POINTS DE HAUTEUR BORNÉE ET GÉOMÉTRIE DES VARIÉTÉS [D'APRÈS Y. MANIN ET AL.]*

par

E. Peyre

Résumé. — Si V est une variété algébrique ayant une infinité de points rationnels sur un corps de nombres, il est naturel de munir V d'une hauteur et d'étudier de manière asymptotique les points rationnels de hauteur bornée sur V. Les conjectures énoncées par Manin vers 1989 proposent une interprétation géométrique de ce comportement asymptotique où le fibré anticanonique et le cône engendré par les diviseurs effectifs dans le groupe de Néron-Severi jouent un rôle crucial. Le but de cet exposé est un survol des travaux suscités par ces conjectures.

Abstract. — If V is an algebraic variety over a number field with infinitely many rational points, it is natural to construct heights on V and to study the asymptotic behavior of the points of bounded height on V. The conjectures made by Manin around 1989 propose a geometrical interpretation of this behavior in which the canonical line bundle and the cone of effective divisors in the Néron-Severi group play a central rôle. This talk is a survey of the works stimulated by these conjectures.

Si V est une variété algébrique projective sur $\mathbf{Q}$ et $\phi : V \to \mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$ un plongement, on dispose d'une hauteur exponentielle $H : V(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ définie comme la composée $H_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}} \circ \phi$ où $H_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}}$ est la hauteur usuelle sur $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$, donnée par

$$H_{\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}}((x_0 : \ldots : x_N)) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} (|x_i|)$$

si les x_i sont des entiers et $\operatorname{pgcd}_{0 \leqslant i \leqslant N}(x_i) = 1$. Il est alors naturel de vouloir étudier de manière asymptotique les points rationnels de V dont la hauteur est bornée. De manière plus générale, si V est une variété algébrique sur un corps de nombres K, tout morphisme $\phi : V \to \mathbf{P}^N_K$ induit une hauteur $H : V(K) \to \mathbf{R}$ et,

*Séminaire Bourbaki, 53ème année, 2000-01, exposé n°891

pour tout ouvert de Zariski U de V et tout nombre réel strictement positif B, on pose

$$N_{U,H}(B) = \#\{x \in U(K) \mid H(x) \leqslant B\}.$$

On souhaite alors étudier le comportement asymptotique de $N_{U,H}(B)$ lorsque B tend vers $+\infty$. Dans tous les cas connus de l'orateur où il a été déterminé, si $U(K) \neq \varnothing$, et si $N_{U,H}(B)$ est fini pour tout B, ce comportement est de la forme

$$N_{U,H}(B) \sim CB^a (\log B)^{b-1}$$

avec $C \in \mathbf{R}_+^*$, $a \in \mathbf{R}_+$, $b \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ et $b \geqslant 1$.

L'objet des conjectures énoncées par Manin et ses coauteurs vers 1989 est de proposer une interprétation géométrique pour a et b, où n'interviennent que la classe du fibré en droites $L = \phi^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N_K}(1))$ dans le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(V)$ de V, la classe du faisceau canonique dans ce groupe et le cône des classes de diviseurs effectifs. Le but de cet exposé est de présenter ces conjectures en faisant un survol des résultats connus et des perspectives ouvertes.

Après des rappels sur les hauteurs et quelques exemples simples, nous donnerons une description plus détaillée des conjectures de Manin avant de présenter au paragraphe 4 une liste d'indices en leur faveur. Nous décrirons ensuite le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel [**BT2**], avant de terminer par une brève évocation d'autres aspects de la théorie que nous avons choisi de ne pas traiter en détail dans cet exposé.

1. Point de vue sur les hauteurs

Parmi les nombreuses variantes de la notion de hauteur introduite par Weil [**We**] (cf. par exemple [**Né1**], [**Ar**], [**Se**], [**BGS**]), nous avons choisi d'utiliser, comme Batyrev et Manin dans [**BM**], les hauteurs exponentielles définies en termes de métriques adéliques sur un fibré en droites. Nous allons maintenant fixer les notations correspondantes.

Notations 1.0.1. — Dans la suite de cet exposé K désigne un corps de nombres, M_K l'ensemble des places de K. Si w est une place de K, on note K_w le complété de K pour la topologie définie par w. Si w est une place non-archimédienne, on note $\mathscr{O}_w$ l'anneau des entiers de K_w. Soit v la place de $\mathbf{Q}$ obtenue par restriction de w, on note $|\cdot|_w$ la valeur absolue sur K définie par la relation

$$\forall x \in K_w, \quad |x|_w = |N_{K_w/\mathbf{Q}_v}(x)|_v$$

où $|\cdot|_v$ est la valeur absolue archimédienne ou p-adique usuelle sur $\mathbf{Q}$. Ces valeurs absolues ont l'avantage de satisfaire la formule du produit :

$$\forall x \in K^*, \quad \prod_{w \in M_K} |x|_w = 1.$$

Si $\mathscr{X}$ est un schéma sur le spectre d'un anneau A et B une A-algèbre commutative, on note $\mathscr{X}(B)$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,A}(\mathrm{Spec}\,B, \mathscr{X})$ et $\mathscr{X}_B$ le produit $\mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,B$. En particulier, si X est une variété sur un corps F, de clôture algébrique $\overline{F}$, $X(F)$ est l'ensemble des points rationnels de X et on note $\overline{X}$ la variété $X_{\overline{F}}$.

Nous dirons qu'une variété algébrique V sur K est *bonne* si elle est projective, lisse et géométriquement intègre. Si V est une bonne variété, et L un faisceau inversible sur V, alors pour toute extension K' de K et tout point x de $V(K')$, on note

$$L(x) = L_x \otimes_{\mathscr{O}_{V,x}} K'$$

où L_x désigne la fibre de L en x au sens des faisceaux ; $L(x)$ est un espace vectoriel de dimension un sur K' et peut être vu comme la fibre du fibré en droites associé à L.

Si v est une place de K, une *métrique v-adique* sur L est une application qui à tout point x de $V(K_v)$ associe une fonction

$$\|\cdot\|_v : L(x) \to \mathbf{R}_+$$

de sorte que

M1 $\forall x \in V(K_v), \quad \forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = 0 \Leftrightarrow y = 0,$

M2 $\forall x \in V(K_v), \quad \forall y \in L(x), \quad \forall \lambda \in K_v, \quad \|\lambda y\|_v = |\lambda|_v \|y\|_v,$

M3 pour tout ouvert U de V, pour toute section s de L sur U, l'application de $U(K_v)$ dans $\mathbf{R}_+$ qui à x associe $\|s(x)\|_v$ est continue pour la topologie v-adique.

Donnons deux exemples importants de telles métriques.

Exemple 1.0.2. — Si $\mathscr{B} = (s_1, \dots, s_N)$ est une famille de sections globales de L, de sorte que le système linéaire engendré soit sans point base, on peut définir pour toute place v une métrique par la formule :

$$\forall x \in V(K_v), \quad \forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = \inf_{\substack{0 \leqslant i \leqslant N \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{y}{s_i(x)} \right|_v .$$

On dit que $\|\cdot\|_v$ est la métrique associée à $\mathscr{B}$.

Exemple 1.0.3. — Si $S \subset M_K$ est un ensemble fini de places non-archimédiennes, on note $\mathscr{O}_S$ l'anneau des S-entiers. Soient $\mathscr{V}$ un modèle projectif et lisse de V sur $\mathscr{O}_S$ et $\mathscr{L}$ un modèle de L sur $\mathscr{V}$. Pour toute place finie v de K en-dehors de S, on définit une métrique v-adique de la façon suivante : si $x \in V(K_v)$, comme $\mathscr{V}$ est projective, il se relève en un unique élément $\tilde{x} \in \mathscr{V}(\mathscr{O}_v)$. Le faisceau inversible $\tilde{x}^*(\mathscr{L})$ sur $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_v)$ correspond à un $\mathscr{O}_v$-module libre de rang un dans $L(x)$, dont on note y_0 un générateur. La métrique cherchée est alors définie par

$$\forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = \left|\frac{y}{y_0}\right|_v.$$

On dit que $\|\cdot\|_v$ est la métrique définie par le modèle $\mathscr{L}$.

