.2]).

Expliquons maintenant comment obtenir de tels torseurs. Supposons que X soit une bonne variété sur F ; alors, pour tout groupe de type multiplicatif T de groupe de caractères $X^*(T)$, les classes d'isomorphismes de torseurs sur X sous T sont en bijection avec $H^1_{\mathrm{pl}}(X, T)$. Colliot-Thélène et Sansuc construisent alors une suite exacte canonique [**CTS5**, (2.0.2)]

$$0 \to H^1(F, T) \to H^1_{\mathrm{pl}}(X, T) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(X^*(T), \mathrm{Pic}(\overline{X})) \xrightarrow{\delta} H^2(F, T).$$

Définitions 3.3. — Soit X une bonne variété sur un corps F de caractéristique 0. Si le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ de X est un $\mathbf{Z}$-module de type fini, alors on note T_{NS} le groupe de type multiplicatif qui lui est associé par l'équivalence de catégorie ci-dessus. Un *torseur versel* est un torseur $\mathscr{T}$ sur X sous T_{NS} dont la classe $[\mathscr{T}]$ dans $H^1_{\mathrm{pl}}(X, T_{\mathrm{NS}})$ vérifie $\rho([\mathscr{T}]) = \mathrm{Id}$.

Remarque 3.4. — Sous les hypothèses précédentes, un torseur versel muni d'un point rationnel t au-dessus de x est un torseur universel au-dessus de (X, x). Nous avons choisi ici de distinguer la notion de torseur universel, solution du problème universel, de celle de torseur versel, ce qui nous amène à diverger de la terminologie usuelle introduite par Colliot-Thélène et Sansuc pour lesquels tout torseur versel est dit universel.

Colliot-Thélène et Sansuc montrent que, sous les hypothèses qui précèdent, pour tout point rationnel x de X, il existe, à unique isomorphisme près, un unique torseur universel $(\mathcal{T}, t)$ au-dessus de (X, x). De plus si F est un corps de type fini sur son sous-corps premier, alors les classes d'isomorphismes de torseurs versels ayant un point rationnel sont en nombre fini [**CTS4**, proposition 2]. En notant $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de représentants de ces classes d'isomorphisme, on obtient une partition canonique finie de l'ensemble des points rationnels de X :

$$X(F) = \coprod_{i\in I} \pi_i(\mathcal{T}_i(F)),$$

$\pi_i : \mathcal{T}_i \to X$ désignant le morphisme associé au torseur $\mathcal{T}_i$.

L'intérêt des torseurs versels est souligné par les deux résultats suivants :

Théorème 3.5 **(Colliot-Thélène, Sansuc** [**CTS5**, théorème 2.1.2])

Soit V une bonne variété géométriquement rationnelle sur le corps de nombres K. Soit $\mathcal{T}$ un torseur versel au-dessus de X et $\mathcal{T}^c$ une compactification projective et lisse de $\mathcal{T}$, alors

$$\mathrm{Br}(\mathcal{T}^c)/\mathrm{Br}_0(\mathcal{T}^c) = \{0\}.$$

En particulier

$$\mathcal{T}^c(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \mathcal{T}^c(\boldsymbol{A}_K).$$

Théorème 3.6 **(Colliot-Thélène, Sansuc** [**CTS5**, corollaire 3.7.2])

Soit V une bonne variété géométriquement rationnelle sur le corps de nombres K. L'espace de Brauer-Manin $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ est la réunion des images de $\prod_{v\in M_K} \mathcal{T}(K_v)$, où $\mathcal{T}$ décrit un système de représentants des torseurs versels au-dessus de V.

Remarque 3.7. — Cet énoncé montre d'une part que l'implication

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad V(K) \neq \varnothing$$

est vraie si les torseurs versels $\mathcal{T}$ sur V vérifient l'implication

$$\prod_{v\in M_K} \mathcal{T}(K_v) \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(K) \neq \varnothing$$

et d'autre part que les points rationnels de V sont denses dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ si les compactifications projectives et lisses des torseurs versels au-dessus de V vérifient l'approximation faible.

Donnons quelques exemples où cette méthode a été utilisée :

Exemple 3.8. — Une surface de Châtelet S sur K est un modèle projectif et lisse d'une surface définie par une équation de la forme

$$Y^2 - aZ^2 = P(X),$$

où P est un polynôme séparable de degré 3 ou 4. L'exemple d'Iskovskih décrit au paragraphe 2.1 est une surface de ce type. Pour ces surfaces, Colliot-Thélène et Sansuc ont démontré dans [**CTS4**, §IV] que les torseurs versels au-dessus de S sont K-birationnellement équivalents au produit d'une conique et d'une variété X intersection complète de deux quadriques dans $\mathbf{P}^7$. En outre, X contient deux droites gauches conjuguées. Le principe de Hasse et l'approximation faible ayant été démontrés pour ces variétés via la méthode de fibration décrite plus loin, on obtient que les points rationnels de S sont denses dans $S(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ (Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer [**CTSSD1**] et [**CTSSD2**], cf. également [**CT1**]).

