CORPS DE FONCTIONS DE VARIÉTÉS HOMOGÈNES ET COHOMOLOGIE GALOISIENNE*

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Soit V une variété de drapeaux généralisée sur un corps k. Il existe alors des extensions finies k_i de k pour $1 \leqslant i \leqslant m$, des éléments α_i du groupe de Brauer de k_i et une suite exacte naturelle

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} \mathrm{Ker}\Big(H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

où $H^i(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ désigne le groupe de cohomologie galoisienne à valeur dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tordu deux fois et $\mathrm{CH}^2(V)$ le groupe de Chow des cycles de codimension deux modulo l'équivalence rationnelle.

Abstract. — Let V be a generalized flag variety over a field k. Then there exist finite field extensions k_i of k for $1 \leqslant i \leqslant m$, elements α_i of the Brauer group of k_i and a natural exact sequence

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} \mathrm{Ker}\Big(H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\Big) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0$$

where the groups $H^j(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ are the Galois cohomology groups with coefficients in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ twisted twice and $\mathrm{CH}^2(V)$ the Chow group of cycles of codimension two modulo rational equivalence.

Abridged English Version – For any field L we denote by L^s a separable closure of L. For any discrete $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-module M, $H^i(L,M)$ is the Galois cohomology group of degree i with coefficients in M. If L' is a finite extension of L, we denote by $N_{L'/L}$ the corestriction map from $H^i(L',M)$ to $H^i(L,M)$. If a_i belongs to k^* for $1 \leqslant i \leqslant n$ then (a_i) denote their images in $H^1(k,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ and

*C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 891–896

$(a_1,\dots,a_n)$ the cup-product $(a_1)\cup\dots\cup(a_n)$. The Galois cohomology groups with coefficients in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ twisted twice are denoted by $H^i(L,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ and the Brauer group of L by $\operatorname{Br} L$.

Let V be an integral smooth variety over a field L. Then V^s denotes the product $V\times_{\operatorname{Spec} L}\operatorname{Spec} L^s$. The function field of V is denoted by $L(V)$. The group $\mathrm{CH}^i(V)$ is the Chow group of cycles of codimension i modulo rational equivalence. For any $i\geqslant 0$, the sheaf $\mathscr{K}_i$ is the sheaf for Zariski topology corresponding to the presheaf which maps an open set U to $K_i(U)$, the i-th group of Quillen's K-theory. A generalized flag variety over L is a projective variety over L which is homogeneous under the action of a connected linear algebraic group.

Theorem 1. — *Let V be a generalized flag variety over a field k. Let $\mathscr{G}$ be the Galois group of k^s over k. Then the Picard group of V^s is a permutation module. Thus it may be written as $\bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Z}[\mathscr{G}/\mathscr{H}_i]$ where the groups $\mathscr{H}_i$ are open subgroups of $\mathscr{G}$. Let k_i be the corresponding fields. There exist elements α_i of $\operatorname{Br} k_i$ and a natural complex*

$$\bigoplus_{i=1}^m k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

the homology of which is isomorphic to the torsion subgroup of $\mathrm{CH}^2(V)$. In particular, this homology is finite.

The proof, which is a generalization of the proof of the main result in [**Pe2**], is based upon a result of Bruno Kahn [**Kah**, corollaire 3.2] giving an isomorphism

$$\operatorname{Ker}\left(H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right)\xrightarrow{\sim} H^1(\mathscr{G},K_2k^s(V)/K_2k^s),$$

proposition 3.6 of [**CTR**], which yields an exact sequence

$$\begin{aligned} H^1(V^s,\mathscr{K}_2)^{\mathscr{G}} &\to H^1(\mathscr{G},K_2(k^s(V))/H^0(V^s,\mathscr{K}_2))\to\\ &\to \operatorname{Ker}(\mathrm{CH}^2(V)\to\mathrm{CH}^2(V^s))\to H^1(\mathscr{G},H^1(V^s,\mathscr{K}_2))\end{aligned}$$

and the following proposition :

