
POINTS DE HAUTEUR BORNÉE SUR LES VARIÉTÉS DE DRAPEAUX EN CARACTÉRISTIQUE FINIE

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Le but de cet article est d'appliquer les travaux de Morris sur les séries d'Eisenstein en caractéristique non nulle à l'étude asymptotique des points rationnels de hauteur bornée sur une variété de drapeaux généralisée obtenue comme quotient d'un groupe algébrique semi-simple au-dessus d'un corps global de caractéristique non nulle par un sous-groupe parabolique réduit. La formule obtenue pour le résidu de la fonction zêta des hauteurs a une interprétation analogue à celle connue pour un corps de nombres.

Abstract. — The aim of this paper is to apply the work of Morris on Eisenstein series over global function fields to the study of the asymptotic behavior of the points of bounded height on a generalized flag variety defined as the quotient of a semi-simple algebraic group by a reduced parabolic subgroup over such a field. The formula obtained for the height zeta function has an interpretation similar to the one known over a number field.

Table des matières

Introduction.....	2
1. Points de hauteur bornée.....	3
1.1. Notations.....	3
1.2. Métriques adéliques et hauteurs.....	4
1.3. Sous-variétés accumulatrices.....	6
1.4. Fonction zêta des hauteurs.....	7
2. Mesures de Tamagawa.....	10
2.1. Quelques hypothèses sur les variétés.....	10
2.2. Ensembles de mauvaises places.....	11

Classification mathématique par sujets (2000). — primaire 14G05; secondaires 14M15.

2.3. Mesures locales.....	13
2.4. Lien avec les densités locales.....	14
2.5. Facteurs de convergence.....	16
2.6. Mesure de Tamagawa.....	19
3. Présentation du résultat.....	20
3.1. Facteurs $\alpha(V)$ et $\beta(V)$	20
3.2. Expression de la constante.....	23
3.3. Géométrie des variétés de drapeaux généralisées.....	23
3.4. Hauteurs sur les variétés de drapeaux.....	25
3.5. Enoncé du résultat.....	26
4. Démonstration du résultat.....	27
4.1. Fonction zêta et séries d'Eisenstein.....	27
4.2. Ordre du pôle au sommet du cône.....	29
4.3. Valeur de la constante.....	33
Références.....	36

Introduction

La compréhension du comportement asymptotique des points rationnels de hauteur bornée sur les variétés presque de Fano au-dessus d'un corps de nombres a fortement progressé ces dernières années notamment grâce à l'impulsion donnée par Manin (cf. [BM], [FMT], [Pe1], [Sal] et [BT2]). Il serait naturel que le formalisme développé dans ce cadre s'étende dans une certaine mesure au cas des corps globaux de caractéristique non nulle. Il était donc tentant de chercher une formule pour le résidu de la fonction zêta des hauteurs pour les variétés de drapeaux généralisées sur un tel corps. Deux raisons motivent cet exemple; tout d'abord de telles formules asymptotiques ont été obtenues dans des cas particuliers (cf. [Se3, §2.5 in fine], [Hs]), d'autre part le rôle joué par les travaux de Langlands dans la démonstration de ces formules asymptotiques pour les variétés de drapeaux sur un corps de nombres ([FMT], [Pe1]) peut être joué par ceux de Morris dans le cas d'un corps de fonctions global (cf. [Mo1] et [Mo2]).

Entre la première version de ce texte et sa soumission, d'autres auteurs ont fait progresser cette extension au cadre fonctionnel du programme initié par Manin. D'une part, King Fai Lai et Kit Ming Yeung dans [LY], écrit indépendamment de notre texte, se sont également intéressés aux variétés de drapeaux dans le cadre fonctionnel, sans toutefois donner d'interprétation de la constante, qui constitue

le point crucial de notre travail. D'autre part D. Bourqui, a traité de manière complète le cas délicat des variétés toriques dans [Bou1], [Bou2] et [Bou3].

Ce texte est organisé de la façon suivante : dans la partie 1, nous fixons les notations et rappelons la définition de la fonction zêta des hauteurs, dans la partie 2 nous généralisons à la situation présente la définition de la mesure de Tamagawa associée à une métrique adélique et dans le paragraphe 3 nous énonçons le résultat dont la démonstration occupe l'ensemble de la dernière partie.

Dans un souci de complétude, nous redonnons l'ensemble des constructions, bien que la plupart des notions soient strictement analogues à celles définies sur un corps de nombres. Les premières sections de ce texte contiennent donc des redites par rapport à [Pe1].

1. Points de hauteur bornée

Dans cette partie, nous transportons au cas d'un corps de fonctions global la notion de système de hauteurs connue sur un corps de nombres.

1.1. Notations. — Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes

Notations 1.1.1. — Pour tout corps F , on note \bar{F} une clôture algébrique de F et F^s la clôture séparable de F dans \bar{F} .

Si F est un corps de fonctions global, on note \mathbf{F}_{q_F} le corps des constantes de F et M_F l'ensemble des places de F . Pour tout \mathfrak{p} de M_F , on note $F_{\mathfrak{p}}$ le complété de F en \mathfrak{p} et $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$ son corps résiduel. Pour toute place \mathfrak{p} la norme $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ sur $F_{\mathfrak{p}}$ est normalisée par la relation

$$\forall x \in F_{\mathfrak{p}}, \quad |x|_{\mathfrak{p}} = (\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{-v_{\mathfrak{p}}(x)}$$

où $v_{\mathfrak{p}} : F_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathbf{Z}$ est la valuation surjective en \mathfrak{p} et $\#A$ désigne le cardinal de A . On dispose donc de la formule du produit

$$\forall x \in F, \quad \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} |x|_{\mathfrak{p}} = 1.$$

Pour toute place \mathfrak{p} , la mesure de Haar $dx_{\mathfrak{p}}$ sur $F_{\mathfrak{p}}$ est normalisée par la relation

$$\int_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} dx_{\mathfrak{p}} = 1.$$

On note \mathcal{C} la courbe projective et lisse sur \mathbf{F}_{q_F} de corps de fonctions F , g_F le genre de \mathcal{C} et h_F le nombre de classes de diviseurs de degré 0 sur \mathcal{C} . On identifiera M_F aux points fermés de \mathcal{C} .

Nous omettrons F dans ces notations lorsque le corps global sera indiqué par le contexte.

Si \mathcal{V} est un schéma sur le spectre d'un anneau A et si B est une A algèbre commutative, alors $\mathcal{V}(B)$ désigne l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec} A}(\mathrm{Spec} B, \mathcal{V})$$

et \mathcal{V}_B le produit $\mathcal{V} \times_{\mathrm{Spec} A} \mathrm{Spec} B$. Si V est lisse sur un corps F , son groupe de Picard est noté $\mathrm{Pic} V$, son groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(V)$ et son faisceau canonique ω_V . Le cône de $\mathrm{NS}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ engendré par les classes de diviseurs effectifs est noté $C_{\mathrm{eff}}(V)$. On note également \bar{V} la variété $V_{\bar{F}}$ et $V^s = V_{F^s}$.

Si n n'est pas divisible par la caractéristique de F , le faisceau étale sur V des racines n -èmes de l'unité est noté μ_n . Le faisceau constant $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est également noté $\mu_n^{\otimes 0}$ et pour tout entier j strictement positif, $\mu_n^{\otimes j}$ désigne $\mu_n^{\otimes j-1} \otimes \mu_n$ et $\mu_n^{\otimes -j}$ le faisceau $\mathrm{Hom}(\mu_n^{\otimes j}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Pour tout nombre premier ℓ distinct de la caractéristique de F

$$H_{\mathrm{ét}}^i(\bar{V}, \mathbf{Z}_{\ell}(j)) = \varprojlim_n H_{\mathrm{ét}}^i(\bar{V}, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$$

et

$$H_{\mathrm{ét}}^i(\bar{V}, \mathbf{Q}_{\ell}(j)) = H_{\mathrm{ét}}^i(\bar{V}, \mathbf{Z}_{\ell}(j)) \otimes \mathbf{Q}_{\ell}.$$

On note $\mathrm{Br} V$ le groupe de Brauer cohomologique de V défini par

$$\mathrm{Br} V = H_{\mathrm{ét}}^2(V, \mathbf{G}_m).$$

Si V est une variété sur un corps global F , $V(\mathbf{A}_F)$ désigne l'espace adélique associé tel qu'il est défini par Weil dans [We, §1].

1.2. Métriques adéliques et hauteurs. — La notion de métrique adélique est une généralisation immédiate à notre cadre de celle décrite dans [Pe2] pour un corps de nombres, elle-même inspirée de la notion classique de hauteur (cf. [La], [Si]).

Définition 1.2.1. — Soit V une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps global F de caractéristique non nulle p . Soit L un faisceau inversible sur V et \mathfrak{p} une place de F . Une *métrique \mathfrak{p} -adique* sur L est une application associant à tout point x de $V(F_{\mathfrak{p}})$ une norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ sur la fibre $L(x) = L_x \otimes_{\mathcal{O}_{V,x}} F_{\mathfrak{p}}$ de sorte que pour toute section s de L définie sur un ouvert de V l'application

$$x \mapsto \|s(x)\|_{\mathfrak{p}}$$

soit continue pour la topologie \mathfrak{p} -adique.

Si \mathfrak{p} est une place de F et \mathcal{V} un modèle projectif et lisse de V sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, alors à tout modèle \mathcal{L} de L sur \mathcal{V} on peut associer une métrique \mathfrak{p} -adique $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ sur L qui est construite de la manière suivante : V étant projective, tout point x de $V(F_{\mathfrak{p}})$ définit un point \tilde{x} de \mathcal{V} et $\tilde{x}^*(\mathcal{L})$ définit une $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ -structure sur $L(x)$ dont on choisit un générateur y_0 ; $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ est alors donnée par la formule

$$\forall y \in L, \quad \|y\|_{\mathfrak{p}} = \left| \frac{y}{y_0} \right|_{\mathfrak{p}}.$$

Une famille de métriques $(\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F}$ sur L est appelée *métrique adélique* s'il existe un sous-ensemble fini S de M_F , un modèle projectif et lisse \mathcal{V} de V sur le complémentaire de S dans \mathcal{C} et un modèle \mathcal{L} de L sur cet espace de sorte que pour toute place \mathfrak{p} de $M_F - S$ la métrique $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ soit définie par $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

Nous appellerons *hauteur d'Arakelov* sur V la donnée d'une paire $H = (L, (\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F})$ où L est un faisceau inversible sur V et $(\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F}$ une métrique adélique sur ce fibré. Pour tout point rationnel x de V la *hauteur de x relativement à H* est alors définie par

$$H(x) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} \|s(x)\|_{\mathfrak{p}}^{-1}$$

où s est une section de L sur un voisinage de x , non nulle en x .

On note $\mathcal{H}(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de hauteurs d'Arakelov modulo la relation d'équivalence \sim engendrée par les relations de la forme

$$(L, (\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F}) \sim (L, (\lambda_{\mathfrak{p}} \|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F})$$

pour toute famille $(\lambda_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F}$ de nombres réels strictement positifs vérifiant $\prod_{\mathfrak{p} \in M_F} \lambda_{\mathfrak{p}} = 1$. Si x est un point rationnel et H une hauteur d'Arakelov, $H(x)$ ne dépend que de la classe de H dans $\mathcal{H}(V)$.

On dispose d'un morphisme d'oubli

$$\mathbf{o} : \mathcal{H}(V) \rightarrow \text{NS}(V).$$

On appelle système de hauteurs une section \mathbf{H} de l'application d'oubli. Un système de hauteurs \mathbf{H} sur V induit un accouplement

$$\mathbf{H} : \text{NS}(V) \otimes \mathbf{C} \times V(F) \rightarrow \mathbf{C}$$

qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et telle que

$$\forall L \in \text{NS}(V), \quad \forall x \in V(F), \quad \mathbf{H}(L, x) = \mathbf{H}(L)(x).$$

Nous renvoyons à [Pe3] pour des exemples de hauteurs et de systèmes de hauteurs. En particulier pour tout morphisme $\phi : V \rightarrow W$ de variétés on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(W) & \xrightarrow{\phi^*} & \mathcal{H}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{NS}(W) & \xrightarrow{\phi^*} & \text{NS}(V) \end{array}$$

et si E/F est une extension de corps on dispose d'un morphisme de normes

$$N_{E/F} : \mathcal{H}(V_E) \rightarrow \mathcal{H}(V).$$

Si \mathbf{H}_E est un système de hauteurs sur V_E la hauteur induite \mathbf{H}_F est définie par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{NS}(V) & \longrightarrow & \text{NS}(V_E) \\ \downarrow N\mathbf{H}_F & & \downarrow \mathbf{H}_E \\ \mathcal{H}(V) & \xleftarrow{N_{E/F}} & \mathcal{H}(V_E) \end{array}$$

où $N = [E : F]$.