Exemple 3.9. — Soit F un corps de groupe de Galois absolu $\mathscr{G}$. Un tore algébrique sur F est un groupe algébrique T sur F tel que $\overline{T}$ soit isomorphe à un groupe de la forme $\mathbf{G}^n_{m,\overline{F}}$. L'équivalence de catégorie entre groupes de type multiplicatif et $\mathbf{Z}$-modules de type fini munis d'une action continue de $\mathscr{G}$ envoie les tores algébriques sur les $\mathscr{G}$-réseaux, c'est-à-dire les $\mathbf{Z}$-modules libres de rang fini munis d'une action continue de $\mathscr{G}$. Une variété torique généralisée est une variété irréductible V munie d'une action d'un tore algébrique T avec une orbite ouverte U telle que $\overline{U}$ soit isomorphe à $\overline{T}$.

Les torseurs universels au-dessus d'une variété torique projective et lisse ont d'abord été étudiés par Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS1**, §4], ils ont ensuite été redécouverts par Delzant dans le cadre de la géométrie symplectique [**Del**]. Nous reprenons ici la construction de Cox [**Co**] qui en donne une description particulièrement élégante (cf. Salberger [**Sal2**] et Madore [**Madore**]).

Soit V une variété torique généralisée projective et lisse sur un corps F. Notons $\Sigma(1)$ l'ensemble des orbites de codimension 1 dans $\overline{V}$. On a alors une suite exacte naturelle de $\mathscr{G}$-réseaux

$$0 \to X^*(T) \to \mathbf{Z}^{\Sigma(1)} \to \mathrm{Pic}(\overline{V}) \to 0$$

correspondant à une suite de tores algébriques

$$1 \to T_{\mathrm{NS}} \to T_{\Sigma(1)} \to T \to 1.$$

On considère alors l'espace affine

$$\mathbf{A}_{\Sigma(1)} = \mathrm{Spec}(F^s[X_\sigma, \sigma \in \Sigma(1)]^{\mathscr{G}}).$$

Pour toute partie I de $\Sigma(1)$, on note H_I le sous-espace affine de $\overline{\mathbf{A}}_{\Sigma(1)}$ défini par le système d'équations

$$X_\sigma = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma \in I.$$

Pour tout σ de $\Sigma(1)$, notons $D_\sigma = \overline{\sigma}$ le diviseur correspondant de $\overline{V}$. On note alors $\overline{X}$ le fermé réunion des sous-espaces H_I pour $I \subset \Sigma(1)$ tel que $\bigcap_{\sigma \in I} D_\sigma = \varnothing$. Ce fermé est défini sur F et l'ouvert $\mathscr{T} = \mathbf{A}_{\Sigma(1)} - X$ de l'espace affine $\mathbf{A}_{\Sigma(1)}$ est une variété torique pour le tore $T_{\Sigma(1)}$. Si x est un point rationnel dans l'orbite ouverte U de V, l'application naturelle $T \to V$ qui envoie l'élément neutre 1 de T sur x induit une application $T_{\Sigma(1)} \to V$ qui s'étend en un morphisme $\mathscr{T} \to V$. On vérifie que cela fait de $(\mathscr{T}, 1)$ un torseur universel au-dessus de (V, x). Les torseurs versels au-dessus de V sont isomorphes à $\mathscr{T}$ en tant que variétés. Ils vérifient donc tous l'approximation faible et les points rationnels de V sont denses dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$. Notons que les équations de normes considérées par Hasse sont des exemples de variétés toriques.

3.2. Techniques de fibration. — Cette méthode apparaît déjà dans l'étude faite par Hasse du cas des quadriques : si $n \geqslant 5$, le passage du cas de $n-1$ variables à celui de n variables peut se faire en utilisant des fibrations en quadriques.

Étant donné un morphisme $p : V \to B$, l'objectif est d'étudier si on peut déduire du fait que les obstructions de Brauer-Manin sont les seules pour les fibres de p que cela reste vrai pour V. Cette technique fut notamment explorée par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer dans [**CTSSD1**] et [**CTSSD2**], puis par Harari et Skorobogatov pour des fibrations au-dessus de la droite projective (cf. [**Sk1**], [**Ha1**], [**Ha3**] et [**Sk2**]). Un archétype de ce que donne cette démarche est le résultat suivant :

Théorème 3.10 **(Harari** [**Ha3**, proposition 3.1.1]**). —** *Soit V une bonne variété sur le corps de nombres K et $p : V \to \mathbf{P}^1_K$ un morphisme dominant de fibre générique géométriquement irréductible. Supposons que :*

(i) *les fibres géométriques de p au-dessus de $\mathbf{A}^1_K$ sont irréductibles et de multiplicité 1,*

(ii) *la fibre générique géométrique $V_{\overline{K(T)}}$ de p est rationnellement connexe,*

(iii) *pour presque tout P appartenant à $\mathbf{P}^1(K)$ tel que la fibre V_P soit non singulière, on a*

$$\overline{V_P(K)} = V_P(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}.$$

Alors les points rationnels de V sont denses dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.