Proposition 1. — *The group $\bigoplus_{i,j\in\mathbf{N}} H^j(V^s,\mathscr{K}_{i+j})$ is a free $\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} K_ik^s$-module with a canonical basis which is invariant under the action of $\mathrm{Gal}(k^s/k)$. In particular if $i\geqslant 0$,*

$$H^1(\mathrm{Gal}(k^s/k),H^i(V^s,\mathscr{K}_{i+1}))=0.$$

We then apply theorem 1 to get the following proposition :

Proposition 2. — *Let k be a field of characteristic different from 2 and containing a fourth root of unity. Let a_i be elements of k^* for $1 \leqslant i \leqslant 6$. Let V be the product of the four conics corresponding to the symbols (a_2, a_5), (a_4, a_1), (a_6, a_3) and $(a_2a_4a_6, a_1a_3a_5)$. Then $(a_1, a_2, a_3) + (a_4, a_5, a_6) \in H^3(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ maps to 0 in $H^3(k(V), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. In general, this defines a nontrivial element in $\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}}$.*

1. Notations et énoncé du résultat.

Pour tout corps L, on note L^s une clôture séparable de L. Pour tout $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-module discret M, les groupes de cohomologie galoisienne $H^i(\mathrm{Gal}(L^s/L), M)$ sont désignés par $H^i(L, M)$. Si L' est une extension finie de L, on note $N_{L'/L}$ l'application de corestriction de $H^i(L', M)$ à $H^i(L, M)$. Si la caractéristique de L ne divise pas n alors μ_n désigne le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans L^s. Si L est un corps de caractéristique exponentielle p, i un entier positif et j un entier, on pose (cf. [**Kah**])

$$H^i(L, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) = \varinjlim_{(p,n)=1} H^i(L, \mu_n^{\otimes j})$$

et, si $j = 0$, 1 ou 2,

$$H^i(L, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)) = \varinjlim_{r} H^{i-j}(L, K_j(L^s)/p^r).$$

Si $j = 0$, 1 ou 2, on pose alors

$$H^i(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)) = H^i(L, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) \oplus H^i(L, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)).$$

Si V est une variété sur L et L' une extension de L, $V_{L'}$ désigne $V \times_{\mathrm{Spec}\, L} \mathrm{Spec}\, L'$ et V^s la variété V_{L^s}. Si V est intègre, $k(V)$ désigne son corps de fonctions. Le faisceau $\mathscr{K}_i$ est le faisceau pour la topologie de Zariski sur V associé au préfaiseau $U \mapsto K_i(U)$ où $K_i(U)$ désigne le i-ème groupe de K-théorie de Quillen. Si G est un groupe algébrique linéaire semi-simple, une variété de drapeaux généralisée sous G est une variété projective qui est homogène sous G.

Le but de cette Note est de montrer le théorème suivant

Théorème 1. — *Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple sur un corps k de groupe de Galois absolu $\mathscr{G}$. Soit V une variété de drapeaux généralisée sous G. Alors le groupe de Picard de V^s est un module de permutation et se met donc sous la forme $\bigoplus_{i=1}^m \mathbf{Z}[\mathscr{G}/\mathscr{H}_i]$ où les $\mathscr{H}_i$ sont des sous-groupes ouverts de $\mathscr{G}$. Soient k_i les* *corps correspondants. Il existe des classes* α_i *de* $\operatorname{Br} k_i$ *et un complexe naturel*

$$\bigoplus_{i=1}^{m} k_i^* \xrightarrow{N_{k_i/k}(.\cup\alpha_i)} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

dont l'homologie est canoniquement isomorphe au sous-groupe de torsion de $\mathrm{CH}^2(V)$*. En particulier, cette homologie est finie.*

2. $\mathscr{K}$-cohomologie d'une variété de drapeaux généralisée.

Soient k un corps de clôture séparable k^s et $\mathscr{G}$ le groupe de Galois de k^s sur k. Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple sur k et V une variété de drapeaux généralisée sous G. On fixe un sous-groupe parabolique P de G^s tel que V^s soit isomorphe à $P\backslash G^s$ et un sous-groupe de Borel B de P. Soit T un tore maximal de B, Φ l'ensemble des racines de T dans G^s et W le groupe de Weyl correspondant. La lettre Δ désigne la base de Φ correspondant à B. Pour tout $J \subset \Delta$, P_J désigne le sous-groupe parabolique correspondant, W_J le sous-groupe de W engendré par les symétries s_α pour $\alpha \in J$ et W^J l'ensemble des uniques éléments de longueur minimale dans les classes $W_J w$ lorsque w décrit W. On note W_i^J le sous-ensemble de W^J des éléments de longueur i et V_J la variété $P_J\backslash G^s$. Pour tout $w \in W$, $X_{w,J}$ désigne l'adhérence de l'image dans V_J de la double classe BwB. L'élément le plus long dans W_J est noté w_J.