1.3. Sous-variétés accumultrices. — Comme dans le cas des corps de nombres deux notions de sous-variétés accumultrices apparaissent naturellement.

Définition 1.3.1. — Soit H une hauteur d'Arakelov sur une variété projective lisse et géométriquement intègre V au-dessus d'un corps global F de caractéristique p . Pour tout sous-espace localement fermé W de V et tout nombre réel strictement positif B , on pose

$$n_{W,H}(B) = \#\{x \in W(F) \mid H(x) \leq B\}.$$

Remarque 1.3.1. — si $H = (L, (\|\cdot\|_p)_{p \in M_F})$ avec $[L]$ appartenant à l'intérieur de $C_{\text{eff}}(V)$, alors il existe un ouvert non vide U de V tel que $n_{U,H}(B)$ soit fini pour tout nombre réel B .

Définition 1.3.2. — On note pour tout sous-espace localement fermé W de V

$$a_W(L) = \overline{\lim}_{B \rightarrow +\infty} \log(n_{W,H}(B)) / \log(B) \leq +\infty.$$

Un fermé strict K de V est dit L -accumulateur au sens strict si et seulement si pour tout ouvert non vide W de K , il existe un ouvert non vide U de V avec

$$a_W(L) > a_U(L)$$

Un fermé strict K de V est dit modérément accumulateur pour H si et seulement si, pour tout ouvert non vide W de K , il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$\overline{\lim}_{B \rightarrow +\infty} n_{W,H}(B)/n_{U,H}(B) > 0.$$

1.4. Fonction zêta des hauteurs. — Contrairement au cas des corps de nombres, les métriques étant à valeur dans $q^{\mathbf{Z}}$ sauf pour un nombre fini d'entre elles, $n_{U,H}(B)$ n'est plus asymptotiquement équivalent à une fonction de la forme $CB^a(\log B)^{b-1}$. Toutefois il est bien connu que l'objet naturel dans le cadre fonctionnel est la fonction zêta associée, et nous verrons plus loin qu'il est effectivement possible d'étendre à ce cadre les propriétés connues sur les corps de nombres. De manière plus précise, les travaux de Batyrev, Franke, Manin et Tschinkel, ([FMT, §2], [BT1] et [BT3]) ont souligné l'intérêt de considérer les fonctions zêtas associées à un système de hauteurs et définies sur un ouvert du produit $\text{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$. Nous en rappelons maintenant la définition.

Définitions 1.4.1. — Soit H un système de hauteurs sur une variété projective lisse et géométriquement intègre V au-dessus d'un corps global F de caractéristique p . Soit U un ouvert de V . La fonction zêta associée est définie par la série

$$(1.4.1) \quad \zeta_{U,H}(s) = \sum_{x \in U(F)} H(s, x)^{-1}$$

où s désigne un élément de $\text{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$ pour lequel la série converge absolument.

Nous donnons maintenant quelques assertions sur le domaine de convergence des fonctions zêta. Ces assertions sont bien connues dans le cas de corps de nombres.

Lemme 1.4.1. — *L'ensemble sur lequel $\zeta_{U,H}$ converge absolument est un ensemble convexe de $\text{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$ et si s_0 appartient à cet ensemble alors celui-ci contient*

$$s_0 + i \text{NS}(V) \otimes \mathbf{C}.$$

Démonstration. — Ces assertions sont des propriétés générales des séries zêta. La convexité résulte de l'inégalité de Hölder : en effet si $\zeta_{U,H}$ converge absolument pour

$$s_0, s_1 \in \text{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$$

et si $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbf{R}_{>0}$ avec $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, alors pour tout sous-ensemble fini I de $U(F)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{x \in I} |\mathbf{H}(\lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1)|^{-1} &= \sum_{x \in I} |\mathbf{H}(s_0, x)|^{-\lambda_0} |\mathbf{H}(s_1, x)|^{-\lambda_1} \\ &\leq \left(\sum_{i \in I} |\mathbf{H}(s_0, x)|^{-1} \right)^{\lambda_0} \left(\sum_{i \in I} |\mathbf{H}(s_1, x)|^{-1} \right)^{\lambda_1}. \end{aligned}$$

La seconde assertion résulte du fait que pour tout x de $V(F)$ on a

$$\forall s_0 \in \text{NS}(V) \otimes \mathbf{C}, \quad \forall s_1 \in i \text{NS}(V) \otimes \mathbf{R}, \quad |\mathbf{H}(s_0 + s_1, x)| = |\mathbf{H}(s_0, x)|.$$

□

Lemme 1.4.2. — Si $\text{Pic}(\overline{V})$ est de rang fini et si $C_{\text{eff}}(V)$ est un cône polyédrique rationnel, c'est-à-dire s'il existe n_1, \dots, n_m dans $\text{NS}(V)$ tels que

$$C_{\text{eff}}(V) = \sum_{i=1}^m \mathbf{R}_{\geq 0} n_i$$

alors il existe un ouvert dense U de V tel que pour tout s de $\text{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$ en lequel $\zeta_{U, \mathbf{H}}$ converge absolument, $s + C_{\text{eff}}(V)$ est contenu dans le domaine de convergence absolu de $\zeta_{U, \mathbf{H}}$.

Démonstration. — Fixons des diviseurs effectifs D_1, \dots, D_m tels que

$$C_{\text{eff}}(V) = \sum_{i=1}^m \mathbf{R}_{\geq 0} [D_i]$$

et posons

$$U = V - \cup_{i=1}^m \text{Supp } D_i.$$

Soit s_i une section de $[D_i]$ correspondant à D_i pour $1 \leq i \leq m$. Soient s un élément de $\text{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$ en lequel $\zeta_{U, \mathbf{H}}$ converge absolument et s' un élément de $C_{\text{eff}}(V) \cap \text{NS}(V) \otimes \mathbf{Q}$. Il existe un entier λ strictement positif tel que $\lambda s'$ puisse se mettre sous la forme

$$\lambda s' = \sum_{i=1}^m n_i [D_i]$$

avec $n_i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ pour $1 \leq i \leq m$. Soit $(L, (\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F})$ un représentant de $\mathbf{H}(\sum_{i=1}^m n_i [D_i])$. Comme $\text{Pic}(\overline{V})$ est de rang fini, on peut supposer, quitte à augmenter λ , que la classe de L coïncide avec celle de $\sum_{i=1}^m n_i [D_i]$ dans $\text{Pic } V$. Le

produit tensoriel $\otimes_{i=1}^m s_i^{n_i}$ définit alors une section s de L . Pour tout place \mathfrak{p} de F , la fonction

$$\begin{aligned} V(F_{\mathfrak{p}}) &\rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \|s(x)\|_{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

est continue et admet un maximum $B_{\mathfrak{p}}$. En outre si S est une partie finie de M_F et \mathcal{V} (resp. \mathcal{L}) un modèle de V (resp. L) sur $\mathcal{C} - S$ de sorte que les métriques $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ soient définies par \mathcal{L} en-dehors de S ; alors, quitte à augmenter S , on peut supposer que s provient d'une section \tilde{s} de \mathcal{L} . Pour toute place \mathfrak{p} dans $M_F - S$, tout point x de $V(F_{\mathfrak{p}})$ correspondant à un point \tilde{x} de $\mathcal{V}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$, soit y_0 un générateur de $\tilde{x}^*(\mathcal{L})$. On a alors la relation

$$\|s(x)\|_{\mathfrak{p}} = \left| \frac{s(x)}{y_0} \right|_{\mathfrak{p}}$$

mais, comme s provient de \tilde{s} , on a que $s(x)$ appartient à $u_0 \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Donc $B_{\mathfrak{p}} \leq 1$.

Si $U(F) = \emptyset$, alors le résultat est évident. Dans le cas contraire, soit $x \in U(F)$; pour presque toute place \mathfrak{p} de F on a $\|s(x)\|_{\mathfrak{p}} = 1$, par conséquent $B_{\mathfrak{p}} = 1$ pour presque toute place \mathfrak{p} de F . Mais alors

$$\forall x \in U(F), \quad \mathbf{H}(\lambda_{s'}, x) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} \|s(x)\|_{\mathfrak{p}}^{-1} \geq \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} B_{\mathfrak{p}}^{-1} > 0.$$

Autrement dit la fonction $x \mapsto \mathbf{H}(\lambda_{s'}, x)$ est uniformément minorée sur $U(F)$. On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{x \in U(F)} |\mathbf{H}(s + \lambda_{s'})|^{-1} &\leq \sum_{x \in U(F)} |\mathbf{H}(s, x)|^{-1} \mathbf{H}(\lambda_{s'}, x)^{-1} \\ &\leq \left(\prod_{\mathfrak{p} \in M_F} B_{\mathfrak{p}} \right) \zeta_{U, \mathbf{H}}(s). \end{aligned}$$

La série définissant $\zeta_{U, \mathbf{H}}$ converge donc absolument en tout point de

$$s + C_{\text{eff}}(V) \cap \text{NS}(V) \otimes \mathbf{Q}$$

mais l'enveloppe convexe de ce cône est $s + C_{\text{eff}}(V)$ et le résultat découle du lemme précédent. \square

Lemme 1.4.3. — *Si L est un faisceau inversible très ample sur V et N la dimension de $\Gamma(V, L)$, alors pour toute hauteur H de la forme $(L, (\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F})$ et tout $\varepsilon > 0$ la série $\sum_{x \in V(F)} H(x)^{-N-\varepsilon}$ converge.*

Démonstration. — Soit s_1, \dots, s_N une base de $\Gamma(V, L)$. Le système de métriques définie par

$$\forall \mathfrak{p} \in M_F, \quad \forall x \in V(F_{\mathfrak{p}}), \quad \forall y \in L(x), \quad \|y\|'_{\mathfrak{p}} = \sup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{y}{s_i(x)} \right|_{\mathfrak{p}}$$

est une métrique adélique sur L . On note H' la hauteur $(L, (\|\cdot\|'_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F})$. Pour presque toute place \mathfrak{p} de F , $\|\cdot\|'_{\mathfrak{p}}$ coïncide avec $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in V(F), \quad H(x) \geq CH'(x).$$

Il suffit donc de montrer le résultat pour H' . Mais

$$\sum_{x \in V(F)} H'(x)^{-N-\varepsilon} \leq \sum_{x \in \mathbf{P}^{N-1}(F)} H_{\mathbf{P}^{N-1}}(x)^{-N-\varepsilon}$$

où $H_{\mathbf{P}^{N-1}}$ est la hauteur usuelle sur \mathbf{P}^{N-1} . Or il résulte de [Se3, theorem, p. 19] qu'il existe une constante C telle que

$$\#\{x \in \mathbf{P}^{N-1}(F) \mid H_{\mathbf{P}^{N-1}}(x) = q^d\} < C(q^d)^N$$

Par conséquent

$$\sum_{x \in \mathbf{P}^{N-1}(F)} H_{\mathbf{P}^{N-1}}(x)^{-N-\varepsilon} \leq C \sum_d (q^d)^{-N-\varepsilon} q^{dN} \quad \square$$

Pour terminer, nous allons énoncer une condition qui implique trivialement la périodicité de la fonction zêta des hauteurs.

Définition 1.4.2. — Dans la suite, nous dirons que le système de hauteurs \mathbf{H} vérifie la condition (P) si et seulement si pour tout élément L de $\text{NS}(V)$, il existe un représentant $(L, (\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F})$ de $\mathbf{H}(L)$ dont les métriques sont toutes à valeurs dans $q^{\mathbf{Z}}$.

Remarque 1.4.4. — Il résulte des définitions que les fonctions $\zeta_{U, \mathbf{H}}$ sont alors périodiques de groupe de périodes contenant $(2i\pi/\log(q))\text{NS}(V)$.

2. Mesures de Tamagawa

2.1. Quelques hypothèses sur les variétés. — Dans ce paragraphe, nous allons préciser quelques hypothèses sur les variétés qui nous permettront de définir

la mesure de Tamagawa associée à une métrique adélique sur le faisceau anticanonique. Les hypothèses géométriques sont automatiquement vérifiées par une variété de Fano sur un corps de caractéristique 0. En l'absence d'un théorème d'annulation de Kodaira cela n'est toutefois plus le cas en caractéristique non nulle.