La difficulté est d'approximer les points de $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ par des points appartenant à l'espace de Brauer-Manin des fibres de l'application p. Identifions le corps des fonctions de $\mathbf{P}^1_K$ avec $K(T)$ et considérons le groupe

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V)/K(T)) = \bigcap_{v\in\mathscr{P}(K(V)/K(T))} \ker(\partial_v)$$

où ∂_v est le morphisme résidu défini dans le paragraphe 2.2 et $\mathscr{P}(K(V)/K(T))$ désigne l'ensemble des valuations discrètes de rang un sur $K(V)$ qui sont triviales sur $K(T)$. Le groupe

$$\operatorname{coker}\Big(\mathrm{Br}(K(T)) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V)/K(T))\Big)$$

est fini. Il existe donc un ouvert U de V de sorte que ce conoyau soit engendré par des éléments $A_1, \dots, A_r$ dans l'image de l'application $\mathrm{Br}(U) \to \mathrm{Br}(K(V))$. Harari montre alors le lemme suivant :

Lemme formel 3.11 **(Harari [Ha1**, corollaire 2.6.1**], [CT4])**
Soient V une bonne variété sur le corps de nombres K et U un ouvert non vide de V. Soit B un sous-groupe fini de $\mathrm{Br}(U)$. *Soit $(P_v)_{v\in M_K} \in \prod_{v\in M_K} U(K_v)$ tel que pour tout A de $B \cap \mathrm{Br}(V)$, on ait*

$$\langle (P_v)_{v\in M_K}, A\rangle_{\boldsymbol{A}_K} = 0\ ;$$

alors, pour toute partie finie S de M_K, il existe $(M_v)_{v\in M_K}$ appartenant à l'espace des adèles de U tel que $M_v = P_v$ pour $v \in S$ et

$$\forall A \in B, \quad \sum_{v\in M_K} \langle A, M_v\rangle_v = 0.$$

D'autre part, Harari montre qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de $\mathbf{P}^1(K)$ de sorte que pour tout P de H, le groupe $\mathrm{Br}(V_P)/\mathrm{Br}_0(V_P)$ pour la fibre soit engendré par les images des éléments $A_1, \dots, A_r$ de $\mathrm{Br}(K(V))$. La fin de la démonstration utilise un argument d'approximation forte pour les ensembles hilbertiens de la droite affine. Enfin l'énoncé donné ici utilise un résultat de Graber, Harris et Starr [**GHS**] qui montre que la condition de la proposition 3.1.1 de [**Ha3**] portant sur l'existence d'une section de la fibration sur $\overline{K}$ est vérifiée.

3.3. Une liste de résultats. — Nous reprenons ici une liste de cas connus donnée par Colliot-Thélène dans un exposé récent [**CT5**] (cf. également [**Sk4**, §5.2]).

L'ensemble des points rationnels de V est dense dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ si V est une variété d'un des types suivants :

- un modèle projectif et lisse d'un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire connexe si le stabilisateur d'un point géométrique est connexe (Voskresenskiĭ, Sansuc [**San**], Borovoi [**Bo2**]), ou d'un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire connexe et simplement connexe si le stabilisateur d'un point géométrique est abélien (Borovoi [**Bo2**]),
- un modèle projectif et lisse d'une intersection complète géométriquement irréductible et non conique de deux quadriques de $\mathbf{P}^n_K$ si $n \geqslant 8$ (Colliot-Thélène, Sansuc, Swinnerton-Dyer, [**CTSSD1**] et [**CTSSD2**]) ; le groupe de Brauer étant trivial dans ce cas, ces variétés vérifient en fait le principe de Hasse et l'approximation faible,
- une hypersurface cubique dans $\mathbf{P}^n_K$ avec 3 points singuliers définis dans leur ensemble sur K, si $n \geqslant 3$ (Colliot-Thélène, Salberger [**CTSal**]) ; si, en outre, $n \neq 4$, alors l'approximation faible est vérifiée,
- une hypersurface cubique non singulière contenant une droite projective définie sur K dans $\mathbf{P}^n_K$ si $n \geqslant 3$ (Salberger et Skorobogatov [**Sal1**] et [**SaSk**] pour $n = 3$, Harari [**Ha3**, §5.2.2] si $n \geqslant 4$). Pour $n \geqslant 4$, on a également l'approximation faible.

Remarque 3.12. — Parmi les cas pour lesquels la question de la densité de $V(K)$ dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ reste ouverte, on peut mentionner :

- les surfaces cubiques générales ; la question de savoir si l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule pour les surfaces cubiques diagonales a été explorée de manière algorithmique dans [**CTKS**] ;
- l'intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_K$ pour $7 \geqslant n \geqslant 4$, la difficulté étant de montrer que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule dans ce cas.

Remarque 3.13. — Sous l'hypothèse de la finitude du groupe de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques, Swinnerton-Dyer a obtenu les résultats qui suivent (cf. [**SD2**] et [**CT4**, §2 et 3]).