Définition 1.0.4. — Une famille de métriques $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ où $\|\cdot\|_v$ est une métrique v-adique sur un faisceau inversible L est dite *adélique* si et seulement s'il existe un ensemble fini S de places non-archimédiennes, un modèle $\mathscr{V}$ de V sur $\mathscr{O}_S$ et un modèle $\mathscr{L}$ de L sur $\mathscr{V}$ tels que pour toute place finie de K en-dehors de S, la métrique $\|\cdot\|_v$ soit la métrique définie par $\mathscr{L}$.

Par abus de langage, nous appellerons dans cet exposé *hauteur d'Arakelov* sur une bonne variété V une paire $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_K})$ où L désigne un faisceau inversible sur V et $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ une métrique adélique sur L. Si x est un point rationnel de V sa hauteur relativement à H est donnée par la formule

$$\forall y \in L(x) - \{0\}, \quad H(x) = \prod_{y\in M_K} \|y\|_v^{-1}.$$

Remarques 1.0.5. — (i) Si $x \in V(K)$ et $y \in L(x) - \{0\}$, on a $\|y\|_v = 1$ sauf pour un nombre fini de places ce qui donne un sens au produit ci-dessus, qui, par la formule du produit, est indépendant du choix de y.

(ii) Pout tout faisceau inversible L sur une bonne variété V, il est possible de construire une métrique adélique sur L.

(iii) Si $H = (L, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_K})$ et $H' = (L, (\|\cdot\|'_v)_{v\in M_K})$ sont des hauteurs relatives au même faisceau L, alors les métriques $\|\cdot\|_v$ et $\|\cdot\|'_v$ coïncident sauf pour un nombre fini de places. En outre, pour toute place v de K, l'application qui à tout x de $V(K_v)$ associe $\|y\|_v/\|y\|'_v$ où $y \in L(x) - \{0\}$ est continue et donc bornée sur l'espace compact $V(K_v)$. En conséquence, il existe des constantes C et C' telles que

$$\forall x \in V(K), \quad 0 < C < \frac{H(x)}{H'(x)} < C'.$$

Cela reste vrai si la différence entre les classes des fibrés est un élément de torsion dans le groupe de Picard [**Se**, §2.9].

(iv) Il y a une notion évidente de produit tensoriel pour les hauteurs d'Arakelov et on a la formule

$$\forall x \in V(K), \quad (H_1 \otimes H_2)(x) = H_1(x)H_2(x).$$

Exemple 1.0.6. — Si $\mathscr{B} = (s_0, \dots, s_N)$ est une famille de sections d'un faisceau inversible L engendrant un système linéaire sans point base, la famille de métriques $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ définie par $\mathscr{B}$ est une métrique adélique sur L. En outre, si $\phi : V \to \mathbf{P}^N_K$ est le morphisme défini par $\mathscr{B}$, on a

$$\forall x \in V(K), \quad H(x) = \prod_{v \in M_K} \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |y_i|_v$$

où $(y_0 : \cdots : y_N)$ désigne un système de coordonnées homogènes pour $\phi(x)$; autrement dit $H = H_{\mathbf{P}^N_K} \circ \phi$ où $H_{\mathbf{P}^N_K}$ est la hauteur usuelle sur l'espace projectif. En particulier, si $K = \mathbf{Q}$ et si $V \subset \mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$, on retrouve la hauteur classique

$$H((x_0 : \ldots : x_N)) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant N} |x_i| \quad \text{si } \begin{cases} x_i \in \mathbf{Z} \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant N, \\ \operatorname{pgcd}_{0 \leqslant i \leqslant N}(x_i) = 1. \end{cases}$$

Notations 1.0.7. — Si H est une hauteur d'Arakelov sur une bonne variété et F un sous-ensemble de $V(K)$, on note pour tout nombre réel strictement positif B

$$N_{F,H}(B) = \#\{x \in F \mid H(x) \leqslant B\}.$$

Si W est un sous-ensemble localement fermé de V, on notera $N_{W,H}(B)$ pour $N_{W(K),H}(B)$. On considérera également la fonction zêta associée définie pour $s \in \mathbf{C}$ par la série

$$\zeta_{F,H}(s) = \sum_{x \in F} \frac{1}{H(x)^s}$$

lorsque celle-ci converge. Le comportement asymptotique de $N_{F,H}(B)$ est lié par des théorèmes taubériens au domaine de convergence et aux propriétés de méromorphie de la fonction $\zeta_{F,H}(s)$.

2. Premiers exemples et phénomènes d'accumulation

L'exemple le plus simple que l'on puisse étudier est celui de l'espace projectif. Le résultat est dû à Schanuel.

Théorème 2.0.1 **(Schanuel [Sc]).** — *Soit H la hauteur usuelle sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n_K$. Il existe alors une constante explicite C_H telle que*

$$N_{\mathbf{P}^n_K,H}(B) = C_H B^{n+1} + \begin{cases} O(B\log B) \text{ si } n = 1, \\ O(B^n) \text{ si } n > 1. \end{cases}$$

En outre le comportement asymptotique reste le même si on remplace $\mathbf{P}^n$ par un ouvert non vide de cet espace, la contribution de tout fermé strict de $\mathbf{P}^n$ étant négligeable. On peut même obtenir un résultat plus général en utilisant la notion d'ensemble mince.

Définition 2.0.2. — Un sous-ensemble F de $\mathbf{P}^n(K)$ est dit *mince* si et seulement s'il existe un morphisme de variétés algébriques sur K

$$\pi : X \to \mathbf{P}^n_K$$

tel que $F \subset \pi(X(K))$, la fibre de π au point générique est finie et π n'a pas de section rationnelle définie sur K.

Un exemple typique de sous-ensemble mince est l'ensemble des cubes dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$, image de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ par l'application envoyant $(x : y)$ sur $(x^3 : y^3)$.

Théorème 2.0.3 **(Serre [Se, §13.1.3]).** — *Si F est un sous-ensemble mince de l'ensemble $\mathbf{P}^n(K)$, alors*

$$N_{F,H}(B) = O(B^{n+\frac{1}{2}}(\log B)^\gamma)$$

avec $\gamma < 1$.

Le deuxième cas classique est celui des variétés abéliennes :

Théorème 2.0.4 **(Néron [Né2]).** — *Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K, soit H une hauteur exponentielle sur A relative à un faisceau inversible ample sur A, alors il existe une constante explicite C_H telle que*

$$N_{A,H}(B) = C_H(\log B)^{\rho/2} + O((\log B)^{\frac{\rho-1}{2}})$$

où ρ désigne le rang du groupe $A(K)$.

Remarques 2.0.5. — (i) Les remarques faites pour l'espace projectif ne s'appliquent plus pour les variétés abéliennes. D'une part, les points rationnels ne sont pas nécessairement denses pour la topologie de Zariski, auquel cas le comportement asymptotique dépend de l'ouvert choisi. D'autre part, le groupe $A(K)/2$ étant fini, $A(K)$ est la réunion d'un nombre fini de translatés de $2A(K)$. En ce sens, les points rationnels de A forment un sous-ensemble mince.