Hypothèses géométriques 1. — Dans la suite V désigne une variété projective lisse et géométriquement intègre sur un corps global F de caractéristique p strictement positive vérifiant les assertions suivantes :

- (i) La classe du faisceau anticanonique ω_V^{-1} dans $\text{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$ appartient à l'intérieur du cône $C_{\text{eff}}(V)$;
- (ii) Les groupes de cohomologie $H^i(V, \mathcal{O}_V)$ sont nuls pour $i = 1$ ou 2 ;
- (iii) Le groupe $\text{Pic}(V^s)$ est un \mathbf{Z} -module libre de rang fini et coïncide avec $\text{Pic} \overline{V}$;
- (iv) Le cône $C_{\text{eff}}(\overline{V})$ est polyédrique rationnel, c'est-à-dire qu'il existe m_1, \dots, m_r dans $\text{Pic}(\overline{V})$ tels que

$$C_{\text{eff}}(\overline{V}) = \sum_{i=1}^r m_i;$$

- (v) Si ℓ est un nombre premier distinct de p , la partie ℓ -primaire de $\text{Br} \overline{V}$ est finie.

Remarque 2.1.1. — Si V est F^s -rationnelle alors la première assertion de (iii) et (v) sont vérifiées. En effet, par [CTS, appendice 2.A], si V est F^s -rationnelle alors $\text{Pic}(V^s)$ est stablement isomorphe à \mathbf{Z} et donc libre de rang fini sur \mathbf{Z} et par [Gr2, corollaire 7.5], la partie ℓ -primaire du groupe de Brauer est un invariant birationnel des variétés propres et lisses, ce qui implique la trivialité de ce groupe si V est F^s -rationnelle.

Dans la suite nous supposons également que la variété V vérifie la condition suivante :

Hypothèse arithmétique 2. — L'ensemble $V(F)$ des points rationnels de V est dense pour la topologie de Zariski.

2.2. Ensembles de mauvaises places. — Comme dans le cas des corps de nombres, les facteurs de convergence qui apparaissent naturellement sont les facteurs locaux de la fonction L associée au groupe de Picard géométrique de la variété. Le choix de ces facteurs est justifié par les arguments de descente qui les font apparaître dans le passage aux torseurs universels (cf. [Sal] et [Pe2]). Mais

pour montrer la convergence des mesures de Tamagawa, il faut comparer ces facteurs locaux à ceux donnés par le deuxième groupe de cohomologie ℓ -adique, ce qui est rendu possible par le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. — *Sous les hypothèses du paragraphe 2.1, il existe un ensemble fini de places S et un modèle projectif et lisse \mathcal{V} de V sur $\mathcal{C} - S$ dont les fibres sont géométriquement intègres et tel que pour toute place \mathfrak{p} en-dehors de S , on ait les assertions suivantes :*

- (i) *Il existe un isomorphisme de $\text{Pic}(\overline{V})$ sur $\text{Pic}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})$ compatible avec les actions des groupes de Galois;*
- (ii) *Pour tout nombre premier ℓ distinct de p , la partie ℓ -primaire du groupe $\text{Br}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})$ est finie.*

Démonstration. — La variété V étant projective, on la plonge dans un espace projectif \mathbf{P}_F^N . Soit \mathcal{V} l'adhérence de V dans $\mathbf{P}_{\mathcal{C}}^N$. Comme V est lisse et géométriquement intègre, il existe par [EGA, IV 6.8.7 et 9.7.7] un ensemble fini S de places tel que $\mathcal{V} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C} - S$ soit lisse à fibres géométriquement intègres sur $\mathcal{C} - S$.

Par hypothèse, $\text{Pic}(\overline{V})$ est un \mathbf{Z} -module libre de type fini qui coïncide avec $\text{Pic}(V^s)$. Il existe donc une extension galoisienne finie E de F telle que $V(E) \neq \emptyset$ et

$$\text{Pic}(V_E) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(\overline{V}).$$

On ajoute à S les places qui se ramifient dans l'extension E/F et on note S_E l'ensemble des places de E au-dessus de S . Soit \mathfrak{P} une place de E en-dehors de S_E , soit $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{P}}^{\text{hs}}$ le complété d'un hensélisé strict de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ et $\text{Fr}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{P}}^{\text{hs}})$ son corps des fractions. Le schéma $\widehat{\mathcal{V}}_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{P}}^{\text{hs}}}$ étant lisse, l'application canonique

$$\text{Pic}(\widehat{\mathcal{V}}_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{P}}^{\text{hs}}}) \rightarrow \text{Pic}(V_{\text{Fr}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{P}}^{\text{hs}})})$$

est un isomorphisme. Comme, par hypothèse, $\text{Pic}(V_E)$ est isomorphe à $\text{Pic}(\overline{V})$ et donc à $\text{NS}(\overline{V})$ et que le groupe de Néron-Severi ne change pas par extension de corps algébriquement clos, l'application

$$\text{Pic}(V_E) \rightarrow \text{Pic}(V_{\text{Fr}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{P}}^{\text{hs}})})$$

est également un isomorphisme. Considérons alors la composée des morphismes naturels

$$(2.2.1) \quad \text{Pic}(V_E) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(V_{\text{Fr}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{P}}^{\text{hs}})}) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(\widehat{\mathcal{V}}_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{P}}^{\text{hs}}}) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}}).$$

Par hypothèse, $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ pour $i = 1$ ou 2 . Par le théorème de semi-continuité (cf. [Ha, theorem III.12.8]), on peut, quitte à augmenter S , supposer que $H^i(\mathcal{Y}_{\mathbf{F}_p}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\mathbf{F}_p}})$ est nul pour $i = 1$ ou 2 et $\mathfrak{p} \in M_F - S$. Il en résulte que $H^i(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}_p}}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}_p}}})$ est trivial pour $i = 1$ ou 2 . Par [Gr1, corollaire 1 de la proposition 3] la flèche de droite dans (2.2.1) est également un isomorphisme. On obtient ainsi l'isomorphisme recherché.

En ce qui concerne la seconde assertion, le corang ℓ -adique de $\text{Br}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}_p}})$ coïncide, d'après [Gr3, corollaire 3.4] avec la différence entre B_2 , le deuxième nombre de Betti ℓ -adique de $\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}_p}}$ et ρ le rang du groupe de Picard de $\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}_p}}$. Par ce qui précède ρ est également le rang de $\text{Pic } \overline{V}$ et par [Se1, page 19-02] B_2 coïncide avec le deuxième nombre de Betti de \overline{V} . Par hypothèse la partie ℓ -primaire de $\text{Br}(\overline{V})$ est finie et $B_2 = \rho$. \square

Convention 2.2.1. — Dans la suite de ce texte, les paires (S, \mathcal{Y}) considérées avec S un ensemble fini de places de F et \mathcal{Y} un modèle de V sur $\mathcal{C} - S$ vérifient les conditions du lemme.

2.3. Mesures locales. — Dans ce paragraphe, nous associons à toute métrique adélique $(\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F}$ sur ω_V^{-1} des mesures $\omega_{\mathfrak{p}}$ sur $V(F_{\mathfrak{p}})$.

Définition 2.3.1. — Soit \mathfrak{p} une place de F et $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ une métrique \mathfrak{p} -adique sur ω_V^{-1} . Si x appartient à $V(F_{\mathfrak{p}})$, on choisit des coordonnées locales x_1, \dots, x_n en x définissant un morphisme de F -variétés f d'un ouvert de Zariski U de V dans \mathbf{A}_F^n et induisant un isomorphisme analytique pour la topologie \mathfrak{p} -adique d'un ouvert W de $V(F_{\mathfrak{p}})$ sur son image. Le morphisme de faisceau cohérent

$$\omega(f) : f^*(\omega_{\mathbf{A}_F^n/F}) \rightarrow \omega_{U/F}$$

induit un isomorphisme de faisceau pour la topologie \mathfrak{p} -adique

$${}^t\omega(f)^{-1} : f^*\omega_{f(W)}^{-1} \rightarrow \omega_W^{-1}$$

qui permet d'identifier $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ avec une section de ω_W^{-1} . Sur W , la mesure est alors définie par la relation

$$\omega_{\mathfrak{p}} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_{\mathfrak{p}} dx_{1,\mathfrak{p}} \dots dx_{n,\mathfrak{p}}$$

où $dx_{i,\mathfrak{p}}$ désigne la mesures de Haar normalisée sur $F_{\mathfrak{p}}$.

Si x_1, \dots, x_n et x'_1, \dots, x'_n sont deux systèmes de coordonnées définies sur un même ouvert W et correspondant à des fonctions

$$f, f' : U \rightarrow \mathbf{A}_F^n$$

Soit Φ l'isomorphisme analytique

$$f' \circ f^{-1} : f(W) \rightarrow f'(W)$$

On a alors la relation

$${}^t \omega(\Phi)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x'_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x'_n} \right) = \text{Jac}_x(\Phi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$$

et par [We, §2.2.1], on a

$$dx'_{1,\mathfrak{p}} \dots dx'_{n,\mathfrak{p}} = |\text{Jac}_x(\Phi)|_{\mathfrak{p}} dx_{1,\mathfrak{p}} \dots dx_{n,\mathfrak{p}}$$

On en déduit les égalités

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial x'_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x'_n} \right\|_{\mathfrak{p}} dx'_{1,\mathfrak{p}} \dots dx'_{n,\mathfrak{p}} \\ &= \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_{\mathfrak{p}} |\text{Jac}_x(\Phi)|_{\mathfrak{p}}^{-1} dx'_{1,\mathfrak{p}} \dots dx'_{n,\mathfrak{p}} \\ &= \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_{\mathfrak{p}} dx_{1,\mathfrak{p}} \dots dx_{n,\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Les mesures obtenues se recollent donc pour former une mesure borélienne $\omega_{\mathfrak{p}}$ sur $V(F_{\mathfrak{p}})$.

2.4. Lien avec les densités locales. — Dans ce paragraphe, nous allons faire le lien pour $\mathfrak{p} \in M_F - S$ entre le volume $\omega_{\mathfrak{p}}(V(F_{\mathfrak{p}}))$ et la densité locale en \mathfrak{p} définie par

$$d_{\mathfrak{p}}(V) = \frac{\#\mathcal{Y}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{(\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{\dim V}}.$$

La démonstration suit celles de [We, §2.2.1], [Pe1, §2.2.2] et [Sal, theorem 2.13].

Lemme 2.4.1. — *Pour presque toute place \mathfrak{p} de $M_F - S$, on a :*

$$\omega_{\mathfrak{p}}(V(F_{\mathfrak{p}})) = d_{\mathfrak{p}}(V).$$

Démonstration. — Soit n la dimension de V . Fixons un plongement de variétés $\Phi : V \rightarrow \mathbf{P}_F^N$ et \mathcal{V} l'adhérence de V dans $\mathbf{P}_{\mathcal{C}}^N$. Par le critère valuatif de propreté, on a une bijection de $V(F_{\mathfrak{p}})$ sur $\mathcal{V}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ qui induit pour tout m des applications surjectives

$$\pi_m : V(F_{\mathfrak{p}}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^m).$$

On note $[x]_m = \pi_m^{-1}(\pi_m(x))$ pour tout x de $V(F_{\mathfrak{p}})$. Soit I le faisceau d'idéaux défini par V et \mathcal{I} celui défini par \mathcal{V} . En dehors d'un nombre fini de places, le schéma $\mathcal{V}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}$ est lisse et le faisceau $(\Lambda^n \Omega_{\mathcal{V}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}^1)^{\vee}$ est un modèle de ω_V^{-1} . On peut donc supposer que la métrique $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ est définie par ce modèle. Par [Ha, theorem 8.1, theorem 8.13], on a des suites exactes de faisceaux

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{\mathbf{P}_{\mathcal{C}}^N/\mathcal{C}}^1 \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \xrightarrow{r} \Omega_{\mathcal{V}/\mathcal{C}}^1 \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{\mathbf{P}_F^N/F}^1 \otimes \mathcal{O}_V \xrightarrow{r} \Omega_{V/F}^1 \rightarrow 0.$$

Sur l'ouvert \mathcal{V}_i défini par $X_i \neq 0$, on obtient des suites exactes

$$(2.4.1) \quad \mathcal{I}/\mathcal{I}^2|_{\mathcal{V}_i} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{j \neq i} \mathcal{O}_{\mathcal{V}_i} dX_j \xrightarrow{r_i} \Omega_{\mathcal{V}/\mathcal{C}}^1 \rightarrow 0$$

et en notant $V_i = \mathcal{V}_{iF}$ qu'on identifie avec son image U_i dans \mathbf{A}_F^{N+1} ,

$$(2.4.2) \quad J/J^2|_{U_i} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{j \neq i} \mathcal{O}_{U_i} dX_j \xrightarrow{r_i} \Omega_{U_i/F}^1 \rightarrow 0$$