Si V est la surface projective cubique sur $\mathbf{Q}$ définie par l'équation

$$\sum_{i=0}^{3} a_i T_i^3 = 0$$

où les a_i sont des entiers non nuls sans facteur commun, non divisibles par un cube et vérifiant une des conditions suivantes :

(i) il existe un nombre premier $p \neq 3$ divisant a_0 mais aucun des autres coefficients et un nombre premier $q \neq 3$ divisant a_1 mais aucun des autres coefficients,

(ii) il existe un nombre premier $p \neq 3$ divisant a_0 mais aucun des autres coefficients et tel que les classes de a_1, a_2 et a_3 dans $\mathbf{F}_p^\times/\mathbf{F}_p^{\times 3}$ ne soient pas toutes égales,

alors V vérifie le principe de Hasse.

En outre, toujours sous l'hypothèse de la finitude du groupe de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques sur un corps de nombres, il a montré que toute hypersurface cubique diagonale dans $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$ pour $n \geqslant 4$ vérifie le principe de Hasse.

Remarque 3.14. — D'autres résultats ont été obtenus sous l'hypothèse de Schinzel. Cette hypothèse arithmétique forte s'énonce comme suit : soit $(f_i(x))_{1\leqslant i\leqslant m} \in \mathbf{Z}[X]$ une famille de polynômes irréductibles dont les coefficients dominants sont positifs et telle que $\mathrm{pgcd}_{n\in\mathbf{Z}}(\prod_{i=1}^m f_i(n)) = 1$; alors il existe une infinité de n tels que $f_i(n)$ soit premier pour $i = 1, \dots, m$. Le seul cas connu est le théorème de la progression arithmétique avec un polynôme de degré un. Ces résultats conditionnels concernent notamment des fibrations au-dessus de $\mathbf{P}^1_K$.

3.4. Le cas des espaces principaux homogènes sous une variété abélienne. — Jusqu'à maintenant nous sommes essentiellement resté dans le cadre des variétés géométriquement rationnellement connexes. Toutefois, Manin dans son exposé à Nice avait déjà montré que, pour une variété abélienne de groupe de Tate-Shafarevich fini, l'obstruction au principe de Hasse qu'il construisait était la seule. Le cas de l'approximation faible fut traité plus tard par Wang [**Wa**], ce qui donne l'énoncé suivant :

***Théorème 3.15* (Manin, Wang).** — *Soit A une variété abélienne sur le corps de nombres K et soit V un espace principal homogène sous A. Supposons que le groupe* *de Tate-Shafarevich de A*

$$Ш^1(K, A) = \ker\Big(H^1(K, A) \to \prod_{v \in M_K} H^1(K_v, A)\Big)$$

soit fini; *alors*

(i) $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow V(K) \neq \varnothing$.

(ii) *Notons* $M_{\infty,K}$ *l'ensembles des places archimédiennes de* K *Si l'adhérence de* $A(K)$ *dans* $\prod_{v \in M_{\infty,K}}(K_v)$ *est une partie ouverte de ce produit, alors*

$$\overline{V(K)} = V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}.$$

Remarques 3.16. — (i) L'accouplement $\langle A, \cdot \rangle_{A_K}$ étant localement constant, la conclusion de la deuxième assertion ne peut être valide sans l'hypothèse faite.

(ii) La finitude du groupe de Tate-Shafarevich est une conjecture forte mais classique pour les contemplateurs des variétés abéliennes.

4. L'obstruction de Brauer-Manin n'est pas la seule

4.1. Analogues non abéliens du critère de Manin. — La notion de torseur versel donne une description alternative de l'obstruction de Brauer-Manin. Si $\mathscr{T}$ est un torseur sur V sous un groupe de type multiplicatif T, alors pour toute extension L de K et pour tout point x de $V(L)$, l'image inverse de $\mathscr{T}$ par x est un espace principal homogène sur Spec(L) sous T. Notons $\mathscr{T}(x)$ sa classe dans $H^1(L, T)$. On a alors que $\overline{V(K)}$ est contenu dans

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathscr{T}} = \Big\{ (x_v)_{v \in M_K} \in V(\boldsymbol{A}_K) \;\Big|\; (\mathscr{T}(x_v))_{v \in M_K} \in \mathrm{Im}\Big(H^1(K, T) \to \prod_{v \in M_K} H^1(K_v, T)\Big) \Big\}.$$

Harari et Skorobogatov ont montré que cette inclusion subsiste si on remplace T par un groupe algébrique linéaire G arbitraire [**HS**]. Cet argument permet d'expliquer le premier exemple explicite de variété telle que

$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \quad \text{et} \quad V(K) = \varnothing$$

produit par Skorobogatov en 1999 dans [**Sk3**]. Cet exemple est donné par les équations affines

$$(X^2+1)Y^2 = (X^2+2)Z^2 = 3(T^4 - 54T^2 - 117T - 243)\,;$$

un modèle projectif et lisse de cette surface est donné par une surface bielliptique quotient d'un produit $C \times E$ où C et E sont deux courbes de genre 1. Dans le même esprit, Harari dans [**Ha4**] a créé une méthode fournissant des exemples où

$V(K)$ n'est pas dense dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ à partir de variétés dont le groupe fondamental géométrique n'est pas abélien.