(ii) Le cas des variétés abéliennes est, à la connaissance de l'orateur, le seul cas où on ait démontré un comportement asymptotique avec une puissance demi-entière du logarithme.

Nous allons terminer cette partie avec un exemple qui illustre différents types de phénomènes d'accumulation dont la compréhension est cruciale pour l'interprétation du comportement asymptotique.

Notations 2.0.6. — Soit V la variété obtenue en éclatant le plan projectif en le point P_0 de coordonnées $(0:0:1)$. Les points rationnels de V peuvent être décrits par

$$V(\mathbf{Q}) = \{\, ((y_0 : y_1 : y_2), (z_0 : z_1)) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \mid z_1 y_0 = z_0 y_1 \,\}.$$

On note pr_1 (resp. pr_2) la projection sur le premier (resp. le deuxième) facteur. On désigne par E le diviseur exceptionnel $\mathrm{pr}_1^{-1}(P_0)$ et par U son complémentaire ; soit Λ l'image inverse par pr_1 d'une droite évitant P_0. Le groupe de Picard de V est donné par

$$\mathrm{Pic}(V) = \mathbf{Z}\Lambda \oplus \mathbf{Z}E.$$

Si r et s sont deux entiers, on considère la hauteur sur $V(\mathbf{Q})$ donnée par la formule

$$H_{r,s}((y_0 : y_1 : y_2), (z_0 : z_1)) = \sqrt{y_0^2 + y_1^2 + y_2^2}^{\,r+s} \sqrt{z_0^2 + z_1^2}^{\,-s}$$

si y_0, y_1, y_2, z_0, z_1 sont des entiers tels que

$$\mathrm{pgcd}(y_0, y_1, y_2) = \mathrm{pgcd}(z_0, z_1) = 1.$$

Cette hauteur correspond à une métrique adélique sur $r\Lambda + sE$.

On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 2.0.7 **(Batyrev-Manin [BM, §1.6]).** — *On suppose que $r > 0$ et $r + s > 0$. Il existe des constantes $C_{r,s}$ telles que le comportement asymptotique de $N_{U,H_{r,s}}(B)$ lorsque B tend vers $+\infty$ soit donné par les formules :*

$$N_{U,H_{r,s}}(B) \sim \begin{cases} C_{r,s} B^{\frac{3}{r}} \text{ si } \frac{3}{r} > \frac{2}{r+s}, \\ C_{3,-1} B^{\frac{3}{r}} \log(B^{\frac{3}{r}}) \text{ si } \frac{3}{r} = \frac{2}{r+s}, \\ C_{r,s} B^{\frac{2}{r+s}} \text{ si } \frac{3}{r} < \frac{2}{r+s}. \end{cases}$$

Par ailleurs,

$$N_{E,H_{r,s}}(B) \sim C'_s B^{-\frac{2}{s}} \text{ si } s < 0$$

et ce dernier cardinal est infini si $s > 0$ et $B > 0$.

Remarques 2.0.8. — (i) On obtient donc que $N_{U,H_{r,s}}(B) = o(N_{E,H_{r,s}}(B))$ si $r+2s > 0$, comme cela apparaît dans [**Se**, §2.12]. Le nombre de points de l'ouvert est négligeable devant celui du fermé E. Du point de vue de l'interprétation, le nombre de points sur la variété V tout entière est, sous la condition précédente, équivalent à celui sur E et donc s'interprète en termes de la restriction de H à E. Tout phénomène global est occulté. Une des idées cruciales des conjectures de Manin est de suggérer que la géométrie globale de la variété réapparaisse dans le comportement asymptotique si on considère le complémentaire U de E.

(ii) La symétrie apparente entre les cas $\frac{3}{r} > \frac{2}{r+s}$ et $\frac{2}{r+s} > \frac{3}{r}$ disparaît si on étudie de manière plus fine la contribution des fermés de Zariski dans le comportement asymptotique : si $\frac{3}{r} \geqslant \frac{2}{r+s}$, le comportement asymptotique n'est pas modifié si on remplace U par un ouvert non vide contenu dans U, la contribution des fermés étant négligeable. En particulier, si $(r,s) = (1,0)$ on est ramené au cas du plan projectif pour lequel tout sous-ensemble mince apporte une contribution négligeable. Par contre, si $\frac{2}{r+s} > \frac{3}{r}$, le comportement asymptotique du nombre de points sur chaque fibre de pr_2 est donné par une formule de la forme

$$\forall x \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}), \quad N_{\mathrm{pr}_2^{-1}(x),H_{r,s}}(B) \sim C_{r,s}(x) B^{\frac{2}{r+s}}$$

et la constante $C_{r,s}$ globale est obtenue dans ce cas comme somme des constantes $C_{r,s}(x)$. Chaque fibre de pr_2 est donc faiblement accumulatrice en un sens que nous préciserons plus loin.

(iii) Pour illustrer ce résultat, nous avons représenté sur la figure 1 les ensembles

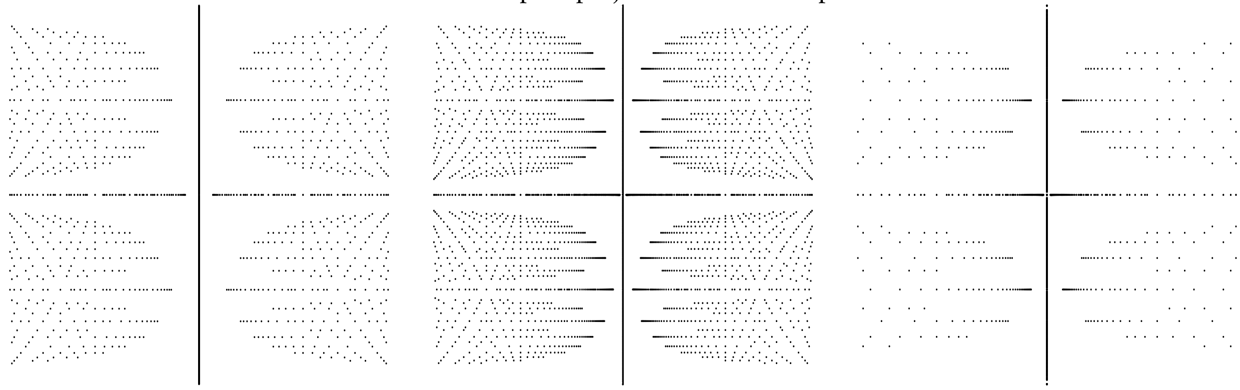
$$\{x = ((y_0 : y_1 : 1), (1 : z_1)) \in V(\mathbf{Q}) \mid |y_0| < 1, |z_1| < 1, H_{r,s}(x) \leqslant 4000\},$$

pour $(r,s) = (3,0)$, $(3,-1)$ et $(4,-2)$, avec y_0 en abscisse et z_1 en ordonnée. Dans cette figure, le diviseur exceptionnel apparaît donc comme la droite verticale centrale et les fibres de pr_2 sont les droites horizontales.

3. Les conjectures de Manin

Dans une série d'articles [**FMT**], [**BM**], [**Ma**] publiés entre 1989 et 1993, Manin a présenté, avec Batyrev, Franke et Tschinkel, une série de conjectures qui donnent une interprétation du terme dominant dans le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée. Nous allons donner un échantillon de ces conjectures qui ont servi de fil directeur dans l'étude récente de ces phénomènes asymptotiques.

FIGURE 1. Le plan projectif éclaté en un point



$r = 3,\ s = 0$ $r = 3,\ s = -1$ $r = 4,\ s = -2$

Dans [**BM**, §3], Batyrev et Manin précisent que les conjectures énoncées sont à considérer plutôt comme des questions. Une remarque similaire vaut pour les conjectures de cet exposé.