Proposition 1. — *Avec les notations qui précèdent, le groupe* $\bigoplus_{i,j\in\mathbf{N}} H^j(V_J, \mathscr{K}_{i+j})$ *est un* $\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} K_i k^s$*-module libre muni d'une base canonique donnée par les classes* $[X_{J,w}]$ *dans* $H^i(V_J, \mathscr{K}_i)$ *pour* w *appartenant à* $W^J_{\dim V_J - i}$*. En outre l'application* $w \mapsto w_J w w_\Delta$ *induit une bijection de* W_i^J *dans* $W^J_{\dim V_J - i}$ *et, en posant* $\bar{w} = w_J w w_\Delta$*, on obtient dans l'anneau de Chow* $\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} H^i(V_J, \mathscr{K}_i)$*, la relation*

$$\forall (w, w') \in W_i^J \times W^J_{\dim V_J - i},\ [X_{J,w}].[X_{J,w'}] = \delta_{\bar{w},w'}[X_{J,e}]$$

où $[X_{J,e}]$ *est la classe d'un point.*

Démonstration. — Soit $\pi_J : G \to V_J$ la projection canonique. Par [**Bo**, theorem 21.29], les sous-variétés $\pi_J(BwB)$ pour $w \in W^J$ forment une décomposition cellulaire de V_J et pour tout w de W^J la dimension de $\pi_J(BwB)$ est égale à $l(w)$. Or les groupes $H^i(V_J, \mathscr{K}_i)$ coïncident avec $\mathrm{CH}^i(V_J)$. Donc par [**Fu**, example 1.9.1], les classes $[X_{J,w}]$ pour w appartenant à $W^J_{\dim V_J - i}$ engendrent $H^i(V_J, \mathcal{K}_i)$. D'après [**Dem**, corollaire page 69], il s'agit d'une base lorsque $J = \varnothing$.

Un calcul élémentaire sur les longueurs montre que, si $w \in W^J_i$, alors $w_J w w_\Delta$ appartient à $W^J_{\dim V_J - i}$. On note $\pi_{\varnothing,J} : V_\varnothing \to V_J$ la projection canonique. Soit w un élément de W^J_i et w' un élément de $W^J_{\dim V_J - i}$. Par [**Bo**, 21.29], $\pi_{\varnothing,J}(\pi_\varnothing(Bw_JwB))$ coïncide avec $\pi_J(BwB)$. Comme $l(w_Jw) = \dim(V_\varnothing) - \dim(V_J) + l(w)$, on obtient que $\pi^{-1}_{\varnothing,J}(X_{J,w}) = X_{\varnothing,w_Jw}$. En appliquant [**Dem**, proposition 3.1] et [**Fu**, proposition 8.3], on obtient

$$\begin{array}{rclcl} [X_{J,w}].[X_{J,w'}] & = & [X_{J,w}].\pi_{\varnothing,J_*}([X_{\varnothing,w'}]) & = & \pi_{\varnothing,J_*}(\pi^*_{\varnothing,J}([X_{J,w}]).[X_{\varnothing,w'}]) \\ & = & \pi_{\varnothing,J_*}([X_{\varnothing,w_Jw}].[X_{\varnothing,w'}]) & = & \pi_{\varnothing,J_*}(\delta_{w_Jw,w'w_\Delta}[X_{\varnothing,e}]) \\ & = & \delta_{\bar{w},w'}[X_{J,e}]. & & \end{array}$$

Les éléments $[X_{J,w}]$ pour $w \in W_J$ forment donc une base de l'anneau de Chow et la formule d'intersection est démontrée.