Par conséquent pour presque toute place \mathfrak{p} de M_F , on a

$$(2.4.3) \quad \forall x \in U_i(F_{\mathfrak{p}}), \quad \forall y \in \omega_V^{-1}(x), \quad \|y\|_{\mathfrak{p}} = \inf_{\substack{0 \leq i_1 < \dots < i_n \\ j \notin \{i_1, \dots, i_n\}}} |y(r_{i_1}(dX_{i_1}) \wedge \dots \wedge r_{i_n}(dX_{i_n}))|_{\mathfrak{p}}.$$

Notons f_i l'isomorphisme de V_i sur U_i . On peut en outre supposer que \mathfrak{p} vérifie les conditions I et II de [We, page 19] pour la famille $(f_i)_{0 \leq i \leq N+1}$. Soit $x \in V(F_{\mathfrak{p}})$ et $(x_0 : \dots : x_N)$ des coordonnées homogènes pour $\Phi(x)$. Après permutation des coordonnées et multiplication par un scalaire, on peut supposer que $x_0 = 1$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Le point x provient alors d'un élément \tilde{x} de $\mathcal{U}_0(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$. Par [We, theorem 2.2.3], l'ensemble $[x]_1$ coïncide avec

$$\{(1 : x'_1 : \dots : x'_n) \in V(F_{\mathfrak{p}}) \mid x'_i \in x_i + \mathfrak{p}\}$$

On peut, à permutation des coordonnées près, supposer par (2.4.1) que $\Omega_{\mathcal{V}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}},x}}^1$ est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathcal{V}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}},x}} dX_i$. La famille (X_1, \dots, X_n) constitue alors un système de coordonnées locales au voisinage de x . Par [We, page 22] ce système s'étend à $[x]_1$ et induit un difféomorphisme de $[x]_1$ sur $(x_1, \dots, x_n) + \mathfrak{p}^n$ et l'isomorphisme entre $\Omega_{\mathcal{V}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}},x}}^1 / \mathcal{O}_{\mathfrak{p},x}$ et $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathcal{V}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}},x}} dX_i$ s'étend également à $[x]_1$. Par conséquent (2.4.3) se réécrit alors

$$\forall x' \in [x]_1, \quad \forall y' \in \omega_{\mathcal{V}}^{-1}(x'), \quad \|y'\|_{\mathfrak{p}} = \left| \frac{y'}{\frac{\partial}{\partial X_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial X_n}} \right|_{\mathfrak{p}}$$

et sur $[x]_1$, la mesure $\omega_{\mathfrak{p}}$ coïncide avec

$$dX_{1,\mathfrak{p}} \dots dX_{n,\mathfrak{p}}.$$

On obtient donc

$$\omega_{\mathfrak{p}}([x]_1) = \int_{(x_1, \dots, x_n) + \mathfrak{p}^n} dX_{1,\mathfrak{p}} \dots dX_{n,\mathfrak{p}} = \#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{-n}.$$

En sommant sur $\mathcal{V}(F_{\mathfrak{p}})$, on obtient la formule du lemme. \square

2.5. Facteurs de convergence. — Comme dans [Pe1, §2.2.3], nous allons maintenant appliquer les conjectures de Weil démontrées par Deligne pour obtenir des facteurs de convergence.

Définition 2.5.1. — Pour tout $\mathfrak{p} \in M_F - S$, on note $\text{Fr}_{\mathfrak{p}}$ le morphisme de Frobenius sur $\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}$ défini par $x \mapsto x^{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}$. La suite exacte

$$0 \rightarrow I_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Gal}(\overline{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}) \rightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}/\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) \rightarrow 0$$

où $I_{\mathfrak{p}}$ désigne le groupe d'inertie en \mathfrak{p} et l'inclusion canonique du groupe $\text{Gal}(\overline{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$ dans $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ définissent une action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}/\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})$ sur le groupe $(\text{Pic}(\overline{\mathcal{V}}))^{\mathfrak{p}}$. On note également $\text{Fr}_{\mathfrak{p}}$ le morphisme de Frobenius induit sur $(\text{Pic}(\overline{\mathcal{V}}))^{\mathfrak{p}}$. Le terme local de la fonction L associée à $\text{Pic}(\overline{\mathcal{V}})$ est alors défini par

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic}(\overline{\mathcal{V}})) = \frac{1}{\text{Det}(1 - \#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{-s} \text{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid (\text{Pic}(\overline{\mathcal{V}}))^{\mathfrak{p}} \otimes \mathbf{Q})}$$

Proposition 2.5.1. — Pour toute place \mathfrak{p} de $M_F - S$, le terme $L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic}(\overline{V}))$ est bien défini et le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_F} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic}(\overline{V}))}$$

est absolument convergent.

Démonstration. — Par la démonstration du lemme 2.2.1, il existe une extension galoisienne finie E de F telle que $\text{Pic}(V_E) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(\overline{V})$. L'action de $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ sur $\text{Pic}(\overline{V})$ se factorise donc par $\text{Gal}(E/F)$ et pour tout $\mathfrak{p} \in M_F$, on a que $(\text{Fr}_{\mathfrak{p}})^{[E:F]}$ agit trivialement sur $\text{Pic}(\overline{V})^{I_{\mathfrak{p}}}$. Les valeurs propres de $\text{Fr}_{\mathfrak{p}}$ sont donc des racines $[E:F]$ -èmes de l'unité et

$$\text{Det}(1 - \sharp_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{-s}} \text{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid (\text{Pic}(\overline{V})^{I_{\mathfrak{p}}} \otimes \mathbf{Q}))$$

est non nul ce qui montre la première assertion.

Par la formule de Lefschetz (cf. [Se2]) on a pour toute place \mathfrak{p} en-dehors de S et tout nombre premier ℓ distinct de p ,

$$\sharp \mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid H_{\text{ét}}^i(\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_{\ell}))$$

où n désigne la dimension de V et $\text{Fr}_{\mathfrak{p}}$ le Frobenius géométrique. La variété $\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}$ étant lisse, projective et géométriquement intègre, on a un isomorphisme canonique

$$H_{\text{ét}}^{2n}(\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_{\ell}(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_{\ell}.$$

D'autre part les suites exactes de Kummer

$$0 \rightarrow \mu_{\ell^r} \rightarrow \mathbf{G}_m \xrightarrow{\times \ell^r} \mathbf{G}_m \rightarrow 0$$

où r est positif induisent des suites exactes

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Z}_{\ell}(1)) \rightarrow T_{\ell}(\text{Pic}(\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}})) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}) \otimes \mathbf{Z}_{\ell} \rightarrow H_{\text{ét}}^2(\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Z}_{\ell}(1)) \rightarrow T_{\ell}(\text{Br}(\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}})) \rightarrow 0.$$

Mais il résulte du lemme 2.2.1 que les modules de Tate

$$T_{\ell}(\text{Pic}(\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}})) = \varprojlim_n \text{Pic}(\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}})_{(\ell^n)}$$

et

$$T_\ell(\mathrm{Br}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p})) = \lim_{\leftarrow n} \mathrm{Br}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p})_{(\ell^n)}$$

sont tous les deux nuls. On obtient donc la trivialité du groupe de cohomologie $H_{\text{ét}}^1(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell(1))$ et un isomorphisme

$$H_{\text{ét}}^2(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}) \otimes \mathbf{Q}_\ell$$

qui, par dualité de Poincaré, entraîne la trivialité de $H_{\text{ét}}^{2n-1}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell)$ et induit un isomorphisme

$$H_{\text{ét}}^{2n-2}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell(n-1)) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Pic}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}) \otimes \mathbf{Q}_\ell)^\vee.$$

Or pour toute paire d'entiers i et j , on a

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid H_{\text{ét}}^i(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell(j))) = \frac{1}{\#\mathbf{F}_p^j} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid H_{\text{ét}}^i(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell)).$$

Par conséquent

$$d_p(V) = 1 + \frac{1}{\#\mathbf{F}_p} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid \mathrm{Pic}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}) \otimes \mathbf{Q}_\ell) + \sum_{i=0}^{2n-3} \frac{(-1)^i}{\#\mathbf{F}_p^{\dim V}} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid H_{\text{ét}}^i(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell)).$$

Mais par la conjecture de Weil démontrée par Deligne sur les valeurs propres des endomorphismes de Frobenius [De, theorem 1.6], on a des inégalités

$$|\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid H_{\text{ét}}^i(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell))| \leq \#\mathbf{F}_p^{i/2} \dim H_{\text{ét}}^i(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell).$$

Or le i -ième nombre de Betti étale $\dim H_{\text{ét}}^i(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell)$ est constant sur les places \mathfrak{p} de bonne réduction (cf. [Se1, page 19-02]) et donc

$$d_p(V) = 1 + \frac{1}{\#\mathbf{F}_p} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid \mathrm{Pic}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}) \otimes \mathbf{Q}) + O\left(\frac{1}{\#\mathbf{F}_p^{3/2}}\right).$$

D'autre part les valeurs propres de Fr_p sur $\mathrm{Pic}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p})$ qui est isomorphe à $\mathrm{Pic}(V_E)$ étant des racines de l'unité, on a également

$$\mathrm{Det}(1 - \#\mathbf{F}_p^{-1} \mathrm{Fr}_p \mid \mathrm{Pic}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}) \otimes \mathbf{Q}) = 1 + \frac{1}{\#\mathbf{F}_p} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_p \mid \mathrm{Pic}(\mathcal{Y}_{\overline{\mathbf{F}}_p}) \otimes \mathbf{Q}) + O\left(\frac{1}{\#\mathbf{F}_p^{3/2}}\right)$$

et il en résulte que

$$\frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic}(\overline{V}))} = 1 + O\left(\frac{1}{\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}^{3/2}}\right)$$

et le produit de ces termes converge absolument. \square

Définition 2.5.2. — Pour toute place \mathfrak{p} de F , on pose

$$\lambda_{\mathfrak{p}} = L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic}(\overline{V})).$$

2.6. Mesure de Tamagawa. — Afin de normaliser la mesure nous aurons besoin de prendre le résidu de la fonction L associée à $\text{Pic}(\overline{V})$ et donc du lemme suivant :

Lemme 2.6.1. — *Le produit eulérien*

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_F} L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic}(\overline{V}))$$

converge absolument pour $\text{Re } s > 1$ et définit une fonction $L(s, \text{Pic}(\overline{V}))$ qui se prolonge en une fonction rationnelle de q^{-s} sur \mathbf{C} avec un pôle d'ordre $t = \text{rg Pic}(V)$ en $s = 1$.

Démonstration. — La convergence pour $\text{Re } s > 1$ résulte de la définition et du fait que les valeurs propres du Frobenius agissant sur $\text{Pic}(\overline{V})$ sont des racines de l'unité.

Soit Fr_{q_F} l'élément du groupe $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ envoyant x sur x^{q_F} . La fonction L est alors donnée par le produit eulérien

$$L(s, \text{Pic}(\overline{V})) = \prod_{x \in \mathcal{C}_{(0)}} \frac{1}{\text{Det}(1 - \#\kappa(x)^{-s} \text{Fr}_{q_F}^{[\kappa(x):\mathbf{F}_{q_F}]}) | \text{Pic}(\overline{V}) \otimes \mathbf{Q}}$$

où $\mathcal{C}_{(0)}$ désigne l'ensemble des points fermés de \mathcal{C} et $\kappa(x)$ le corps résiduel en x . Notons $(\alpha_i)_{i \in I}$ les valeurs propres de Fr_{q_F} agissant sur $\text{Pic}(\overline{V}) \otimes \mathbf{Q}$ et $(m_i)_{i \in I}$ leurs multiplicités. On obtient

$$\begin{aligned} L(s, \text{Pic}(\overline{V})) &= \prod_{i \in I} \prod_{x \in \mathcal{C}_{(0)}} \frac{1}{(1 - (q^{-s} \alpha_i)^{[\kappa(x):\mathbf{F}_{q_F}]})^{m_i}} \\ &= \prod_{i \in I} Z(\mathcal{C}, q^{-s} \alpha_i) \end{aligned}$$

où $Z(\mathcal{C}, t)$ est la fonction zêta de \mathcal{C} définie par

$$Z(\mathcal{C}, t) = \exp \left(\sum_{n>0} \frac{\#\mathcal{C}(\mathbf{F}_{q_F^n}) t^n}{n} \right).$$

Par le théorème de Weil $Z(\mathcal{C}, t)$ est une fonction rationnelle de t avec un pôle d'ordre 1 en $t = q^{-1}$. De manière plus précise, on a en fait

$$Z(\mathcal{C}, t) = \frac{\text{Det}(1 - t \text{Fr}_{q_F} | H_{\text{ét}}^1(\mathcal{C}_{\overline{\mathbf{F}}_{q_F}}))}{(1-t)(1-qt)}$$

Ceci implique la deuxième assertion. \square

Définition 2.6.1. — On considère la mesure de Tamagawa

$$\omega_H = \left(\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t L(s, \text{Pic}(\overline{V})) \right) \frac{1}{q_F^{(g_F-1) \dim V}} \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} \lambda_{\mathfrak{p}}^{-1} \omega_{\mathfrak{p}}$$

et le nombre de Tamagawa de V relativement à la hauteur H est défini par

$$\tau_H(V) = \omega_H(\overline{V(F)})$$

où $\overline{V(F)}$ désigne l'adhérence des points rationnels de V dans l'espace adélique $V(\mathbf{A}_F)$.