Remarque 4.1. — Harari a montré dans [**Ha5**] que si G est un groupe linéaire abélien ou connexe, cette construction ne donne pas plus d'informations que l'obstruction de Brauer-Manin : l'espace obtenu contient $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.

4.2. Lien avec des conjectures de Lang. — Soit $V \subset \mathbf{P}^n_K$ une hypersurface lisse de degré d et de dimension supérieure ou égale à trois. Le théorème de Lefschetz permet de montrer que, sous ces hypothèses, le quotient $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}_0(V)$ est trivial. Si $V(K)$ était dense dans $V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}}$, il le serait dans $V(\boldsymbol{A}_K)$. Pour toute telle hypersurface possédant un point rationnnel, $V(K)$ serait dense pour la topologie de Zariski. Mais si $d > n$, V est de type général et cela contredirait une conjecture de Lang qui prédit que les points rationnels d'une variété de type général ne sont pas denses pour la topologie de Zariski [**La**, §3].

L'implication
$$V(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow V(K) \neq \varnothing$$
est également en contradiction avec des conjectures de Lang, bien que cela soit plus délicat à montrer. En 1995, Sarnak et Wang [**SW**] considèrent l'hypersurface de $\mathbf{P}^5_{\mathbf{Q}}$ définie par l'annulation du polynôme
$$F(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = X_5^{1130} + H(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$$
avec
$$\begin{aligned} H(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{i=0}^{4} X_i^{1130} - 15(X_0X_1^4)^{226} + (X_1X_2^4)^{226} \\ + (X_2X_3^4)^{226} + (X_3X_4^4)^{226} + (X_4X_0^4)^{226} + (X_0^2X_2^3)^{226} \\ + (X_1^2X_3^3)^{226} + (X_2^2X_4^3)^{226} + (X_3^2X_0^3)^{226} + (X_4^2X_1^3)^{226}. \end{aligned}$$
Cette variété est hyperbolique au sens de Brody ou Kobayashi. Des conjectures de Lang prévoient que X ne possède qu'un nombre fini de points. Par conséquent, l'hypersurface X_k de $\mathbf{P}^4_K$ d'équation
$$F(kX_2, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = 0$$
ne peut admettre de point rationnel pour k assez grand. Mais $X_k(\boldsymbol{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$ pour une infinité de valeurs de k. Ces exemples ne peuvent pas être non plus expliqués par la construction d'Harari et Skorobogatov.

Plus récemment, Poonen dans [**Po**] montre que les conjectures de Lang entraînent l'existence d'intersections complètes lisses de dimension 3 dans $\mathbf{P}_K^N$ pour lesquelles le principe de Hasse n'est pas vérifié. Une telle variété est simplement connexe et de groupe de Brauer trivial et, à nouveau, l'absence de points rationnels ne peut donc être expliquée ni par la méthode de Manin ni par ses extensions non abéliennes.

5. L'obstruction de Brauer-Manin est-elle la seule ?

La formule de réciprocité du corps de classes permet également de construire des obstructions à l'existence d'un 0-cycle de degré 1. Plus généralement, ce paragraphe est consacré aux questions d'existence de cycles algébriques.

En combinant la dualité de Poitou-Tate avec la dualité de Poincaré, Saito [**Sa**] a construit pour toute bonne variété de dimension d sur K une suite exacte

$$\cdots \to H^{2i}_{\text{ét}}(V, \mu_n^{\otimes i}) \to \prod_{v\in M_K} \widetilde{H}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i}) \to \operatorname{Hom}(H^{2j}_{\text{ét}}(V, \mu_n^{\otimes j}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \cdots$$

où $j = d+1-i$, où $\widetilde{H}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$ désigne $H^{2i}_{\text{ét}}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$ pour une place v non archimédienne, vaut $\{0\}$ si v est complexe et est un groupe fini de 2-torsion muni d'un morphisme naturel

$$H^{2i}_{\text{ét}}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i}) \to \widetilde{H}^{2i}_{\text{ét}}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$$

lorsque v est réelle et où $\prod_{v\in M_K} \widetilde{H}^{2i}(V_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$ est le produit restreint des groupes précédents relativement aux images de $H^{2i}_{\text{ét}}(\mathscr{V}_{K_v}, \mu_n^{\otimes i})$ pour un modèle projectif et lisse $\mathscr{V}$ de V sur un ouvert $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_S)$ de $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_K)$ sur lequel n est inversible. Notons $\mathrm{CH}^i(V)$ le groupe de Chow des cycles de codimension i de V modulo l'équivalence rationnelle. En utilisant l'application cycle

$$\mathrm{cl}_n : \mathrm{CH}^i(V_L) \to H^{2i}_{\text{ét}}(V_L, \mu_n^{\otimes i})$$

pour toute extension L de K, on obtient un accouplement (cf. [**CT2**])

$$(\cdot,\cdot) : \prod_{v\in M_K} \mathrm{CH}^i(V_{K_v}) \times H^{2j}_{\text{ét}}(V, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

qui est trivial sur l'image de $\mathrm{CH}^i(V)$ dans $\prod_{v\in M_K} \mathrm{CH}^i(V_{K_v})$. Colliot-Thélène [**CT2**] énonce alors la conjecture suivante :