Choisissons maintenant une bijection de $\{1,\ldots,N\}$ dans W^J telle que, si $i \leqslant i'$, alors $l(w_i) \geqslant l(w_{i'})$. Pour tout i compris entre 0 et N on note O_i l'ouvert $\bigcup_{j \leqslant i} \pi_J(Bw_jB)$. Nous allons démontrer par récurrence sur i que, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant N$, le $\bigoplus_{j\in\mathbf{N}} K_jk^s$-module $\bigoplus_{j,l\in\mathbf{N}} H^l(O_i, \mathcal{K}_{j+l})$ est libre avec une base donnée par les classes

$$\left[\overline{\pi_J(Bw_jB)}\right] \in H^{\dim V_J - l(w_j)}(V_J, \mathcal{K}_{\dim V_J - l(w_j)})$$

où j décrit $\{1,\ldots,i\}$. Pour $i = 1$ on a que l'ouvert O_1 est isomorphe à l'espace affine de dimension $\dim V_J$ et le résultat est une conséquence du théorème d'homotopie pour la $\mathcal{K}$-cohomologie (cf. [**Sh**, theorem 2.4]). Supposons le résultat connu pour $i-1$. Alors $U_i = O_i - O_{i-1} = \pi_J(Bw_iB)$ est isomorphe à l'espace affine de dimension $l(w_i)$. Par le théorème d'homotopie, on obtient que $H^p(U_i, \mathcal{K}_q)$ est isomorphe à K_qk^s si p est nul et est trivial sinon. Or on a des suites exactes longues

$$\cdots \to H^{p-d}(U_i, \mathcal{K}_{q-d}) \to H^p(O_i, \mathcal{K}_q) \to H^p(O_{i-1}, \mathcal{K}_q) \xrightarrow{\partial_i^{p,q}} H^{p+1-d}(U_i, \mathcal{K}_{q-d}) \to \cdots$$

où $d=\dim V_J - l(w_i)$. Mais si $p>d$, alors le groupe $H^{p-d}(U_i,\mathcal{K}_{p-d})$ est trivial et $\partial_i^{p-1,p}=0$. Si, par contre, $p=d$, alors sachant que

$$\mathrm{rk}(H^p(V_J,\mathcal{K}_p)) = \# W^J_{\dim V_J - p} = \sum_{\{i \mid l(w_i)=\dim V_J - p\}} \mathrm{rk}(\mathrm{Coker}\,\partial_i^{p-1,p}),$$

on obtient que les applications $\partial_i^{p,p-1}$ sont triviales. Mais les morphismes ∂_i sont $K_* k^s$-linéaires et par hypothèse de récurrence $\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} H^p(O_{i-1},\mathcal{K}_{p+i})$ est un $\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} K_i k^s$-module libre. Donc toutes les applications $\partial_i^{p,q}$ sont nulles. En d'autres termes on a obtenu un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{p-d}(U_i,K_{q-d}) \arrow[r] & H^p(O_i,\mathcal{K}_q) \arrow[r] & H^p(O_{i-1},\mathcal{K}_q) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{q-p}k^s\otimes H^{p-d}(U_i,\mathcal{K}_{p-d}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & K_{q-p}k^s\otimes H^p(O_i,\mathcal{K}_p) \arrow[r] \arrow[u] & K_{q-p}k^s\otimes H^p(O_{i-1},\mathcal{K}_p) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Par conséquent la flèche verticale du centre est également un isomorphisme. □

Corollaire 1. — *Les $\mathcal{G}$-réseaux $H^i(V^s,\mathcal{K}_i)$ sont des modules de permutation.*

Démonstration. — On note I la partie de Δ correspondant à P. Soit $C^i_{\text{eff}} \subset H^i(V^s,\mathcal{K}_i)$ le cône des classes de diviseurs effectifs. Alors $[X_{I,w}]$ appartient à ce cône. Réciproquement, soit $\alpha = \sum_{w\in W^J_i} n_w[X_I,w]$ un élément de $C^{\dim V-i}_{\text{eff}}$. Alors, d'après [**Fu**, page 441] pour tout w appartenant à $W^I_{\dim V-i}$ on a $[X_{I,w}].\alpha \geqslant 0$. Mais pour tout élément $w\in W^I_i$, $n_w=[X_{I,\bar w}].\alpha$. Donc on obtient que $C^{\dim V-i}_{\text{eff}}$ est le monoïde engendré par les $[X_{I,w}]$ où w décrit W^J_i. L'action de $\mathcal{G}$ sur $H^i(V^s,\mathcal{K}_i)$ laisse C^i_{eff} globalement invariant. Ses faces de dimension un sont également invariantes et la base définie par $[X_{I,w}]$ est globalement invariante. □