3. Présentation du résultat

3.1. Facteurs $\alpha(V)$ et $\beta(V)$. — Nous allons maintenant définir l'analogue de la fonction caractéristique $\chi_{C_{\text{eff}}(V)}$, qui remonte à [Kö], et qui fut introduite dans le contexte des conjectures de Manin par Batyrev et Tschinkel dans [BT1]. Cette analogue est fourni par le facteur local de la fonction L de Draxl associée au cône effectif (cf. [Dr]).

Définition 3.1.1. — Soit M un \mathbf{Z} -module libre et C un cône rationnel polyédrique strictement convexe de $M \otimes \mathbf{R}$; c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(m_i)_{1 \leq i \leq r}$ d'éléments de M telle que $C = \sum_{i=1}^r \mathbf{R}_{\geq 0} m_i$ avec $C \cap -C = \{0\}$. On note C^\vee le cône dual défini par

$$C^\vee = \{y \in (M \otimes \mathbf{R})^\vee \mid \forall x \in C, \langle x, y \rangle \geq 0\},$$

et C° l'intérieur du cône C . On pose pour tout $s \in C^\circ + iM$,

$$L_q(s, M, C) = \sum_{y \in C^\vee \cap M^\vee} q^{-\langle y, s \rangle}.$$

Par définition du cône dual cette série converge absolument sur le cône ouvert $C^{\circ} + iM$ et si m appartient à l'intérieur de C , la fonction qui à s associe $L_q(sm, M, C)$ a un pôle d'ordre $\text{rg}M$ en $s = 0$.

On pose

$$\alpha^*(V) = (\log q)^t \lim_{s \rightarrow 0} s^t L_q(s\omega_V^{-1}, \text{Pic}(V), C_{\text{eff}}(V))$$

où t désigne le rang de $\text{Pic}(V)$ et

$$\alpha(V) = \frac{\alpha^*(V)}{(t-1)!}.$$

Enfin, comme Batyrev et Tschinkel, on pose

$$\beta(V) = \#H^1(F, \text{Pic}(\overline{V}))$$

bien que ce terme soit trivial dans les cas considérés ici.

Remarque 3.1.1. — La fonction $L_q(s, M, C)$ est périodique de groupe de période contenant $(2\pi i/\log q)M$. Il résulte de la définition que $\alpha^*(V)$ dépend du réseau $\text{Pic}(V)$, du cône $C_{\text{eff}}(V)$ et de l'élément ω_V^{-1} mais est indépendant de q .

Notation 3.1.2. — La fonction caractéristique du cône $C_{\text{eff}}(V)$ est définie par

$$\forall s \in C_{\text{eff}}(V)^{\circ}, \quad \chi_{C_{\text{eff}}(V)}(s) = \int_{C_{\text{eff}}(V)^{\vee}} e^{-\langle s, y \rangle} dy.$$

Définition 3.1.3. — Si f est une fonction méromorphe sur un ouvert d'un \mathbf{C} -espace vectoriel W , nous dirons que f admet une expression rationnelle en des puissances de q s'il existe une base $(\chi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de W^{\vee} et une fonction rationnelle

$$R \in \mathbf{C}(T_1, \dots, T_n)$$

telle que pour tout s en lequel f est défini on ait

$$f(s) = R(q^{\langle \chi_1, s \rangle}, \dots, q^{\langle \chi_n, s \rangle}).$$

Proposition 3.1.2. — Avec les hypothèses précédentes, la fonction

$$s \longmapsto L_q(s, \text{Pic}(V), C_{\text{eff}}(V))$$

admet une expression rationnelle en des puissances de q et

$$\alpha^*(V) = \chi_{C_{\text{eff}}(V)}(\omega_V^{-1}) \in \mathbf{Q}^*.$$

Remarque 3.1.3. — La raison pour laquelle nous avons substitué L_q à $\chi_{C_{\text{eff}}(V)}$ dans ce cadre est, qu'étant périodique comme la fonction zêta des hauteurs lorsque le système de hauteurs vérifie la propriété (P), $L_q(\cdot, \text{Pic}(V), C_{\text{eff}}(V))$ devrait avoir même lieu singulier que $\zeta_{U, H}$ au voisinage de $\omega_V^{-1} + i \text{Pic}(V) \otimes \mathbf{R}$.

Démonstration. — Rappelons qu'un cône C de $M \otimes \mathbf{R}$ est dit régulier s'il est de la forme

$$\sum_{i=1}^r \mathbf{R}_{\geq 0} m_i$$

où $(m_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une sous-famille d'une base de M . Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où C est un cône régulier d'intérieur non vide. La fonction $L_q(\cdot, M, C)$ s'écrit alors

$$L_q(s, M, C) = \prod_{i=1}^n (1 - q^{\langle m_i, s \rangle})^{-1}$$

et la première assertion est immédiate. En outre, si on a $\langle m_i, s \rangle = 1$ pour $1 \leq i \leq n$, alors par [BT1, proposition 2.4.5], on a l'égalité

$$\chi_C(s) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{s_i};$$

la deuxième assertion en découle aussitôt. Dans le cas général (cf. [Oda, p. 23]), on écrit C^\vee comme support d'un éventail régulier Σ , c'est-à-dire que Σ est un ensemble de cônes polyédriques rationnels strictement convexes de $M^\vee \otimes \mathbf{R}$ tels que :

- (i) Si $\sigma \in \Sigma$ et si σ' est une face de σ , alors $\sigma' \in \Sigma$;
- (ii) Si $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, alors $\sigma \cap \sigma'$ est une face de σ et de σ' ;
- (iii) On a l'égalité $C^\vee = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$;
- (iv) Tout σ de Σ est régulier.

Alors si on note $\Sigma^{(i)}$ l'ensemble des éléments de Σ de dimension i et n la dimension de M , il existe des entiers relatifs $\mu(\sigma)$ pour $\sigma \in \Sigma$ tels que :

$$L_q(s, M, C) = \sum_{\sigma \in \Sigma^{(n)}} L_q(s, M, \sigma^\vee) + \sum_{i < n} \sum_{\sigma \in \Sigma^{(i)}} \mu(\sigma) \sum_{y \in \sigma} q^{-\langle y, s \rangle}$$

et

$$\chi_C(s) = \sum_{\sigma \in \Sigma^{(n)}} \chi_C(s)$$

et les deux assertions résultent du cas précédent et du fait que l'ordre du pôle en 0 de la fonction $s \mapsto \sum_{y \in \sigma} q^{-\langle y, s\omega_V^{-1} \rangle}$ est d'ordre i si le cône σ est de dimension i . \square

3.2. Expression de la constante. — Nous allons maintenant définir la constante qui apparaît comme résidu de la fonction zêta des hauteurs.

Définition 3.2.1. — On pose

$$\theta_H^*(V) = \alpha^*(V)\beta(V)\tau_H(V)$$

et

$$\theta_H(V) = \alpha(V)\beta(V)\tau_H(V)$$

3.3. Géométrie des variétés de drapeaux généralisées. — Dans la suite nous nous intéressons à la situation suivante :

Notations 3.3.1. — Dans la suite G désigne un groupe algébrique linéaire lisse semi-simple et connexe sur F , P un F -sous-groupe parabolique lisse de G . On note V le quotient $P \backslash G$ et $\pi : G \rightarrow V$ la projection canonique. Par [BoTi2, proposition 2.24], le revêtement universel \tilde{G} de G est défini sur F . Quitte à remplacer G par \tilde{G} et P par son image inverse dans \tilde{G} , on peut donc supposer que G est simplement connexe.

Pour tout groupe algébrique linéaire H sur F , on note $\text{Lie}(H)$ l'algèbre de Lie restreinte de H , $\mathcal{R}H$ son radical et $\mathcal{R}_u H$ son radical unipotent. Le groupe des caractères de H sur F est défini par :

$$X^*(H)_F = \text{Hom}_{\text{Spec } F}(H, \mathbf{G}_{m,F})$$

et le groupe de cocaractères par

$$X_*(H)_F = \text{Hom}_{\text{Spec } F}(\mathbf{G}_{m,F}, H).$$

On note P_0 un F -sous-groupe parabolique lisse minimal de G contenu dans P . On note T un tore maximal de $\mathcal{R}P_0$ et S sa composante scindée. On a donc les inclusions

$$S \subset T \subset P_0 \subset P \subset G.$$

On fixe également un sous-groupe de Borel B de G^s tel que $T^s \subset B \subset P_0^s$.

On note Φ (resp. ${}_F\Phi$, Φ^+ , ${}_F\Phi^+$) les racines de T^s (resp. S , T^s , S) dans G^s (resp. G , B , P_0), Δ la base de Φ associée à Φ^+ et ${}_F\Delta$ celle de ${}_F\Phi$ correspondant à ${}_F\Phi^+$. L'application de restriction de T à S induit une application

$$j : \Delta \rightarrow {}_F\Delta \cup \{0\}$$

(cf. [Bo, §21.8]) dont l'image contient ${}_F\Delta$. le groupe de Weyl de Φ (resp. ${}_F\Phi$) est noté W (resp. ${}_FW$). Pour tout α de Δ (resp. ${}_F\Delta$), on note $\check{\alpha}$ la coracine correspondante et $\bar{\omega}_\alpha$ le poids fondamental associé.

Pour toute partie J de ${}_F\Delta$, on note ${}_FW_J$ le sous-groupe de ${}_FW$ engendré par les s_α , pour $\alpha \in J$ et ${}_FP_J$ le F sous-groupe parabolique

$${}_FP_J = P_0 {}_FW_J P_0.$$

On obtient ainsi une bijection entre les parties de ${}_F\Delta$ et les F sous-groupes paraboliques de G contenant P_0 avec

$$P_0 = {}_FP_\emptyset \quad \text{et} \quad G = {}_FP_{{}_F\Delta}.$$

On note ${}_FI$ (resp. I) la partie de ${}_F\Delta$ (resp. Δ) correspondant à P . On a donc

$$I = j^{-1}({}_FI \cup \{0\})$$

Par [San, proposition 6.10], on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{F}[V]^*/F^* \rightarrow F[G]^*/F^* \rightarrow X^*(P)_F \rightarrow \text{Pic}(V) \rightarrow \text{Pic}(G)$$

Il résulte du théorème de Rosenlicht, [Ro, theorem 3] que $F[G]^*/F^*$ est isomorphe au groupe $X^*(G)_F$ et donc trivial et de [San, lemma 6.9 (iii)] que $\text{Pic}(G)$ est nul puisque G est supposé simplement connexe. On a donc un isomorphisme canonique

$$\phi : X^*(P)_F \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(V)$$

qui peut être décrit de la manière suivante : si χ est un caractère de P sur F , χ peut être vu comme fibré en droites sur $\text{Spec } F$ muni d'une action de P et comme fibré en droites sur V , $\phi(\chi)$ est défini comme le produit restreint $G \times^P \chi$. Autrement dit $\phi(\chi)$ est la classe du faisceau L_χ dont l'espace des sections $\Gamma(U, L_\chi)$ sur un ouvert U est l'ensemble

$$\{f \in \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_G) \mid \forall y \in \pi^{-1}(U)(\bar{F}), \forall p \in P(\bar{F}), f(pg) = \chi(p)f(g)\}.$$

Par [Pe1, lemme 6.2.10], l'image de $X^*(P)_{F^s}$ dans $X^*(T)_{F^s}$ coïncide avec le sous-réseau engendré par la famille $(\bar{\omega}_\alpha)_{\alpha \in \Delta - I}$ et le cône des diviseurs effectifs est donné par

$$C_{\text{eff}}(V^s) = \sum_{\alpha \in \Delta - I} \mathbf{R}_{\geq 0}(-\bar{\omega}_\alpha).$$

L'image de $X^*(P)_F$ dans $X^*(T)_{F^s}$ a donc pour base la famille

$$\left(\sum_{\beta \in j^{-1}(\alpha)} \bar{\omega}_\beta \right)_{\alpha \in {}_F\Delta - {}_FI}$$

et $C_{\text{eff}}(V)$ est donné par

$$(3.3.1) \quad \sum_{\alpha \in {}_F\Delta - {}_FI} \mathbf{R}_{\geq 0} \left(- \sum_{\beta \in J^{-1}(\alpha)} \bar{\omega}_\beta \right).$$

Pour tout $J \subset {}_F\Delta$, on note ${}_F\mathfrak{r}_J$ le radical de $\text{Lie}({}_FP_J)$ et on pose $\mathfrak{r} = {}_F\mathfrak{r}_{{}_FI}$. La représentation adjointe définit une action de P sur \mathfrak{r} et le fibré cotangent $\Omega_{V/F}^1$ est isomorphe au fibré $G \times^P \mathfrak{r}$ associé. En prenant les puissances extérieures maximales, on obtient que

$$\phi(\det \mathfrak{r}) = \omega_V.$$

On note

$$\rho_P = \frac{1}{2} \det \mathfrak{r} \in X^*(P)_F \otimes \mathbf{Q}$$

L'image de ρ_P dans $X^*(S)_F$ par la restriction coïncide avec la demi-somme des racines de S comptées avec des multiplicités égales à la dimension de leur espace propre dans \mathfrak{r} .