Conjecture 5.1. — *Soit* $z=(z_v)_{v\in M_K}$ *un élément de* $\prod_{v\in M_K}\mathrm{CH}^i(V_{K_v})$. *Supposons que*

$$\forall \xi\in H^{2j}_{\text{ét}}(V,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)),\quad (z,\xi)=0\,;$$

alors, pour tout $n>0$, *il existe* $y\in\mathrm{CH}^i(V)$ *tel que pour toute place non archimédienne* v *de* K, *on ait* $\mathrm{cl}_n(y)=\mathrm{cl}_n(z_v)$ *dans* $H^{2i}_{\text{ét}}(V_{K_v},\mu_n^{\otimes i})$.

Remarques 5.2. — (i) Si le groupe de Tate-Shafarevich de la variété de Picard de V est fini, la conjecture est vraie pour $i=1$.

(ii) Pour $i=\dim(V)$, on obtient un accouplement

$$\prod_{v\in M_K}\mathrm{CH}_0(V_{K_v})\times\mathrm{Br}(V)\to\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

où CH_0 désigne le groupe des 0-cycles modulo l'équivalence rationnelle. Dans ce cas, il est induit par les accouplements naturels

$$\begin{array}{rcl} Z_0(V_{K_v})\times\mathrm{Br}(V) & \to & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\\ \left(\sum_P n_P P, A\right) & \mapsto & \mathrm{inv}_v\left(\sum_P n_P \operatorname{cores}_{K_v(P)/K_v}(A(P))\right)\end{array}$$

définis par Manin [**Ma1**]. Une condition nécessaire pour l'existence d'un 0-cycle de degré 1 sur K est donc l'existence d'une famille de 0-cycles $z=(z_v)_{v\in M_K}$ tous de degré 1 tels que

$$\forall A\in\mathrm{Br}(V),\quad (z,A)=0.$$

La conjecture impliquerait que cette condition est également suffisante ; autrement dit, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un 0-cycle de degré un serait la seule.

Cette conjecture pour $i=\dim(V)$ a été démontrée par Frossard [**Fr**] en utilisant des résultats de Salberger [**Sal1**] et Colliot-Thélène [**CT3**] pour les bonnes variétés V pour lesquelles il existe un morphisme propre et surjectif $\pi: V\to C$ de fibre générique une variété de Severi-Brauer dont l'indice est sans facteur carré au-dessus d'une courbe C projective et lisse, si le groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne de C est fini (cf. également l'article de [**vH**]).

6. Autres cadres

Mentionnons pour terminer que la problématique du principe de Hasse et de l'approximation faible a également été considérée dans un cadre fonctionnel :

– Dans le cas où le corps de base est $K = k(C)$ où C est une courbe projective, lisse et connexe sur un corps algébriquement clos. En particulier, Colliot-Thélène et Gille ont montré dans [**CTG**] que l'approximation faible vaut pour les K-variétés géométriquement rationnellement connexes qui se ramènent par des fibrations à des espaces homogènes sous des groupes linéaires connexes.
– Le cas fonctionnel réel où le corps de base est le corps des fonctions d'une courbe projective, lisse et géométriquement intègre sur le corps des réels $\mathbf{R}$. En particulier, Ducros [**Du1**] et Scheiderer [**Sc**] ont montré que le principe de Hasse vaut pour les espaces principaux homogènes sous un groupe semi-simple simplement connexe. D'autre part, Ducros a prouvé que l'analogue de l'obstruction de Brauer-Manin dans ce cadre est la seule pour les fibrés en coniques ou, plus généralement, en variétés de Severi-Brauer au-dessus de la droite projective ([**Du2**], [**Du3**]).

Remerciements. Je remercie chaleureusement ceux qui ont accepté de relire ce texte dans un délai incroyablement bref et, en particulier, J.-L. Colliot-Thélène, A. Ducros, D. Harari et G. Rémond.

Références

[Az] J.-P. Azra, *Relations diophantiennes et la solution négative du 10-ème problème de Hilbert (d'après M. Davis, H. Putnam, J. Robinson et I. Matiasevitch)*, Séminaire Bourbaki 23-ème année, 1970/71, n° 383.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[Bo1] M. V. Borovoi, *Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology*, Duke Math. J. **72** (1993), n° 1, 217–239.

[Bo2] ______, *The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. **473** (1996), 181–194.

[Bki] N. Bourbaki, *Variétés différentielles et analytiques, fascicule de résultats*, Diffusion C.C.L.S., Paris, 1988.

[Ca] J. W. S. Cassels, *Lectures on elliptic curves*, London mathematical society student texts, vol. 24, Cambridge university press, Cambridge, 1991.