3.1. Premier niveau : la puissance de B. — Le premier objectif est d'interpréter la puissance de B intervenant dans le comportement asymptotique. Nous utiliserons pour cela la notation suivante :

Notation 3.1.1. — Soit H une hauteur d'Arakelov sur une bonne variété V et F un sous-ensemble constructible de V. On pose

$$a_F(H) = \inf\{\, \sigma \in \mathbf{R} \mid \zeta_{F,H}(s) \text{ converge pour } \mathrm{Re}(s) = \sigma \,\}.$$

Remarques 3.1.2. — (i) Si $a_F(H) > 0$ sa valeur peut être également décrite comme

$$a_F(H) = \varlimsup_{B \to +\infty} \log(N_{F,H}(B))/\log B$$

et donne donc la puissance de B dans le comportement asymptotique.

(ii) La valeur de $a_F(H)$ ne dépend en fait que de la classe $[L]$ du faisceau inversible considéré dans le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(V)$ (cf. [**BM**, §1.4]). Nous noterons donc aussi $a_F([L])$ ou $a_F(L)$ pour $a_F(H)$.

(iii) On a en outre la relation $a_F(d[L]) = \frac{1}{d} a_F([L])$.

3.1.1. *Conjectures concernant une variété projective arbitraire.* — La première conjecture lie l'existence d'une courbe rationnelle au fait d'avoir « beaucoup » de points rationnels :

Conjecture 3.1.3 **(Manin [Ma]).** — *Si $a_U(L) > 0$ pour un ouvert U de V et un faisceau ample L, alors U contient une courbe isomorphe à un ouvert de $\mathbf{P}^1_K$.*

Passons à l'interprétation géométrique de $a_U(L)$:

Définition 3.1.4. — Si V est une bonne variété, on note $C^1_{\text{eff}}(V)$ le cône fermé engendré par les classes de diviseurs effectifs dans le groupe $\text{NS}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ et ω_V le faisceau canonique de V, puissance extérieure maximale du fibré cotangent Ω^1_V. On pose alors

$$a^g_V(L) = \inf\{\gamma \in \mathbf{R} \mid \gamma[L] \in \omega_V^{-1} + C^1_{\text{eff}}(V)\}.$$

Remarques 3.1.5. — (i) On a également la relation $a^g_F(d[L]) = \frac{1}{d} a^g_F([L])$.

(ii) Si ω_V n'appartient pas à $C^1_{\text{eff}}(V)$, $a^g_V(\omega_V^{-1}) = 1$.

Conjecture 3.1.6 **(Batyrev, Manin).** — *Si L est ample, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert de Zariski dense U de V tel que*

$$a_U(L) \leqslant a^g_V(L) + \varepsilon.$$

Remarques 3.1.7. — (i) Notons que cette conjecture est vraie pour une courbe C : en effet les valeurs de $a_U(L)$ et de $a^g_V(L)$, pour U un ouvert dense de V, sont données par le tableau :

genre g	$a_U(L)$
0	$\frac{2}{\deg(L)}$ ou $-\infty$
1	0 ou $-\infty$
> 1	$-\infty$

où le fait que $a_U(L) = -\infty$ si $g > 1$ résulte de la conjecture de Mordell montrée par Faltings [**Fa**].

(ii) Si V est de type général, c'est-à-dire si ω_V est pseudo-ample, alors la conjecture est équivalente à dire que $V(K)$ n'est pas dense pour la topologie de Zariski, c'est-à-dire à une des conjectures de Lang [**La**, Chap. I, §3].

Il est essentiel dans cette conjecture de se restreindre à des ouverts, comme cela apparaît déjà dans le cas du plan projectif éclaté en un point. Cela amène aux définitions suivantes :

Définition 3.1.8. — Soit $F \subsetneq V$ un fermé irreductible de V. On dit que F est *strictement accumulateur* pour L si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$a_W(L) > a_U(L).$$

On dit que F est *faiblement accumulateur* pour L si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$\varlimsup_{B\to+\infty} \frac{N_{W,H}(B)}{N_{U,H}(B)} > 0$$

pour toute hauteur d'Arakelov H relative à L.

Exemple 3.1.9. — Dans le cas du plan projectif éclaté en un point rationnel, le diviseur exceptionnel est strictement accumulateur si $r + 2s > 0$ et toute fibre de pr_2 est faiblement accumulatrice si $\frac{2}{r+s} > \frac{3}{r}$. L'ensemble des points rationnels est donc, dans ce dernier cas, réunion d'ensembles faiblement accumulateurs.

Exemple 3.1.10. — Soit V une surface K3 ou une surface d'Enriques telle que le groupe d'automorphismes de V sur K soit infini. On suppose en outre que V contient une courbe K-rationnelle, c'est-à-dire birationnelle à $\mathbf{P}^1_K$. Des exemples de telles surfaces $K3$ données sous la forme d'hypersurfaces de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ définies par une section de $\mathcal{O}(2,2,2)$ sont étudiées par Billard dans [**Bil**]. Une telle surface contient une infinité de courbes rationnelles. Soit L un faisceau inversible ample sur V. Si on indexe les courbes rationnelles de V en une famille $(C_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de sorte que les degrés d'intersection avec L soient croissants, on peut poser $U_i = V - \bigcup_{j\leqslant i} C_j$. On obtient une suite décroissante d'ouverts tels que, conjecturalement, on ait que $a_{U_i}(L) > 0$ tende vers 0 quand i tend vers $+\infty$. La stratification arithmétique définie par $a_U(L)$ serait donc, dans ce cas, infinie (cf. [**BM**, §3.5]).

Peu de choses ont été effectivement montrées pour ces surfaces. Billard [**Bil**] avait obtenu des majorations pour certaines des surfaces mentionnées ci-dessus ; plus récemment McKinnon a montré dans [**Mc**] que les courbes K-rationnelles de plus bas degré relativement à L sont effectivement L-accumulatrices pour certaines surfaces K3 hyperelliptiques, identifiant ainsi le premier cran de la filtration.

Une question qui reste, semble-t-il, complètement ouverte est celle des points sur le complémentaire de la réunion des droites K-rationnelles que celles-ci soient en nombre fini ou pas. Est-il possible qu'il y ait un nombre infini de tels points ? Quel est le comportement asymptotique de ces points relativement aux hauteurs ?

Pour conclure ce paragraphe, il convient de pouvoir décrire géométriquement ces variétés strictement accumulatrices. Une méthode consiste à restreindre L à une sous-variété, puis à donner un analogue de la conjecture pour celle-ci. Il faut donc étendre la définition de $a^g_V(L)$ à des sous-variétés éventuellement singulières F de V : soit F un fermé irréductible de V, soient $\widetilde{F}$ une normalisation de F, $\varphi : \widetilde{F} \to V$ le morphisme induit et $F_0 \subset \widetilde{F}$ le lieu des points lisses de $\widetilde{F}$. On pose alors

$$a^g_F(L) = \inf\{\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid h^0(F_0, \varphi^*(L)^p \otimes \omega^q_{F_0}) > 0\}$$

Les candidats géométriques pour les variétés strictement accumulatrices sont alors les fermés pour lesquels

$$a^g_F(L) > a^g_V(L).$$

3.1.2. *Le cas des variétés presque de Fano.* — Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, si V est de type général, on peut avoir pour toute extension finie K' de K, une inégalité $a_{V_{K'}}(L) < a^g_{V_{K'}}(L)$. Ce phénomène peut encore se produire si V n'est pas de type général, il suffit pour cela que les points rationnels ne soient pas potentiellement Zariski denses, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'extension finie K' telle que $V(K')$ soit Zariski dense. En particulier, on peut considérer le produit $\mathbf{P}^1_K \times C$ où C est une courbe de genre plus grand que deux (cf. également [**CTSSD**] pour un autre exemple). Il convient donc de restreindre la classe des variétés considérées.