Notons en outre que tout choix de bases des sous-espaces propres de ${}_F\mathfrak{r}_\emptyset$ pour l'action de S définit un isomorphisme de F -espace vectoriel $\det \mathfrak{r} \xrightarrow{\sim} F$ et donc un isomorphisme

$$\omega_V \xrightarrow{\sim} L_{2\rho_P}.$$

Remarque 3.3.1. — Il résulte des descriptions de $C_{\text{eff}}(V)$ et de ω_V^{-1} que ω_V^{-1} appartient à $C_{\text{eff}}(V)^{\mathcal{O}}$ et que V vérifie l'hypothèse (i) des hypothèses géométriques ainsi que l'hypothèse (iv). L'hypothèse (ii) résulte de [Ke, p. 575] et, du fait que P est supposé réduit, la condition (iii) résulte de la description du groupe du Picard et la dernière du fait que \bar{V} est rationnelle. La variété vérifie donc l'ensemble des hypothèses géométriques.

3.4. Hauteurs sur les variétés de drapeaux. — Comme dans [FMT], nous allons tout d'abord nous restreindre au cas des hauteurs définies par des sous-groupes compacts maximaux. Le but de ce paragraphe est d'en rappeler la construction.

Notations 3.4.1. — Par la décomposition d'Iwasawa (cf. [Tit, §3.3.2]), Il existe pour toute place \mathfrak{p} de F un sous-groupe compact maximal $K_{\mathfrak{p}}$ de $G(F_{\mathfrak{p}})$ tel que

$$(3.4.1) \quad G(F_{\mathfrak{p}}) = P_0(F_{\mathfrak{p}})K_{\mathfrak{p}}.$$

En outre si \mathcal{G} est un modèle de G sur un ouvert de \mathbf{C} , alors par [Tit, §3.9.1], on peut supposer pour presque toute place \mathfrak{p} de F que

$$K_{\mathfrak{p}} = \mathcal{G}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$$

On pose $K = \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} K_{\mathfrak{p}}$. Pour tout caractère χ de P , pour toute place \mathfrak{p} de F , on considère la métrique $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ sur L_{χ} définie de la manière suivante : si U est un voisinage ouvert de x , s une section de L_{χ} non nulle en x et \tilde{s} l'élément de $\Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_G)$ qui lui correspond,

$$\forall k \in K_{\mathfrak{p}}, \quad \pi(k) = x \Rightarrow \|s(x)\|_{\mathfrak{p}} = |\tilde{s}(k)|_{\mathfrak{p}}.$$

L'existence d'un tel k est assuré par (3.4.1), et le terme de droite est indépendant de k puisque tout morphisme continu de $P(F_{\mathfrak{p}}) \cap K_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathbf{R}_{>0}$ est trivial.

Le système de métriques $(\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F}$ ainsi défini est bien adélique. En effet soit \mathcal{P} l'adhérence de P dans \mathcal{G} . Quitte à augmenter S , on peut supposer que \mathcal{P} est un sous-groupe parabolique de \mathcal{G} sur $\mathbf{C} - S$ et le quotient $\mathcal{P} \backslash \mathcal{G}$, bien défini par [Dem, proposition 1.2], fournit un modèle \mathcal{V} de V sur $\mathbf{C} - S$. On considère alors le faisceau \mathcal{L}_{χ} sur \mathcal{V} dont l'ensemble des sections sur un ouvert \mathcal{U} est

$$\{f \in \Gamma(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{O}_{\mathcal{G}}) \mid \forall g \in \pi^{-1}(\mathcal{U})(\overline{F}), \forall p \in P(\overline{F}), f(pg) = \chi(p)f(g)\}$$

pour tout ouvert \mathcal{U} de \mathcal{V} . Quitte à augmenter S , on a que \mathcal{L}_{χ} est un fibré en droites et un modèle de L_{χ} et pour tout $\mathfrak{p} \in M_F - S$ tel que $K_{\mathfrak{p}} = \mathcal{G}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ et tout x de $V(F_{\mathfrak{p}})$ se relevant en un élément k de $K_{\mathfrak{p}}$, la $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ -structure de $L_{\chi}(x)$ définie par L_{χ} est induite par la $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ -structure de $\mathcal{O}_G(c)$ induite par $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$, ce qui montre que $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ coïncide avec la métrique définie par \mathcal{L}_{χ} .

L'application

$$\chi \mapsto (L_{\chi}, (\|\cdot\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in M_F})$$

définit un système de métriques adéliques sur V qui vérifie de surcroît la propriété (P). Nous noterons \mathbf{H}_K ce système de hauteurs. Nous omettrons K dans cette notation lorsqu'aucune confusion ne sera possible.

3.5. Énoncé du résultat. — Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal :

Théorème 3.5.1. — *Avec les notations qui précèdent, on a que la fonction zêta des hauteurs $\zeta_{V, \mathbf{H}_K}(s)$ converge absolument pour*

$$s \in \omega_V^{-1} + C_{\text{eff}}(V)^{\circ} + i \text{Pic } V \otimes \mathbf{R}$$

et s'étend à $\text{Pic } V \otimes \mathbf{C}$ en une fonction méromorphe qui admet une expression rationnelle en des puissance de q . En outre la fonction méromorphe sur \mathbf{C} qui à s associe $\zeta_{V, \mathbf{H}_K}(s\omega_V^{-1})$ a un pôle d'ordre $t = \text{rg Pic } V$ en $s = 1$ avec

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t \zeta_{V, \mathbf{H}_K}(s\omega_V^{-1}) = \theta^*(V).$$

4. Démonstration du résultat

4.1. Fonction zêta et séries d'Eisenstein. — Comme dans [FMT, §2], la démonstration est basée sur le fait que la série zêta des hauteurs coïncide avec une série d'Eisenstein, ce qui permet d'appliquer les résultats démontrés par Morris dans [Mo1] et [Mo2] pour ces séries.

Notations 4.1.1. — Pour toute partie J de ${}_F\Delta$, on note S_J le tore

$$\left(\bigcap_{\alpha \in J} \text{Ker } \alpha \right)^\circ$$

où pour tout groupe algébrique H , on désigne par H° sa composante neutre. On pose également

$${}_F M_J = Z_G(S_J) \quad \text{et} \quad {}_F N_J = \mathcal{R}_u({}_F P_J).$$

Le groupe parabolique ${}_F P_J$ est alors le produit semi-direct de ${}_F M_J$ par ${}_F N_J$. La restriction induit un isomorphisme

$$X^*({}_F P_J) \xrightarrow{\sim} X^*({}_F M_J).$$

Dans la suite, on posera

$$\mathfrak{a}_J = X^*({}_F M_J) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \xrightarrow{\text{Res}} X^*(S_J) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$$

et on notera M (resp. N , \mathfrak{a} , M_0 , N_0 , \mathfrak{a}_0) pour ${}_F M_{FI}$ (resp. ${}_F N_{FI}$, \mathfrak{a}_{FI} , ${}_F M_\emptyset$, ${}_F N_\emptyset$, \mathfrak{a}_\emptyset).

Pour tout place \mathfrak{p} de F , on définit un morphisme

$$H_{P, \mathfrak{p}} : M(\mathbf{F}_\mathfrak{p}) \rightarrow \mathfrak{a}^\vee$$

par la relation

$$\forall \chi \in X^*(M), \quad \forall z \in Z_M(\mathbf{F}_\mathfrak{p}), \quad |\chi(z)|_\mathfrak{p} = q^{\langle H_{P, \mathfrak{p}}(z), \chi \rangle}$$

et $H_P : M(\mathcal{A}_F) \rightarrow \mathfrak{a}^\vee$ est défini comme la somme des morphisme $H_{P,\mathfrak{p}}$. On étend H_P en une application de $G(\mathcal{A}_F)$ dans \mathfrak{a}^\vee de la manière suivante :

$$\forall n \in N(\mathcal{A}_F), \quad \forall m \in M(\mathcal{A}_F), \quad \forall k \in K, \quad H_P(nmc) = H_P(c).$$

Pour tout sous-groupe compact ouvert K' de K , on notera $\mathcal{C}^0(P, K')$ l'ensemble des fonctions continues

$$\varphi : P(\mathcal{A}_F) \backslash G(\mathcal{A}_F) \rightarrow \mathbf{C}$$

telles que φ soit K' -finie à droite (i.e. l'espace vectoriel engendré par les translatés de φ par les éléments de K' est de dimension finie). Si φ appartient à $\mathcal{C}^0(P, K')$ et ξ à \mathfrak{a} , on définit

$$\forall g \in G(\mathcal{A}_F), \quad T_\xi \varphi(g) = q^{\langle H_P(g), \xi \rangle} \varphi(g).$$

Définition 4.1.2. — Si $\varphi \in \mathcal{C}^0(P, K')$ et $\xi \in \mathfrak{a}$, la série d'Eisenstein associée à φ et ξ est définie par

$$\forall g \in G(\mathcal{A}_F), \quad E_P^G(\varphi, \xi, g) = \sum_{\gamma \in P(F) \backslash G(F)} T_{\xi + \rho_P} \varphi(\gamma g).$$

D'après un lemme de Godement [Mo1, §2.2.2, lemme, p. 118] cette série converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de $G(\mathcal{A}_F)$ dès que $\operatorname{Re}(\xi - \rho_P)$ appartient à C_P où C_P est la chambre de Weyl définie par

$$\forall \alpha \in {}_F\Delta - {}_F I, \quad (\lambda, \check{\alpha}) \geq 0.$$

On notera $E_P^G(\xi, \cdot)$ la fonction $E_P^G(1, \xi, \cdot)$.

Proposition 4.1.1. — La série définissant la fonction zêta des hauteurs $\zeta_{V, \mathbf{H}}(s)$ coïncide avec celle définissant $E_P^G(s - \rho_P, e)$.

Démonstration. — Par [Bo, proposition 20.5], l'application $\pi : G(F) \rightarrow V(F)$ est surjective. Il suffit donc de vérifier que pour tout élément g de $G(F)$, on a

$$\mathbf{H}_K(\chi)(\pi(g)) = q^{\langle H_P(g), \chi \rangle}.$$

On écrit donc $g = nmk$ avec $n \in N(\mathcal{A}_F)$, $m \in M(\mathcal{A}_F)$ et $k \in K$. Soit s une section de L_χ sur un voisinage ouvert U de $\pi(g)$, non nulle en $\pi(g)$ et correspondant à un élément \tilde{s} de $\Gamma(G, \mathcal{O}_G)$. Par définition on a

$$\mathbf{H}_K(\chi)(\pi(g)) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} \|s(\pi(g))\|_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} |\tilde{s}(k_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}}^{-1}.$$

Mais par la formule du produit $\prod_{\mathfrak{p} \in M_F} |\tilde{s}(g)|_{\mathfrak{p}} = 1$ et donc

$$\left(\prod_{\mathfrak{p} \in M_F} |\chi(m_{\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}} \right) \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} |\tilde{s}(k_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}} = 1.$$

On en déduit les égalités

$$H_K(\chi)(\pi(g)) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} |\chi(m_{\mathfrak{p}})|_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} q^{\langle H_{P,\mathfrak{p}}(g), \chi \rangle} = q^{\langle H_P(g), \chi \rangle}. \quad \square$$

Corollaire 4.1.2. — *La fonction zêta des hauteurs ζ_{V, \mathbf{H}_K} converge absolument dans le cône ouvert*

$$\omega_V^{-1} + C_{\text{eff}}(V)^{\circ} + i \text{Pic } V \otimes \mathbf{R}$$

et s'étend en une fonction méromorphe sur \mathbf{C} qui admet une expression rationnelle en des puissances de q .