[Ch] F. Châtelet, *Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques*, Enseignement Math. (2) **5** (1959), 153–170.

[Che] V. I. Chernousov, *The Hasse principle for groups of type E_8*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **306** (1989), n° 5, 1059–1063; English transl. in Soviet Math. Dokl. **39** (1989), n° 3, 592–596.

[CT1] J.-L. Colliot-Thélène, *L'arithmétique des variétés rationnelles*, Ann. Fac. Sci. Toulouse (6) **1** (1992), n° 3, 295–336.

[CT2] ______, *Conjectures de type local-global sur l'image des groupes de Chow dans la cohomologie étale*, Algebraic K-theory (Seattle, 1997) (W. Raskind et C. Weibel, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, 1999, pp. 1–12.

[CT3] ______, *Principe local-global pour les zéro-cycles sur les surfaces réglées*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), n° 1, 101–124.

[CT4] ______, *Points rationnels sur les fibrations*, Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001) (K. Böröczky, J. Kollar et T. Szamuely, eds.), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, 2003, pp. 171–221.

[CT5] ______, *The local-global principle for rational points and zero-cycles*, Raymond and beverley sackler distinguished lectures in mathematics, Tel Aviv University, 2003.

[CTCS] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray et J.-J. Sansuc, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. reine angew. Math. **320** (1980), 150–191.

[CTG] J.-L. Colliot-Thélène et P. Gille, *Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable*, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo-Alto, 2002), Progress in Math., vol. 226, Birkäuser, Basel, 2003, à paraître.

[CTKS] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky et J.-J. Sansuc, *Arithmétique des surfaces cubiques diagonales*, Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1290, Springer-Verlag, Berlin, 1987, pp. 1–108.

[CTSal] J.-L. Colliot-Thélène et P. Salberger, *Arithmetic on some singular cubic hypersurfaces*, Proc. London Math. Soc (3) **58** (1989), n° 3, 519–549.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **282** (1976), 1113–1116.

[CTS2] ______, *La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **284** (1977), 1215–1218.

[CTS3] ______, *Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **284** (1977), 967–970.

[CTS4] ______, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS5] ______, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[CTSSD1] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces I*, J. reine angew. Math. **373** (1987), 37–107.

[CTSSD2] ______, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces II*, J. reine angew. Math. **374** (1987), 72–168.

[Co] D. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), n° 1, 17–50.

[Del] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), n° 3, 315–339.

[De] J.-M. Deshouillers, *L'étude des formes cubiques rationnelles via la méthode du cercle (d'après D. R. Heath-Brown, C. Hooley et R. C. Vaughan)*, Séminaire Bourbaki 42-ème année, 1989/90, n° 720.

[Du1] A. Ducros, *Principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous les groupes classiques sur un corps de dimension cohomologique virtuelle au plus 1*, Manuscripta Math. **89** (1996), n° 3, 335–354.

[Du2] ______, *L'obstruction de réciprocité à l'existence de points rationnels pour certaines variétés sur le corps des fonctions d'une courbe réelle*, J. reine angew. Math. **504** (1998), 73–114.

[Du3] ______, *Fibrations en variétés de Severi-Brauer au-dessus de la droite projective sur le corps des fonctions d'une courbe réelle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327** (1998), n° 1, 71–75.

[Ei] M. Eichler, *Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme*, Math. Z. **43** (1938), 481–494.

[Fr] E. Frossard, *Obstruction de Brauer-Manin pour les zéros-cycles sur des fibrations en variétés de Severi-Brauer*, J. reine angew. Math. **557** (2003), 81–101.

[GHS] T. Graber, J. Harris et J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), n° 1, 57–67.

[Gr] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer III : Exemples et compléments*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968, pp. 88–188.

[vH] J. van Hamel, *The Brauer-Manin obstruction for zero-cycles on Severi-Brauer fibrations over curves*, J. London Math. Soc. (2) **68** (2003), n° 2, 317–337.

[Ha1] D. Harari, *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75** (1994), n° 1, 221–260.

[Ha2] ______, *Obstructions de Manin transcendantes*, Number theory (Paris 1993-1994), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 235, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, pp. 75–87.

[Ha3] ______, *Flèches de spécialisations en cohomologie étale et applications arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), 143–166.

[Ha4] ______, *Weak approximation and non-abelian fundamental groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **33** (2000), n° 4, 467–484.

[Ha5] ______, *Groupes algébriques et points rationnels*, Math. Ann. **322** (2002), n° 4, 811–826.

[HS] D. Harari et A. N. Skorobogatov, *Non-abelian cohomology and rational points*, Compositio Math. **130** (2002), n° 3, 241–273.

[Harder1] G. Harder, *Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppppen, I*, Math. Z. **90** (1965), 404–428.

[Harder2] ______, *Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppppen, II*, Math. Z. **92** (1966), 396–415.

[Harder3] ______, *Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie halbeinfacher Gruppen*, Jber. Deutsche Math.-Verein **70** (1967), 182–216.

[Has] H. Hasse, *Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen*, J. reine angew. Math. **152** (1923), 129–148.