Dans ce cadre, il est assez naturel de considérer une classe un peu plus large que celle des variétés de Fano :

Définition 3.1.11. — Nous dirons qu'une bonne variété V sur le corps de nombres K est presque de Fano si elle vérifie les conditions suivantes :

PF1 le groupe de cohomologie $H^i(V, \mathscr{O}_V)$ est nul pour $i = 1$ et $i = 2$,

PF2 la torsion dans le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est réduite à $\{0\}$,

PF3 l'opposé du faisceau canonique ω_V^{-1} appartient à l'intérieur du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$.

Le théorème d'annulation de Kodaira assure qu'une variété de Fano est presque de Fano. Par ailleurs, toutes les variétés toriques sont presque de Fano.

Conjecture 3.1.12. — *Si V est presque de Fano, et si L est un faisceau à l'intérieur du cône des diviseurs effectifs, alors il existe une extension finie K_0 de K et un ouvert dense O de V_{K_0} tel que pour tout corps de nombres K' contenant K_0 et tout ouvert* *dense U contenu dans $O_{K'}$, on ait*

$$a_U(L) = a^g_V(L).$$

Remarque 3.1.13. — Cette conjecture est intermédiaire entre la conjecture B, qui se limite aux variétés de Fano, et la conjecture C de [**BM**].

3.2. Deuxième niveau : la puissance de $\log B$**.** — Dans ce paragraphe nous allons faire une hypothèse supplémentaire :

Hypothèse 3.2.1. — On suppose que V est une variété presque de Fano telle qu'il existe une famille finie $(n_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de classes de diviseurs effectifs dans $\mathrm{NS}(\overline{V})$ telle que

$$C^1_{\mathrm{eff}}(\overline{V}) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{R}_+ n_i.$$

Très peu de choses semblent connues sur la structure du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ en général. Si V est une surface de Del Pezzo, l'hypothèse résulte de la théorie de Mori. Cela reste vrai si V est une variété de Fano de dimension trois [**Ba**]. Cette hypothèse est également vérifiée dans divers cas particuliers (variétés de drapeaux, variétés toriques,...).

Définition 3.2.2. — Si V vérifie les hypothèses précédentes et si $L \in \mathrm{NS}(V)$ est tel que $a^g_V(L) > 0$, alors $a^g_V(L)[L] - [\omega_V^{-1}] \in \partial C^1_{\mathrm{eff}}(V)$, et on peut définir $b^g_V(L)$ comme la codimension de la face minimale de $\partial C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ contenant $a^g_V(L)[L] - [\omega_V^{-1}]$.

Conjecture 3.2.3. — *Si V vérifie l'hypothèse 3.2.1 et H est une hauteur relative à un fibré en droites L tel que $a^g_V([L]) > 0$, il existe une extension finie K_0 de K et un ouvert dense O tels que pour tout corps de nombres K' contenant K_0 et tout ouvert dense U contenu dans $O_{K'}$, il existe une constante $C_H > 0$ vérifiant*

$$N_{U,H}(B) \underset{B\to+\infty}{\sim} C_H B^{a^g_{V'}(L)} (\log B)^{b^g_{V'}(L)-1} \qquad \text{(F)}$$

où $V' = V_{K'}$.

Remarques 3.2.4. — (i) Cette conjecture est une version affaiblie de la conjecture C$'$ de [**BM**].

(ii) Notons que $a_V^g(L)$ est stable par extension de corps, mais que cela n'est plus le cas pour $b_V^g(L)$. D'autre part, l'exemple du plan projectif éclaté en un point montre que la constante C peut dépendre de l'ouvert U choisi.

Là encore, il est possible de suggérer une piste pour la détermination des variétés faiblement accumulatrices pour un faisceau L dont la classe appartient à l'intérieur du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$. Soit H une hauteur relative à L. Considérons tout d'abord la famille $(n_1, \dots, n_r)$ des générateurs des arêtes de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ et $(L_1, \dots, L_r)$ une famille de représentants de cette famille. Soit B la réunion des points bases des systèmes $\Gamma(V, L_i)$; on note U son complémentaire. Cet ouvert U apparaît naturellement lorsqu'on s'intéresse à la finitude de $N_{U,H}(B)$: pour toute hauteur H comme ci-dessus, on a

$$\forall B \in \mathbf{R}_+^*, \quad N_{U,H}(B) < +\infty.$$

Considérons σ la face fermée minimale de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ contenant $a^g(L)[L] - [\omega_V^{-1}]$. Pour tout L' de σ, quitte à remplacer L' par $L'^{\otimes n}$, on dispose d'un morphisme $\phi_{L'} : U \to \mathbf{P}(\Gamma(V, L')^\vee)$. Soit $L_0 \in \sigma$ de sorte que la fibre générique soit de dimension minimale. Les candidats naturels pour les variétés faiblement accumulatrices relativement à L sont alors les fibres de ϕ_{L_0} si le morphisme associé n'est pas constant.

En particulier, suivant cette première approche, pour $L = \omega_V^{-1}$ le complémentaire des variétés faiblement accumulatrices devrait être un ouvert. Nous verrons que, vraisemblablement, ce n'est pas toujours le cas. Une analyse plus fine et plus approfondie des fibrations intervenant dans le comportement asymptotique se trouve dans [**BT4**].

4. Une liste de résultats

Il est maintenant temps de donner une liste de cas pour lesquels la formule (F) a été démontrée.

• La formule (F) est compatible avec le produit de variétés au sens suivant : si H_1 et H_2 sont deux hauteurs d'Arakelov relatives à des fibrés L_1 et L_2 sur de bonnes variétés V_1 et V_2 vérifiant les hypothèses 3.2.1 et s'il existe des ouverts U_i de V_i tels que

$$N_{U_i,H_i}(B) = C_i B^{a^g_{V_i}(L_i)} (\log B)^{b^g_{V_i}(L_i)-1} + O(B^{a^g_{V_i}(L_i)} (\log B)^{b^g_{V_i}(L_i)-2}),$$

alors une formule analogue vaut pour le produit $U_1 \times U_2$ et la hauteur H donnée par $H(x, y) = H_1(x)H_2(y)$ (Franke, Manin et Tschinkel [**FMT**, §1]).

• (F) est compatible avec les résultats de la méthode du cercle pour les intersections complètes lisses dans $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Q}}$. En particulier, si V est une intersection complète lisse définie par m équations de même degré d en $N + 1$ variables de sorte que

$$N > 2^{d-1}m(m+1)(d-1)$$

et si $V(\mathbf{Q}_v) \neq \varnothing$ pour toute place v de $\mathbf{Q}$, alors (F) est vérifiée pour tout ouvert U de V (Birch [**Bir**], cf. également [**Va**] pour la méthode du cercle ; Franke, Manin et Tschinkel [**FMT**, §1]).

• (F) est vérifiée pour les variétés de drapeaux généralisés, c'est-à-dire pour les quotients G/P où G est un groupe algébrique linéaire et P un K-sous-groupe parabolique de G (Franke, Manin et Tschinkel [**FMT**, §2]). Dans ce cas, tout ouvert dense U convient également.

• (F) a été démontrée pour les variétés toriques projectives et lisses, c'est-à-dire pour les compactifications équivariantes lisses de tores, en prenant comme ouvert U l'orbite ouverte dans V (Batyrev et Tschinkel [**BT1**], [**BT5**] et [**BT3**]).

• (F) est vraie pour certaines fibrations en variétés toriques au-dessus de variétés de drapeaux généralisés (Strauch et Tschinkel [**ST1**] et [**ST2**]). L'ouvert U est obtenu dans ce cas en considérant l'orbite ouverte dans chaque fibre.