Corollaire 2. — *Pour tout entier positif i, on a $H^1(\mathcal{G},H^i(V^s,\mathcal{K}_{i+1}))=0$.*

Démonstration. — Par la proposition 1, on a des isomorphismes

$$H^i(V^s,\mathcal{K}_{i+1}) \tilde{\to} k^{s*}\otimes_{\mathbf{Z}} H^i(V^s,\mathcal{K}_i).$$

Le corollaire résulte alors du corollaire 1 et du théorème 90 d'Hilbert. □

3. Démonstration du théorème 1

Par [**CTR**, proposition 3.6], on a une suite exacte

$$H^1(V^s,\mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \to H^1(\mathcal{G}, K_2(k^s(V))/H^0(V^s,\mathcal{K}_2)) \to \\ \to \mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(V^s)) \to H^1(\mathcal{G}, H^1(V^s,\mathcal{K}_2)).$$

D'après le corollaire 2, $H^1(\mathcal{G}, H^1(V^s,\mathcal{K}_2))$ est trivial et par la proposition 1 on a des isomorphismes $K_2k^s \xrightarrow{\sim} H^0(V^s,\mathcal{K}_2)$ et $\mathrm{Pic}\, V^s \otimes k^{s*} \xrightarrow{\sim} H^1(V^s,\mathcal{K}_2)$. Mais d'après [**Kah**, corollaire 3.2] qui est un des éléments-clefs de cette démonstration,

$$H^1(\mathcal{G}, K_2(k^s(V))/K_2k^s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\left(H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right).$$

En outre, comme $\mathrm{CH}^2(V^s)$ est sans torsion, on a

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(V^s)) = \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}}$$

ce qui donne la suite exacte

$$(\mathrm{Pic}\, V^s \otimes k^{s*})^{\mathcal{G}} \to \mathrm{Ker}\left(H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))\right) \to \mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

Comme $(\mathrm{Pic}\, V^s \otimes k^{s*})^{\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^m k_i^*$ il reste à montrer que le morphisme de k_i^* dans $H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ a bien la forme désirée. Mais on vérifie que les morphismes considérés sont compatibles avec la corestriction. Il suffit donc de considérer le cas où $k_i = k$. Soit α_i l'image du générateur naturel de $\mathbf{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_i]^{\mathcal{G}} \subset \mathrm{Pic}\, V^{s\mathcal{G}}$ dans $\mathrm{Br}\, k$ par l'application composée

$$\mathrm{Pic}\, V^{s\mathcal{G}} \to H^1(\mathcal{G}, k^s(V)^*/k^{s*}) \to \mathrm{Br}(k).$$

On vérifie alors comme dans [**Pe2**, lemma 4.3] la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} k^* \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \\ & k^* \otimes \alpha\mathbf{Z}. \arrow[ur, "\cup"'] & \end{tikzcd}$$

4. Application.

Proposition 2. — *Soit k un corps de caractéristique différente de 2 et contenant des racines quatrièmes de l'unité. Soit $a_i \in k^*$ pour $1 \leqslant i \leqslant 6$. On pose*

$$A_1 = a_2,\quad A_2 = a_4,\quad A_3 = a_6,\quad A_4 = a_2a_4a_6$$
$$B_1 = a_5,\quad B_2 = a_1,\quad B_3 = a_3,\quad B_4 = a_1a_3a_5.$$

On note V le produit des quatre coniques C_i d'équations homogènes

$$T_{i,1}^2 - A_i T_{i,2}^2 - B_i T_{i,3}^2 = 0.$$

Alors l'élément $(a_1, a_2, a_3) + (a_4, a_5, a_6)$ *de* $H^3(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ *s'annule dans* $H^3(k(V), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ *et définit en général un élément non nul de* $\mathrm{CH}^2(V)_{\mathrm{tors}}$.