Démonstration. — D'après [BoTi1, §12.12], on a

(4.1.1)

$$\forall \alpha, \alpha' \in {}_F\Delta, \quad \alpha \neq \alpha' \Rightarrow \left\langle \sum_{\beta \in j^{-1}(\alpha)} \bar{\omega}_{\beta, \check{\alpha}} \right\rangle > 0 \quad \text{et} \quad \left\langle \sum_{\beta \in j^{-1}(\alpha')} \bar{\omega}_{\beta, \check{\alpha}'} \right\rangle = 0$$

Par conséquent le cône C_P coïncide d'après (3.3.1) avec le cône $C_{\text{eff}}(V)$. La première assertion résulte donc de [Mo1, lemma, p. 118] mentionné cité ci-dessus. La seconde est un résultat de Morris [Mo2, §6.6, lemma, p. 1164] \square

4.2. Ordre du pôle au sommet du cône. — L'objectif de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 4.2.1. — *Le lieu des singularités de la fonction ζ_{V, \mathbf{H}_K} au voisinage du point $s = \omega_V^{-1}$ coïncide avec la réunion des hyperplans*

$$\langle \check{\alpha}, \lambda - \omega_V^{-1} \rangle = 0$$

pour $\alpha \in {}_F\Delta - {}_FI$, chacun de ces hyperplans intervenant avec une multiplicité au plus égale à un.

Remarques 4.2.2. — (i) Nous verrons plus loin que la multiplicité est en réalité exactement égale à un.

(ii) Le fait que les singularités soient hyperplanes résulte de la proposition 4.1.1 et de [Mo2, §6.6, lemma, p. 1164].

Comme dans [FMT, §2] le principe de la démonstration est de considérer la fibration

$$P_0 \backslash P \rightarrow P_0 \backslash G \rightarrow V,$$

d'exprimer le terme constant des séries d'Eisenstein correspondant à $P_0 \backslash P$ et $P_0 \backslash G$ en termes des opérateurs d'entrelacements. Comme dans Harder [Harder, p. 278] ou Morris [Mo1, §4.3.4], l'étude des singularités des séries d'Eisenstein se réduit alors à la description de celles des opérateurs d'entrelacement qui se déduisent des équations fonctionnelles et du cas de l'opérateur associé à une réflexion.

Notations 4.2.1. — Pour tout φ de $\mathcal{C}^0(P_0, K')$ et ξ de \mathfrak{a} , la série d'Eisenstein partielle $E_{P_0}^P$ est définie par

$$E_{P_0}^P(\varphi, \xi, g) = \sum_{\gamma \in P_0(F) \backslash P(F)} T_{\xi + \rho_{P_0}} \varphi(\gamma g).$$

Pour tout $w \in {}_F W$ représenté par un élément w' de $\mathcal{N}_G(S)(k)$, la fonction $C(w, \xi)\varphi$ est définie par

$$\forall g \in G(\mathcal{A}_F), \quad C(w, \xi)\varphi(g) = \int_{w'N_0(\mathcal{A}_F)w'^{-1} \cap N_0(\mathcal{A}_F) \backslash N_0(\mathcal{A}_F)} q^{\langle H_{P_0}(w'^{-1}ng), \xi + \rho_{P_0} \rangle} \varphi(w'^{-1}ng) dn$$

où pour tout groupe unipotent U sur F , la mesure de Haar sur $U(\mathcal{A}_F)$ est normalisée par

$$\int_{U(F) \backslash U(\mathcal{A}_F)} du = 1.$$

On note également $E_{P_0}^P(\xi, g) = E_{P_0}^P(1, \xi, g)$ et $c(w, \xi) = (C(w, \xi)1)(e)$.

Remarque 4.2.3. — Par [Mo1, §2.4.8, theorem, p. 134] et [Mo1, §4.3.1, p. 167], on a les équations fonctionnelles

$$(4.2.1) \quad c(w_1, w_2\xi)c(w_2, \xi) = c(w_1 w_2, \xi)$$

et

$$(4.2.2) \quad c(w, \lambda)E_{P_0}^G(w\lambda, g) = E_{P_0}^G(\lambda, g).$$

En outre, par définition, pour tout ξ' de \mathfrak{a} invariant par w on a

$$(4.2.3) \quad c(w, \xi + \xi') = c(w, \xi)$$

Lemme 4.2.4. — Si $w \in {}_F W$, le lieu des singularités de la fonction $c(w, \cdot)$ au voisinage du point $\lambda = \rho_{P_0}$ est égale à la réunion des hyperplans

$$\langle \check{\alpha}, \lambda - \rho_{P_0} \rangle$$

où α décrit l'ensemble $\{\alpha \in {}_F \Delta \mid w\alpha < 0\}$. La multiplicité de chacun de ces hyperplans est exactement égale à un.

Remarque 4.2.5. — Dans le cas où G est un groupe de Chevalley, ce résultat découle immédiatement de ceux de Harder [Harder, p. 278].

Démonstration. — Comme dans [FMT, p. 429], si $w = s_\alpha$ avec $\alpha \in {}_F \Delta$ il résulte de (4.2.3) que l'hyperplan défini par

$$\langle \check{\alpha}, \lambda - \rho_{P_0} \rangle = 0$$

contient le lieu singulier de $c(s_\alpha, \cdot)$ au voisinage de ρ_{P_0} . Le fait que ce pôle soit au plus de multiplicité un résulte de [Mo1, §3.5.2, theorem(i)]. Pour montrer que c'est effectivement un pôle, il suffit d'écrire $c(s_\alpha, \cdot)$ comme produit de facteurs locaux (cf. aussi la démonstration du théorème 4.3.1).

En général, on écrit

$$w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_q}$$

avec $\alpha_i \in {}_F \Delta$ et q minimal. On pose

$$w_j = s_{\alpha_{j+1}} \cdots s_{\alpha_q}.$$

Alors l'équation fonctionnelle (4.2.1) fournit l'égalité

$$c(w, \lambda) = c(s_{\alpha_1}, w_1 \lambda) \cdots c(s_{\alpha_q}, \lambda).$$

Mais par [Bki, Ch. VI, §1.1.6, corollaire 2, p. 158], on a que $w_j^{-1} \alpha_j < 0$ et que $\{\alpha \in {}_F \Phi^+ \mid w\alpha < 0\}$ coïncide avec l'ensemble $\{w_j^{-1} \alpha_j, 1 \leq j \leq q\}$. Il résulte alors de [FMT, §8, sublemma, p. 430] que

$$\langle \alpha_j, w_j \rho_{P_0} \rangle \geq \langle \check{\alpha}_j, \rho_{P_0} \rangle$$

avec égalité uniquement si $w_j^{-1} \alpha_j \in {}_F \Delta$. Comme dans [FMT], on déduit alors du cas qui précède que $c(s_{\alpha_j}, w_j \cdot)$ est régulier au voisinage de ρ_{P_0} sauf si $w_j^{-1} \alpha_j \in {}_F \Delta$ auquel cas la singularité est contenue dans l'hyperplan

$$\langle w_j^{-1} \alpha_j, \lambda - \rho_{P_0} \rangle = 0$$

qui est de multiplicité un. □

Fin de la démonstration de la proposition 4.2.1. — Il résulte de [Mo1, §4.3.4], que les singularités de $E_{P_0}^G(\cdot, g)$ sont dominées par celles de $c({}_F w_{FI} \Delta, \cdot)$. le résultat est donc démontré dans le cas où $P = P_0$. Dans le cas général, pour tout ξ de

$$\rho_{P_0} + C_{P_0} + iX^*(S) \otimes \mathbf{R}$$

le terme constant de $E_{P_0}^P$ est donné, d'après la démonstration de [Mo1, §2.3.1, lemma, p. 122], par la formule

$$\int_{N_0(\mathbf{F}) \backslash N_0(\mathcal{A}_F)} E_{P_0}^P(\xi, ng) dn = \sum_{w \in {}_F W_{FI}} c(w, \xi) q^{\langle H_{P_0}(g), w\xi + 2\rho_P \rangle}.$$

En prenant les systèmes d'Eisenstein résiduels successifs (cf [Mo1, exemple 3.11.2, p. 1130–1132]) on obtient pour tout ξ de \mathfrak{a} la relation

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathfrak{a}^\perp}} \left(\prod_{\alpha \in FI} \langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \right) E_{P_0}^P(\lambda + \xi + \rho_{P_0}, g) = C_P q^{\langle H_P(g), \xi + 2\rho_P \rangle}$$

où $\mathfrak{a}^\perp = \{\lambda \in X^*(S) \otimes \mathbf{R} \mid \lambda|_{FS_I} = 0\}$ et la constante C_P est définie par

$$(4.2.4) \quad C_P = \lim_{\lambda \rightarrow \rho_{P_0}} \left(\prod_{\alpha \in FI} \langle \check{\alpha}, \lambda - \rho_{P_0} \rangle \right) c({}_F w_{FI}, \lambda).$$

En sommant sur $P(F) \backslash G(F)$, on obtient

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathfrak{a}^\perp}} \left(\prod_{\alpha \in FI} \langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \right) E_{P_0}^G(\lambda + \xi + \rho_{P_0}, g) = C_P E_P^G(\xi + \rho_P, g)$$

et l'assertion pour E_P^G découle de celle pour $E_{P_0}^G$ et du fait que $C_P \neq 0$. \square

Remarque 4.2.6. — Il découle de la démonstration précédente que que

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\prod_{\alpha \in \Delta_0 - FI} \langle \check{\alpha}, \xi \rangle \right) E_P^G(\xi + \rho_P, g) = C_G / C_P$$

et donc par la proposition 4.1.1,

$$(4.2.5) \quad \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg Pic } V} \zeta_{V, \mathbf{H}_K}((s-1)\omega_V^{-1}) = \left(\prod_{\alpha \in F\Delta_{FI}} \langle \check{\alpha}, 2\rho_P \rangle^{-1} \right) \frac{C_G}{C_P}$$

4.3. Valeur de la constante. — Par la remarque précédente, pour clôre la démonstration, il suffit de comparer C_G/C_P et $\theta_H^*(V)$ ce qui redémontrera du même coup que C_G/C_P est une constante non nulle et que les multiplicités des hyperplans $\langle \check{\alpha}, \xi \rangle = 0$ sont bien égales à un.

Théorème 4.3.1. — *On a la relation*

$$(4.3.1) \quad \left(\prod_{\alpha \in {}_F\Delta} \langle \check{\alpha}, 2\rho_P \rangle \right) \frac{C_G}{C_P} = \theta_H^*(V)$$

Pour démontrer ce résultat, il nous faut d'abord écrire l'opérateur d'entrelacement comme produit d'opérateurs locaux que nous allons maintenant définir.

Notations 4.3.1. — Pour toute place \mathfrak{p} de F , on note ${}_{F_{\mathfrak{p}}}S$ un tore scindé maximal de $G_{F_{\mathfrak{p}}}$ tel que

$${}_{F_{\mathfrak{p}}}S_{F_{\mathfrak{p}}} \subset {}_{F_{\mathfrak{p}}}S \subset P_{0F_{\mathfrak{p}}},$$

on note ${}_{F_{\mathfrak{p}}}P_0$ un sous-groupe parabolique minimal de $G_{F_{\mathfrak{p}}}$ tel que

$${}_{F_{\mathfrak{p}}}S \subset {}_{F_{\mathfrak{p}}}P_0 \subset P_{0F_{\mathfrak{p}}}$$

et ${}_{F_{\mathfrak{p}}}N$ son radical unipotent. Quitte à modifier le choix de certains des compacts $K_{\mathfrak{p}}$, on peut supposer que

$$G(F_{\mathfrak{p}}) = {}_{F_{\mathfrak{p}}}P_0(F_{\mathfrak{p}})K_{\mathfrak{p}}.$$

On note ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\Phi$ le système de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}S$ dans $G_{F_{\mathfrak{p}}}$ et ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\Delta$ la base de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\Phi$ correspondant à ${}_{F_{\mathfrak{p}}}P_0$.

Si J est une partie de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\Delta$, on définit comme précédemment le sous groupe parabolique ${}_{F_{\mathfrak{p}}}P_J$, l'algèbre de Lie ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{t}_J$, le \mathbf{C} -espace vectoriel ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{a}_J$, l'élément ${}_{F_{\mathfrak{p}}}w_J$ du groupe de Weyl le caractère $\rho_{{}_{F_{\mathfrak{p}}}P_J}$ et la fonction $H_{{}_{F_{\mathfrak{p}}}P_J, \mathfrak{p}}$. On se donne en outre des bases des sous-espaces propres de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{t}_{\emptyset}$ pour l'action de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}S$ de sorte que pour toute partie J de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\Delta$, l'isomorphisme de F -espaces vectoriels

$$\Lambda^{\dim {}_{F_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{t}_J}({}_{F_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{t}_J \otimes \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$$

induit par ces bases coïncide avec celui induit par les bases choisies sur F .