• (F) est valide pour les compactifications équivariantes lisses d'espaces affines, l'ouvert U étant l'orbite ouverte dans V (Chambert-Loir et Tschinkel [**CLT1**], [**CLT2**] et [**CLT5**]).

• (F) est vérifiée par la surface obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$, U étant donné comme complémentaire des diviseurs exceptionnels (Salberger, la Bretèche [**Bre2**]).

5. quelques outils de démonstration

Il est difficile dans le cadre de cet exposé de décrire en détails la panoplie des méthodes très variées qui ont été utilisées pour montrer les résultats précédents. Nous nous contenterons de donner quelques idées de preuves illustrant deux types d'approches : la première est basée sur des techniques d'analyse harmonique et s'avère fructueuse pour des compactifications d'espaces homogènes ou des variétés apparentées ; la seconde, que nous détaillerons moins, utilise les torseurs universels introduits par Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS**].

5.1. Les séries d'Eisenstein. — Soit V une variété de drapeaux généralisés de la forme $V = G/P$, avec G semi-simple simplement connexe et P sous-groupe parabolique de G. Le groupe de Picard de V est alors isomorphe au groupe $X^*(P)_K$ des caractères de P sur K c'est-à-dire au groupe des K-morphismes de P dans $\mathbf{G}_{m,K}$. Soit P_0 un K-sous-groupe parabolique minimal de G contenu dans P et A_0 un tore déployé maximal de G contenu dans P_0. On a une injection de $X^*(P)_K$ dans $X^*(A_0)_K$. Par l'isomorphisme ci-dessus ω_V^{-1} correspond à la somme des racines de A_0 comptées avec des multiplicités égales à la dimension de leur espace propre dans l'algèbre de Lie du radical de P.

Pour certaines hauteurs H, la série zêta des hauteurs

$$\zeta_{V,H}(s) = \sum_{x \in V(K)} \frac{1}{H(x)^s}$$

est une série d'Eisenstein relative à P à laquelle on peut appliquer les travaux de Langlands ([**Lan**], [**Go**] et [**MW**]).

De manière plus précise, donnons-nous une base du groupe de Picard de V et pour chaque élément de cette base donnons-nous une hauteur d'Arakelov relative à cet élement qui soit du type ci-dessus. Cela nous fournit un accouplement

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \times V(k) & \to & \mathbf{C} \\ (L, x) & \mapsto & \boldsymbol{H}(L, x). \end{array}$$

qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et redonne, pour les éléments de la base, les hauteurs choisies. On considère alors pour tout s de $\operatorname{Pic} V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ la série $\zeta_{V,\boldsymbol{H}}(s) = \sum_{x \in V(K)} \boldsymbol{H}(-s, x)$. La conjecture 3.1.12 est donc équivalente à l'assertion que cette série converge sur l'intérieur du domaine $\omega_V^{-1} + C^1_{\text{eff}}(V) + i \operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}$.

Les résultats de Langlands impliquent cette convergence et montrent en outre que les séries d'Eisenstein s'étendent en des fonctions méromorphes (cf. [**Lan**, Lemme 4.1] ou [**MW**, §II.1.5, §IV.1.8]). Il reste donc essentiellement à déterminer la nature des pôles au voisinage de $\omega_V^{-1} + i \operatorname{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}$. On utilise pour cela les équations fonctionnelles satisfaites par les séries d'Eisenstein relatives à P_0 qui font intervenir des fonctions

$$c(w, \cdot) : X^*(A_0) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

où w appartient au groupe de Weyl relatif W_K (cf., par exemple, [**MW**, §IV.1.10]). Ces fonctions $c(w, \cdot)$, qui sont définies à l'aide d'intégrales, ont des prolongements méromorphes [**Lan**, §4] et vérifient

$$c(wv, \lambda) = c(w, v\lambda) c(v, \lambda).$$

La nature des pôles des séries d'Eisenstein relatives à P_0 est déterminée par les pôles de $c(w,\cdot)$. En décomposant w de manière minimale en les générateurs donnés par la base du système de racines correspondant à P_0, les pôles de $c(w,\cdot)$ se déduisent des pôles de $c(s_\alpha,\cdot)$, ce qui permet de se ramener au cas d'un groupe de rang relatif 1, pour lequel la méthode utilisée pour SL_2 s'applique (cf. [**Lan**, §7]) : $c(s_\alpha,\cdot)$ a au plus un pôle le long d'un hyperplan au voisinage du point qui nous intéresse. Cela donne la nature des pôles des séries d'Eisenstein relatives à P_0. Pour terminer la démonstration, on exprime les séries relatives à P comme résidus de celles relatives à P_0.

Le cas où $G = \mathrm{GL}_n$ a également été traité de manière directe par Thunder [**Th**].

5.2. Formule de Poisson et compactifications équivariantes. — Passons au cas des variétés toriques projectives et lisses. Là encore il nous faut d'abord décrire le groupe de Picard. Soit V une variété torique, compactification équivariante lisse d'un tore algébrique T. Soit $D(\overline{V})$ le $\mathbf{Z}$-module libre sur les diviseurs irréductibles équivariants de $\overline{V}$. On notera $(D_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ ces diviseurs. On a alors une suite exacte

$$0 \to X^*(\overline{T}) \to D(\overline{V}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(\overline{V}) \to 0,$$

le cône effectif dans $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ est engendré par les images des D_i et $\omega_{\overline{V}}^{-1}$ coïncide avec $\pi(\sum_{i=1}^r D_i)$. La description de $\mathrm{Pic}(V)$ et $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ s'obtient en considérant les invariants sous l'action du groupe de Galois.

Le groupe de Galois agit sur la famille des diviseurs D_i et on note $O_1,\dots,O_m$ les orbites de cette action. Pour chaque orbite, on se donne une métrique adélique sur le faisceau correspondant à $\sum_{D\in O_i} D$ et on obtient un accouplement

$$\begin{array}{rcl} D(V)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}\times V(k) & \to & \mathbf{C} \\ (L,x) & \mapsto & \boldsymbol{H}(L,x), \end{array}$$

où $D(V)$ désigne les invariants de $D(\overline{V})$ sous l'action de Galois.

Soit $\boldsymbol{s} = (s_1,\dots,s_m) \in D(V)$. Dans un premier temps Batyrev et Tschinkel montrent que la série $\zeta_{T,\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{s}) = \sum_{x\in T(K)} \boldsymbol{H}(-\boldsymbol{s},x)$ converge lorsque $\mathrm{Re}(s_i) > 1$. Il reste donc à déterminer la nature des pôles de la série.

On utilise pour cela la formule de Poisson suivante : on fixe temporairement ub m-uplet $\boldsymbol{s} = (s_1,\dots,s_m) \in D(V)$ avec $\mathrm{Re}(s_i) > 1$ et on pose $H = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{s},\cdot)$. Soit $T(\boldsymbol{A}_K)$ le groupe des adèles de T, produit restreint des $T(K_v)$. En écrivant H sous la forme

$$\forall x \in T(K), \quad H(x) = \prod_{v\in M_K} H_v(x),$$

où $H_v : T(K_v) \to \mathbf{R}$, on peut étendre H à $T(\boldsymbol{A}_K)$. Soit dx une mesure de Haar sur $T(\boldsymbol{A}_K)$. D'un point de vue formel, on souhaite écrire

$$\zeta_{T,H}(s) = \sum_{x \in T(K)} H(x)^{-s} = \int_{\chi \in (T(\boldsymbol{A}_K)/T(K))^\vee} \widehat{H}(\chi)\mathrm{d}\chi$$

où $(T(\boldsymbol{A}_K)/T(K))^\vee$ désigne le groupe des caractères topologiques de $T(\boldsymbol{A}_K)$ triviaux sur $T(K)$, dχ la mesure duale de la mesure dx et $\widehat{H}$ la transformée de Fourier de H donnée par la formule

$$\widehat{H}(\chi) = \int_{T(\boldsymbol{A}_K)} H_v(x)\chi(x)\mathrm{d}x.$$

Cette formule de Poisson a un sens à condition que les fonctions H et $\widehat{H}$ soient L^1. Pour H cela résulte de ce qui précède. D'un autre côté $\widehat{H}$ s'exprime comme produit de termes locaux qui, en dehors de quelques mauvaises places, peuvent s'écrire explicitement. Il suffit alors de majorer ces termes locaux en les mauvaises places et en les places archimédiennes.