[Hasse] ______, *Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol*, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Kl. H **1** (1931), 64–69.

[HB] D. R. Heath-Brown, *Cubic forms in ten variables*, Proc. London Math. Soc. (3) **47** (1983), n° 2, 225–257.

[Ho1] C. Hooley, *On nonary cubic forms*, J. reine angew. Math. **386** (1988), 32–98.

[Ho2] ______, *On nonary cubic forms. III*, J. reine angew. Math. **456** (1994), 53–63.

[Kn] M. Kneser, *Hasse principle for H^1 of simply connected groups*, Algebraic groups and discontinuous subgroups (Boulder, 1965), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 9, 1966, pp. 159–163.

[Lan] W. Landherr, *Über einfache Liesche Ringe*, Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. **11** (1935), 41–64.

[La] S. Lang, *Number Theory III, diophantine geometry*, Encyclopaedia of Math. Sciences, vol. 60, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[LW] S. Lang et A. Weil, *Number of points of varieties in finite fields*, Amer. J. Math. **76** (1954), 819–827.

[Li] C.-E. Lind, *Untersuchungen über die rationalen Punkte der ebenen kubischen Kurven von Geschlecht Eins*, Diss. Uppsala, 1940.

[Madore] D. Madore, *Very free R-equivalence on toric models* (2003).

[Ma1] Y. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du congrès international des mathématiciens, Tome 1 (Nice, 1970), Gauthiers-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[Ma2] ______, *A course in mathematical logic*, Graduate Texts in Math., vol. 53, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Ma3] ______, *Cubic forms (second edition)*, North-Holland Math. Library, vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[Mi] H. Minkowski, *Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können*, J. reine angew. Math. **106** (1890), 5–26.

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt et K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Ni] H. Nishimura, *Some remarks on rational points*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. **29** (1955), 189–192.

[PR] V. P. Platonov et A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and applied mathematics, vol. 139, Academic press, London, 1991.

[Po] B. Poonen, *The Hasse principle for complete intersections in projective space*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 307–311.

[Re] H. Reichardt, *Einige im Kleinen überall lösbare, im Großen unlösbare diophantische Gleichungen*, J. reine angew. Math. **184** (1942), 12–18.

[Sa] S. Saito, *A global duality theorem for varieties over global fields*, Algebraic K-theory : connections with geometry and topology (Lake Louise, 1987) (J. F. Jardine et V. P. Snaith, eds.), Kluwer Academic Publishers, Lake Louise, 1987, 1989, pp. 425–444.

[Sal1] P. Salberger, *Zero-cycles on rational surfaces over number fields*, Invent. Math. **91** (1988), n° 3, 505–524.

[Sal2] ______, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[SaSk] P. Salberger et A. N. Skorobogatov, *Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms*, Duke Math. J. **63** (1991), n° 2, 517–536.

[San] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.

[SW] P. Sarnak et L. Wang, *Some hypersurfaces in* $\mathbf{P}^4$ *and the Hasse principle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 319–322.

[Sc] C. Scheiderer, *Hasse principles and approximation theorems for homogeneous spaces over fields of virtual cohomological dimension one*, Invent. Math. **125** (1996), n° 2, 307–365.

[Sch] W. M. Schmidt, *The density of integer points on homogeneous varieties*, Acta. Math. **154** (1985), n° 3–4, 243–296.

[Sei] A. Seidenberg, *A new decision method for elementary algebra*, Ann. of Math. (2) **60** (1954), 365–374.

[Se1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

[Se2] ______, *Cours d'arithmétique*, Le mathématicien, PUF, Paris, 1988.

[Skinner] C. M. Skinner, *Forms over number fields and weak approximation*, Compositio Math. **106** (1997), n° 1, 11–29.

[Sk1] A. N. Skorobogatov, *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, Séminaire de théorie des nombres (Paris, 1988–1989) (C. Goldstein, ed.), Progress in Math., vol. 91, Birkhaüser, Boston, 1990, pp. 205–219.

[Sk2] ______, *Descent on fibrations over the projective line*, Amer. J. Math. **118** (1996), n° 5, 905–923.

[Sk3] ______, *Beyond the Manin obstruction*, Invent. Math. **135** (1999), n° 2, 399–424.

[Sk4] ______, *Torsors and rational points*, Cambridge tracts in math., vol. 144, Cambridge University Press, 2001.

[SD1] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Two special cubic surfaces*, Mathematika **9** (1962), 54–56.

[SD2] ______, *The solubility of diagonal cubic surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), 891–912.

[Ta] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1948.

[Wa] L. Wang, *Brauer-Manin obstruction to weak approximation on abelian varieties*, Israel J. Math. **94** (1996), 189–200.

[Wi] O. Wittenberg, *Transcendental Brauer-Manin obstruction on a pencil of elliptic curves*, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo-Alto, 2002), Progress in Math., vol. 226, Birkäuser, Basel, 2003, à paraître.

Mars 2004

EMMANUEL PEYRE, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, F–38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX
E-mail : `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`