Démonstration. — Un calcul explicite à partir du théorème 1 amène à considérer la fonction

$$f = \left(\frac{T_{1,1}}{T_{1,3}}\right)^2 a_1 - \left(\frac{T_{2,1}}{T_{2,3}}\right)^2 a_5 = \left(\frac{T_{2,1}T_{1,2}}{T_{2,3}T_{1,3}}\right)^2 a_2 - \left(\frac{T_{1,1}T_{2,2}}{T_{1,3}T_{2,3}}\right)^2 a_4 \in k(C_1 \times C_2 \times C_3).$$

D'après [**Lam**, chapter 10, proposition 1.3], dans $H^3(k(C_1 \times C_2 \times C_3), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ on a les relations

$$\begin{aligned}
(f, a_1a_3a_5, a_2a_4a_6) &= \left(a_2\left(\frac{T_{2,1}T_{1,2}}{T_{2,3}T_{1,3}}\right)^2 - a_4\left(\frac{T_{1,1}T_{2,2}}{T_{1,3}T_{2,3}}\right)^2, a_2a_4, a_1a_3a_5\right) \\
&\quad + \left(a_1\left(\frac{T_{1,1}}{T_{1,3}}\right)^2 - a_5\left(\frac{T_{2,1}}{T_{2,3}}\right)^2, a_1a_5, a_6\right) \\
&= (a_2, a_4, a_1a_3a_5) + (a_1, a_5, a_6) \\
&= (a_2, a_3, a_4) + (a_1, a_5, a_6).
\end{aligned}$$

Ce dernier élément s'annule donc dans $H^3(k(V), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Mais $(a_1, a_2, a_3) + (a_1, a_5, a_6) + (a_2, a_3, a_4) + (a_4, a_5, a_6)$ appartient au groupe

$$< (a_i), 1 \leqslant i \leqslant 6 > \cup < (a_2, a_5), (a_4, a_1), (a_6, a_3), (a_1a_3a_5, a_2a_4a_6) >$$

qui est contenu dans le noyau de l'application de restriction de k à $k(V)$.

Pour la seconde assertion, constatons d'abord que le complexe du théorème 1 s'écrit

$$S \otimes k^* \xrightarrow{\cup} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

où S est le sous-groupe de $\mathrm{Br}\, k$ engendré par les (A_i, B_i) pour $1 \leqslant i \leqslant 4$. D'après [**Pe2**, remark 4.1] qui utilise le théorème principal de Merkur'ev et Suslin [**MS**], si ce complexe est exact il en est a fortiori de même du complexe obtenu en remplaçant $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)$ par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On se place alors dans le cas où k est de la forme $k_0((a_1))\dots((a_6))$ pour des indéterminées a_i et un corps algébriquement clos k_0. Par [**Pe1**, page 255], $H^*(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est alors isomorphe à $\Lambda^* U$ où U est le sous-groupe de $k^*/(k^*)^2$ engendré par les (a_i). Un calcul élémentaire donne alors que

$$(a_1) \wedge (a_2) \wedge (a_3) + (a_4) \wedge (a_5) \wedge (a_6) \notin S \wedge U. \quad \square$$

Je remercie Markus Rost pour les discussions qui m'ont amené à étendre le résultat principal de [**Pe2**] aux variétés de drapeaux généralisées.

Références

[Bo] A. Borel, *Linear algebraic groups (Second enlarged edition)*, Graduate Texts in Math., vol. 126, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1991.

[CTR] J.-L. Colliot-Thélène and W. Raskind, *$\mathscr{K}_2$-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.

[Dem] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 53–88.

[Fu] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Kah] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55–100.

[Lam] T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin, Reading, 1973.

[MS] A. S. Merkur′ev and A. A. Suslin, *$\mathscr{K}$-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), n° 5, 1011–1046; English transl. in Math. USSR-Izv. **21** (1983), n° 2, 307–340.

[Pe1] E. Peyre, *Unramified cohomology and rationality problems*, Math. Ann. **296** (1993), 247–268.

[Pe2] ———, *Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology*, K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara, 1992) (B. Jacob and A. Rosenberg, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.2, AMS, Providence, 1995, pp. 369–401.

[Sh] C. C. Sherman, *$\mathscr{K}$-cohomology of regular schemes*, Comm. Algebra **7** (1979), n° 10, 999–1027.

1995

EMMANUEL PEYRE, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`