La dernière partie de la preuve consiste à décrire le terme principal de $\zeta_{T,\boldsymbol{H}}$ en utilisant notamment l'expression explicite des transformées de Fourier locales. On utilise également à ce niveau des majorations uniformes de fonctions L de Hecke. Pour terminer, un calcul de résidu itéré permet de passer au quotient dans la suite exacte

$$0 \to X^*(T)_K \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to D(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to \mathrm{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to 0$$

au niveau duquel cette partie principale s'obtient en multipliant un produit eulérien convergent par la fonction caractéristique du cône $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$ définie par

$$\forall s \in \mathrm{Pic}\, V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}, \quad \chi_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)}(s) = \int_{C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee} \exp(-\langle s, t\rangle)\mathrm{d}t$$

où $C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee$ est le cône dual de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$:

$$C^1_{\mathrm{eff}}(V)^\vee = \{\, x \in (\mathrm{Pic}\, V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R})^\vee \mid \forall y \in C^1_{\mathrm{eff}}(V),\ \langle x, y\rangle \geqslant 0 \,\}.$$

Ceci donne la nature des pôles de la fonction zêta des hauteurs et un argument taubérien permet de conclure.

Les méthodes employées par Chambert-Loir et Tschinkel pour les compactifications d'espaces affines reposent également sur des formules de Poisson, mais de nature additive, et des calculs explicites de transformée de Fourier locale.

Le résultat de Strauch et Tschinkel sur les fibrations en variétés toriques audessus de variétés de drapeaux repose sur une combinaison des méthodes employées dans chacun des deux cas. Les arguments de descente utilisés dans ce cas ont été généralisés par Chambert-Loir et Tschinkel à des fibrations en variétés toriques plus générales [**CLT3**], [**CLT4**].

Les résultats de Batyrev et Tschinkel ont été redémontrés dans le cas des variétés toriques déployées sur $\mathbf{Q}$ par Salberger [**Sal**] avec une méthode totalement différente basée sur le fait que le torseur universel sur V considéré par Colliot-Thélène et Sansuc dans [**CTS**] est un ouvert d'un espace affine (cf. également [**Del**], [**Co**] et [**MP**]) et par la Bretèche, avec un contrôle affiné du terme d'erreur [**Bre1**] (cf. également [**CLT4**]).

5.3. Le cas de la surface de Del Pezzo de degré 5. — Dans ce cas, Salberger avait obtenu une majoration de $N_{U,H}(B)$ du type souhaité. La démonstration de la Bretèche, comme celle de Salberger, utilise la description du torseur universel comme un ouvert du cône de $\Lambda^2 K^5$ au-dessus de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,5)$ (cf. également [**Sk**]). Ce cône peut être décrit par les équations de Plücker. En utilisant ce fait, la Bretèche ramène la question initiale à un dénombrement de décuplets $(z_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant 5}$ vérifiant les équations de Plücker ainsi que des conditions de primalité

$$\mathrm{pgcd}(z_{i,j}, z_{i,k}) = 1 \quad \text{si} \quad j \neq k.$$

Après une réduction supplémentaire utilisant le groupe d'automorphismes de la variété, la Bretèche montre l'estimation souhaitée grâce à des techniques fines de théorie analytique des nombres.

6. Le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel

Notation 6.0.1. — Soient n un entier strictement positif et $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbf{Q}[X_0, \ldots, X_n]$ quatre formes linéaires linéairement indépendantes. On considère l'hypersurface V dans le produit $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^3$ définie par l'équation

$$\sum_{i=0}^{3} l_i(x) y_i^3 = 0.$$

Théorème 6.0.2 **(Batyrev et Tschinkel [BT2]).** — *La variété de Fano V ci-dessus est un contre-exemple à la conjecture 3.2.3.*

L'idée de la démonstration est la suivante : par le théorème de Lefschetz, on a des isomorphismes

$$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^3) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(V)$$

et donc, si H est une hauteur relative au fibré anticanonique sur V, on devrait obtenir l'existence d'une extension finie K_0 de K et un ouvert dense O tels que pour tout $K' \supset K_0$ on ait

$$N_{O_{K'},H}(B) \sim C_{K'} B(\log B).$$

Mais le faisceau anticanonique de V est donné par $\omega_V^{-1} = \mathscr{O}_V(n, 1)$. Autrement dit, on peut prendre comme hauteur

$$H((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)) = H_{\mathbf{P}^n}((x_0 : \ldots : x_n))^n H_{\mathbf{P}^3}((y_0 : y_1 : y_2 : y_3)).$$

D'un autre côté les fibres V_x de la projection pr_1 sur la première composante sont des surfaces cubiques lisses si

$$\prod_{i=0}^{3} l_i(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$$

et la restriction de H à une telle fibre est, à une constante près, la restriction de la hauteur $H_{\mathbf{P}^3}$. Or, pour tout x vérifiant la condition précédente

$$\omega_{V_x}^{-1} = \mathscr{O}_{V_x}(1).$$

Le comportement espéré pour un ouvert d'une telle fibre est donc

$$C_x B(\log B)^{\operatorname{rg} \operatorname{Pic}(V_x) - 1}.$$

Mais tout ouvert dense de V rencontre une infinité de fibres pour lesquelles $\operatorname{rg} \operatorname{Pic}(V_x) > 2$.

On peut en fait être plus précis : si K contient les racines cubiques de l'unité et si $l_i(x_0 : \ldots : x_n)$ est un cube pour $i = 0, 1, 2, 3$, alors la fibre est une surface cubique déployée contenant 27 droites rationnelles et peut être obtenue comme éclatement de $\mathbf{P}^2$ en 6 points rationnels. Soit X l'éclaté de $\mathbf{P}^2$ en trois de ces points, on a donc une factorisation

$$V_x \xrightarrow{\pi} X \to \mathbf{P}^2$$

et en étendant une base de $\Gamma(V_x, \omega_{V_x}^{-1})$ en une base de $\Gamma(X, \omega_X^{-1})$, on obtient une hauteur H_X sur X relative à ω_X^{-1} telle que

$$\forall y \in V_x(k), \quad H_{V_x}(y) \leqslant H_X(\pi(y))$$

et donc, comme la conjecture est montrée pour X, pour tout ouvert dense U de V_x, on a

$$N_{U,H}(B) \geqslant N_{\pi(U),H_X}(B) \geqslant CB(\log B)^3.$$

L'ensemble des points $(x_0 : \ldots : x_n)$ tels que $l_i(x_0, \ldots, x_n)$ soit un cube est Zariski dense dans $\mathbf{P}^n$. Donc pour tout ouvert U de V, on a

$$N_{U,H}(B) \geqslant CB(\log B)^3$$

en contradiction avec la formule attendue.

Plusieurs directions s'offrent pour modifier les conjectures de Manin afin de prendre en compte ce contre-exemple. Tout d'abord il est raisonnable d'espérer que chacune des fibres de pr_1 dont le rang du groupe de Picard est maximal soit faiblement accumulatrice. Une première solution consiste donc à rajouter l'hypothèse arithmétique peu pratique que pour toute hauteur relative au faisceau anticanonique, le complémentaire des sous-variétés faiblement accumulatrices forme un ouvert de Zariski de la variété. Les exemples du §4 vérifient une telle propriété.

Une deuxième direction est de noter que pr_1 est une des fibrations associées aux arêtes de $C^1_{\mathrm{eff}}(V)$. Une idée est donc de raisonner par récurrence sur la dimension en utilisant des fibrations successives. Une telle démarche est notamment explorée dans [**BT4**].

Une troisième direction serait de noter que les points rationnels des fibres ayant un groupe de Picard non réduit à $\mathbf{Z}$ constituent un ensemble mince en un sens analogue à celui du §2. Le terme dominant du comportement asymptotique refléterait donc la géométrie du revêtement X. Cet ensemble ne contenant pas tous les points rationnels, une question naturelle, qui s'inscrit dans la démarche des conjectures de Manin, serait de se demander quel est le nombre de points de hauteur bornée sur le complémentaire de cet ensemble. Si celui-ci se révélait être du type attendu, il faudrait déterminer de manière systématique comment décrire ces ensembles minces accumulateurs.

Seule l'étude de nouveaux exemples permettra de dire laquelle de ces directions est la plus fructueuse.

7. Autres développements

D'autres exemples sont actuellement étudiés : notamment Shalika, Takloo-Bighash et Tschinkel se penchent sur des compactifications lisses de formes intérieures de groupes semi-simples de type adjoint.

D'importants progrès ont été réalisés pour les surfaces cubiques pour lesquelles différentes majorations ont été obtenues (cf. Heath-Brown [**HB**] et Broberg [**Bro**]) ainsi que des minorations (Swinnerton-Dyer [**SSD**]).

Plusieurs auteurs, dont l'orateur [**Pe**], ont proposé une formule empirique pour décrire la constante C intervenant dans le comportement asymptotique. Cette formule, dans le cas d'une hauteur relative au faisceau anticanonique, s'exprime en termes d'une mesure de Tamagawa sur l'espace des adèles faisant intervenir les métriques locales. Cette formule est vérifiée pour au moins un choix des métriques sur le faisceau anticanonique dans les cas décrits au paragraphe 4. Nous renvoyons à [**BT4**] pour une description de cette interprétation dans le cas général.

Il est également possible de considérer un analogue géométrique de ces conjectures pour les variétés sur un corps global de caractéristique finie (cf. [**BM**, §3.13]). Quelques résultats ont été obtenus dans cette direction notamment pour les variétés de drapeaux et certaines variétés toriques [**Bo**]. Cet analogue pourrait permettre de mieux cerner les conditions géométriques exactes pour lesquelles la formule (F) peut être valide.

En conclusion, ce sujet est encore en pleine éclosion, riche en questions ouvertes à la fois arithmétiques et géométriques, où les conjectures de Manin se sont révélées un fil conducteur très efficace.

Remerciements. Je remercie chaleureusement tous ceux qui ont accepté de relire ce texte dans un délai très bref et, en particulier, L. Bonavero, R. de la Bretèche, A. Chambert-Loir, J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari, G. Rémond et Y. Tschinkel.

Références

[Ar] S. J. Arakelov, *Theory of intersections on the arithmetic surface*, Proceedings of the international congress of mathematicians, Vol. 1 (Vancouver, 1974), Canad. Math. Congress, Montréal, 1975, pp. 405–408.

[Ba] V. V. Batyrev, *The cone of effective divisors of threefolds*, Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 3 (Novosibirsk, 1989), Contemp. Math., vol. 131, Part 3, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, pp. 337–352.

[BM] V. V. Batyrev et Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ———, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), n° 1, 41–46.

[BT3] ———, *Height zeta functions of toric varieties*, J. Math. Sci. **82** (1996), n° 1, 3220–3239.

[BT4] ______, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[BT5] ______, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. 7 (1998), n° 1, 15–53.

[Bil] H. Billard, *Propriétés arithmétiques d'une famille de surfaces $K3$*, Compositio Math. **108** (1997), n° 3, 247–275.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.

[BGS] J.-B. Bost, H. Gillet et C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. 7 (1994), 903–1027.

[Bo] D. Bourqui, *Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel*, J. of Number Theory **94** (2002), 343–358.

[Bre1] R. de la Bretèche, *Compter des points d'une variété torique*, J. of Number theory **87** (2001), 315–331.

[Bre2] ______, *Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de Del Pezzo de degré 5*, Duke Math. J. **113** (2002), n° 3, 421–464.

[Bro] N. Broberg, *Rational points on cubic surfaces*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 13–35.

[CLT1] A. Chambert-Loir et Y. Tschinkel, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, I*, Compositio Math. **124** (2000), n° 1, 65–93.

[CLT2] ______, *Points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups, II*, J. of Number Theory **85** (2000), n° 2, 172–188.

[CLT3] ______, *Torseurs arithmétiques et espaces fibrés*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 37–70.

[CLT4] ______, *Fonctions zêta des hauteurs des espaces fibrés*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhaüser, Basel, 2001, pp. 71–115.

[CLT5] ______, *On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups*, Invent. Math. **148** (2002), n° 2, 421–452.

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTSSD] J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov et H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Double fibres and double covers : paucity of rational points*, Acta Arith. **79** (1997), n° 2, 113–135.

[Co] D. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), n° 1, 17–50.

[Del] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), n° 3, 315–339.

[Fa] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), n° 3, 349–366.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[Go] R. Godement, *Introduction à la théorie de Langlands*, Séminaire Bourbaki 19-ème année, 1966/67, n° 321.

[HB] D. R. Heath-Brown, *Counting rational points on cubic surfaces*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 13–30.

[La] S. Lang, *Number Theory III, diophantine geometry*, Encyclopaedia of Math. Sciences, vol. 60, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Lan] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math., vol. 544, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1976.

[Ma] Y. I. Manin, *Notes on the arithmetic of Fano threefolds*, Compositio Math **85** (1993), 37–55.

[Mc] D. McKinnon, *Counting rational points on $K3$ surfaces*, J. of number theory **84** (2000), n° 1, 49–62.

[MP] A. S. Merkurjev et I. A. Panin, *K-theory of algebraic tori and toric varieties*, K-Theory **12** (1997), n° 2, 101–143.

[MW] C. Moeglin et J.-L. Waldspurger, *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein, une paraphrase de l'écriture*, Progress in Math., vol. 113, Birkhaüser, Basel, 1994.

[Né1] A. Néron, *L'arithmétique sur les variétés algébriques [d'après A. Weil]*, Séminaire Bourbaki 4-ème année, 1951/52, n° 66.

[Né2] ———, *Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes*, Ann. of Math. **82** (1965), 249–331.

[Pe] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Se] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

[Sk] A. N. Skorobogatov, *On a theorem of Enriques—Swinnerton-Dyer*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **2** (1993), n° 3, 429–440.

[SSD] J. B. Slater et H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting points on cubic surfaces, I*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 1–12.

[ST1] M. Strauch et Y. Tschinkel, *Height zeta functions of twisted products*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 273–282.

[ST2] ______, *Height zeta functions of toric bundles over flag varieties*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), n° 3, 325–396.

[Th] J. L. Thunder, *Asymptotic estimates for rational points of bounded height on flag varieties*, Compositio Math. **88** (1993), 155–186.

[Va] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1981.

[We] A. Weil, *Arithmetic on algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **53** (1951), 412–444.

Juin 2001

E. Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`