Si U est un ${}_{F_{\mathfrak{p}}}$ groupe unipotent de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}P_{\emptyset}$ ou de son opposé, alors ces bases définissent un isomorphisme de variété de U sur $\mathbf{A}_{F_{\mathfrak{p}}}^{\dim U}$, ce qui permet de normaliser la mesure de Haar sur $U(F_{\mathfrak{p}})$.

Quitte à modifier à nouveau certains des $K_{\mathfrak{p}}$, on peut fixer pour tout w de ${}_FW$ des représentants \tilde{w} appartenant à $\mathcal{N}_G(S)(F) \cap K$.

Définition 4.3.2. — Pour tout λ de ${}_F\mathfrak{a}_0$, et tout w de ${}_FW$, on considère

$${}_F c_{\mathfrak{p}}(w, \lambda) = \int_{[\tilde{w} {}_FN(F_{\mathfrak{p}}) \tilde{w}^{-1} \cap {}_FN(F_{\mathfrak{p}})] \setminus {}_FN(F_{\mathfrak{p}})} \exp(\langle H_{P_0, \mathfrak{p}}(\tilde{w}^{-1} n), \lambda + \rho_{P_0} \rangle) dn_{\mathfrak{p}}.$$

Remarque 4.3.2. — Le quotient C_G/C_P se met alors sous la forme

$$(4.3.2) \quad \frac{C_G}{C_P} = \frac{1}{q^{(g-1)\dim V}} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \prod_{\alpha \in {}_F\Delta - I} \langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} \frac{{}_F c_{\mathfrak{p}}({}_F w_{F\Delta}, \lambda + \rho_{P_0})}{{}_F c_{\mathfrak{p}}({}_F w_{FI}, \lambda + \rho_{P_0})}.$$

Définition 4.3.3. — Pour tout λ de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{a}_0$ et tout w de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}W$ se relevant en $w' \in K_{\mathfrak{p}}$

$$c_{\mathfrak{p}}(w, \lambda) = \int_{[w' {}_{F_{\mathfrak{p}}}N(F_{\mathfrak{p}}) w'^{-1} \cap {}_{F_{\mathfrak{p}}}N(F_{\mathfrak{p}})] \setminus {}_{F_{\mathfrak{p}}}N(F_{\mathfrak{p}})} \exp(\langle H_{F_{\mathfrak{p}}P_0, \mathfrak{p}}(w'^{-1}), \lambda + \rho_{F_{\mathfrak{p}}P} \rangle) dn_{\mathfrak{p}}$$

Remarque 4.3.3. — Casselman donne dans [Cas] une expression explicite pour $c_{\mathfrak{p}}(w, \lambda)$ en reliant ${}_F c_{\mathfrak{p}}(w, \lambda)$ à ce terme, on obtiendra une expression explicite pour ce dernier.

Lemme 4.3.4. — Le volume de la variété à la place \mathfrak{p} vérifie

$$\omega_{\mathfrak{p}}(V(F_{\mathfrak{p}})) = \frac{{}_F c_{\mathfrak{p}}(w_{F\Delta}, \rho_{P_0})}{{}_F c_{\mathfrak{p}}(w_{FI}, \rho_{P_0})}$$

Démonstration. — Ceci résulte immédiatement de la démonstration du lemme 6.2.7 dans [Pe1]. \square

Lemme 4.3.5. — Avec les notations précédentes on a la relation

$$\frac{{}_F c_{\mathfrak{p}}({}_F w_{F\Delta}, \lambda + \rho_{P_0})}{{}_F c_{\mathfrak{p}}({}_F w_{FI}, \lambda + \rho_{P_0})} = \frac{c_{\mathfrak{p}}(w_{F_{\mathfrak{p}}\Delta}, \text{Res} \lambda + \rho_{F_{\mathfrak{p}}P})}{c_{\mathfrak{p}}(w_{F_{\mathfrak{p}}I}, \text{Res} \lambda + \rho_{F_{\mathfrak{p}}P})}$$

où ${}_{F_{\mathfrak{p}}}I$ désigne la partie de ${}_{F_{\mathfrak{p}}}\Delta$ correspondant à $P_{F_{\mathfrak{p}}}$.

Démonstration. — Ce lemme se montre comme le lemme 6.2.8 de [Pe1]. \square

Notation 4.3.4. — On note

$$\lambda_{P_0} = \sum_{\alpha \in f^{-1}({}_F\Delta)} \omega_{\alpha} \in \text{Pic}(V_0) \xrightarrow{\sim} X^*(P_0)_F \subset \mathfrak{a}_0.$$

Lemme 4.3.6. — *Le produit*

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_F} L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \overline{V})^{-1} \frac{c_{\mathfrak{p}}(w_{F\Delta}, (s-1) \text{Res } \lambda_{FP} + \rho_{FP} P_0)}{c_{\mathfrak{p}}(w_{FI}, (s-1) \text{Res } \lambda_{FP} + \rho_{FP} P_0)}$$

converge absolument au voisinage de $s = 1$.

Démonstration. — Comme dans la démonstration du lemme 6.2.12 de [Pe1], cela résulte de l'expression explicite donnée par Casselmann de $c_{\mathfrak{p}}(w, \chi)$. \square

Lemme 4.3.7. — *La constante $\alpha^*(V)$ est donnée par la formule*

$$\alpha^*(V) = \frac{\prod_{\alpha \in F\Delta - FI} \langle \check{\alpha}, \lambda_{FP} \rangle}{\prod_{\alpha \in F\Delta - FI} \langle \check{\alpha}, 2\rho_P \rangle}.$$

Démonstration. — Ceci résulte immédiatement de la description de $C_{\text{eff}}(V)$ donnée par (3.3.1) et du fait, déjà indiqué en (4.1.1) que la matrice de changement de base passant de $(\check{\alpha})_{\alpha \in F\Delta}$ à la base duale de $(\sum_{\beta \in J^{-1}(\alpha)} \hat{\omega}_{\beta})_{\alpha \in F\Delta}$ est diagonale. \square

Démonstration du théorème 4.3.1. — Par la formule (4.3.2), on a que le quotient C_G/C_P vaut

$$\frac{\prod_{\alpha \in F\Delta - FI} \langle \check{\alpha}, \lambda_{FP_0} \rangle}{q^{(g-1) \dim V}} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg Pic } V} \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} \frac{F c_{\mathfrak{p}}(w_{F\Delta}, (s-1) \lambda_{FP_0} + \rho_{FP_0})}{F c_{\mathfrak{p}}(w_{FI}, (s-1) \lambda_{FP_0} + \rho_{FP_0})}.$$

Pour tout \mathfrak{p} de M_F , on note $\lambda_{\mathfrak{p}}(s) = L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \overline{V})$ et le quotient C_G/C_P s'écrit

$$\frac{\prod_{\alpha \in F\Delta - FI} \langle \check{\alpha}, \lambda_{FP_0} \rangle}{q^{(g-1) \dim V}} \lim_{s \rightarrow 1} \left[(s-1)^{\text{rg Pic } V} L(s, \text{Pic } \overline{V}) \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} \lambda_{\mathfrak{p}}(s)^{-1} \frac{F c_{\mathfrak{p}}(w_{F\Delta}, (s-1) \lambda_{FP_0} + \rho_{FP_0})}{F c_{\mathfrak{p}}(w_{FI}, (s-1) \lambda_{FP_0} + \rho_{FP_0})} \right].$$

par les lemmes 4.3.5 et 4.3.6, le produit du bas converge absolument au voisinage de 1 et le quotient C_G/C_P se met sous la forme

$$\begin{aligned} & \prod_{\alpha \in F\Delta - FI} \langle \check{\alpha}, \lambda_{FP_0} \rangle \frac{\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg Pic } V} L(s, \text{Pic } \overline{V})}{q^{(g-1)\dim V}} \\ & \times \prod_{\mathfrak{p} \in M_F} \lambda_{\mathfrak{p}}(1)^{-1} \frac{F^c \mathfrak{p}(w_{F\Delta}, \rho_{FP_0})}{F^c \mathfrak{p}(w_{FI}, \rho_{FP_0})} \\ & = \prod_{\alpha \in F\Delta - FI} \langle \check{\alpha}, \lambda_{FP_0} \rangle \tau_{\mathbf{H}_K}(V) \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Je tiens à remercier Laure Blasco pour ses précieuses indications.

Références

- [BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.
- [BT1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.
- [BT2] ———, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.
- [BT3] ———, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), n° 1, 15–53.
- [Bo] A. Borel, *Linear algebraic groups (Second enlarged edition)*, Graduate Texts in Math., vol. 126, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1991.
- [BoTi1] A. Borel et J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. I.H.E.S. **27** (1965), 55–150.
- [BoTi2] ———, *Compléments à l'article : « groupes réductifs »*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 253–276.
- [Bki] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4, 5 et 6*, Masson, Paris, 1981.
- [Bou1] D. Bourqui, *Fonction zêta des hauteurs des surfaces de Hirzebruch dans le cas fonctionnel*, J. of Number Theory **94** (2002), 343–358.
- [Bou2] ———, *Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques déployées dans le cas fonctionnel*, J. reine angew. Math. **562** (2003), 17–199.
- [Bou3] ———, *Fonctions zêta des hauteurs des variétés toriques non déployées*, Memoirs of the AMS, vol. 211, 2011.

- [Cas] W. Casselman, *The unramified principal series of p -adic groups I. The spherical function*, Compositio Math. **40** (1980), n° 3, 387–406.
- [CTS] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.
- [De] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–307.
- [Dem] M. Demazure, *Sous-groupes paraboliques des groupes réductifs*, Schémas en groupes III (Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1962/64 (SGA3)), Lect. Notes in Math., n° 153, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.
- [EGA] J. A. Dieudonné et A. Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S., vol. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28 et 32, 1960–67.
- [Dr] P. K. J. Draxl, *L-Funktionen algebraischer Tori*, J. of Number Theory **3** (1971), 444–467.
- [FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.
- [Gr1] A. Grothendieck, *Géométrie formelle et géométrie algébrique*, Séminaire Bourbaki 11-ème année, 1958/59, n° 182.
- [Gr2] ———, *Le groupe de Brauer III : Exemples et compléments*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968, pp. 88–188.
- [Gr3] ———, *Le groupe de Brauer II : Théorie cohomologique*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968, pp. 67–87.
- [Harder] G. Harder, *Chevalley groups over function fields and automorphic forms*, Ann. of Math. **100** (1974), 249–306.
- [Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1977.
- [Hs] Liang chung Hsia, *On the dynamical height zeta functions*, J. Number Theory **63** (1997), 146–169.
- [Ke] G. R. Kempf, *Algebraic representations of reductive groups*, Proc. of the Internat. Congress of Math. (Helsinki, 1978), Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, pp. 575–577.
- [Kö] M. Köcher, *Positivitätsbereiche im \mathbf{R}^n* , Amer. J. Math. **79** (1957), 575–596.
- [LY] K. F. Lai and K. M. Yeung, *Rational points in flag varieties*, J. of Number Theory **95** (2002), 142–149.
- [La] S. Lang, *Fundamentals of diophantine equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1983.

- [Mo1] L. E. Morris, *Eisenstein series for reductive groups over global function fields I. The cusp form case*, Can. J. Math. **34** (1982), 91–168.
- [Mo2] ———, *Eisenstein series for reductive groups over global function fields II. The general case*, Can. J. Math. **34** (1982), 1112–1182.
- [Oda] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1988.
- [Pe1] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.
- [Pe2] ———, *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 259–298.
- [Pe3] ———, *Torseurs universels et méthode du cercle*, Rational points on algebraic varieties, Progress in Math., vol. 199, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 221–274.
- [Ro] M. Rosenlicht, *Toroidal algebraic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 984–988.
- [Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.
- [San] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.
- [Se1] J.-P. Serre, *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures)*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou 11-ème année, 1969/70, n° 19.
- [Se2] ———, *Valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (d’après P. Deligne)*, Séminaire Bourbaki 26-ème année, 1973/74, n° 446.
- [Se3] ———, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.
- [Si] J. H. Silverman, *The theory of height functions*, Arithmetic geometry (G. Cornell and J.H. Silverman, eds.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1986, pp. 151–166.
- [Tit] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, (A. Borel and W. Casselman, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33 Part 1, AMS, Providence, 1979, pp. 29–69.
- [We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

EMMANUEL PEYRE, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France

Url: <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre>

- *E-mail*: Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr

