

---

## HAUTEURS ET MESURES DE TAMAGAWA SUR LES VARIÉTÉS DE FANO\*

*par*

Emmanuel Peyre

---

**Résumé.** — Soit  $V$  une variété de Fano. On peut construire sur  $V$  une hauteur correspondant à l'opposé du faisceau canonique. Pour tout ouvert  $U$  de  $V$ , on note  $n_U(B)$  le cardinal des points rationnels de  $U$  de hauteur inférieure à  $B$ . Manin a conjecturé que, pour un ouvert  $U$  convenable, il existe une constante  $C$  telle que

$$n_U(B) \sim CB \log^{t-1} B \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

avec  $t = \text{rg Pic}(V)$ . Ce texte donne tout d'abord une expression conjecturale de la constante  $C$  en termes du volume de l'espace adélique associé à  $V$  pour une mesure de Tamagawa dépendant du choix de la hauteur. Cette expression est compatible avec les résultats de la méthode du cercle et redonne les constantes obtenues antérieurement par Schanuel pour l'espace projectif et par Franke, Manin et Tschinkel pour les variétés de drapeaux généralisées lorsque le groupe est quasi-déployé. La conjecture ainsi raffinée est ensuite vérifiée pour diverses variétés toriques obtenues en éclatant des sous-espaces de  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$ .

**Abstract.** — Let  $V$  be a Fano variety and let  $h$  be a height on  $V$  corresponding to the inverse of the canonical sheaf. For any open set  $U$  of  $V$ , let  $n_U(B)$  denote the number of rational points in  $U$  whose height is bounded by  $B$ . Manin conjectured that for a small enough  $U$ , there exists a constant  $C$  such that

$$n_U(B) \sim CB \log^{t-1} B$$

where  $t = \text{rk Pic } V$ . The first aim of this paper is to give a conjectural expression for the constant  $C$  in terms of the adelic volume of  $V$  for a Tamagawa measure corresponding to the chosen height. This expression agrees with the constants computed by Schanuel for projective spaces and by Franke, Manin and Tschinkel for generalized flag varieties under quasi-split groups and is compatible with the results of the circle method. We then check the conjecture thus refined for toric varieties obtained as the blowing-up of particular subspaces in  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$ .

---

\*Duke Math. J. 79 (1995), 101–218

Soit  $V$  une variété de Fano telle que l'opposé du faisceau canonique  $\omega_V^{-1}$  soit très ample. A toute base de  $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$  correspond une hauteur  $H$  sur  $V$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $V$ , on note

$$n_U(B) = \#\{P \in U(k)/H(P) \leq B\}.$$

Manin a conjecturé qu'à condition de se restreindre à un ouvert suffisamment petit  $U$ , le comportement asymptotique de ce cardinal est de la forme

$$n_U(B) \sim CB \log^{t-1} B$$

où  $t$  désigne le rang du groupe de Picard de  $V$ . Il faut noter que la constante qui apparaît dans cette estimation dépend des choix faits lors de la construction de la hauteur. Toutefois il est possible de donner une expression conjecturale de cette constante. Pour cela, on utilise tout d'abord la correspondance naturelle entre hauteurs et systèmes de métriques sur les fibrés canoniques des variétés  $V \times_k k_\nu$ , où les corps  $k_\nu$  sont les complétés de  $k$  pour les différentes places  $\nu$  de  $k$ . Un tel système de métriques permet alors de construire une mesure de Tamagawa sur  $V$  qui généralise la mesure de Tamagawa usuelle pour les groupes algébriques notamment décrite dans [We], ainsi que la mesure de Leray utilisée dans la méthode du cercle (cf. [Lac]). La constante conjecturale s'exprime alors en termes du nombre de Tamagawa correspondant. La conjecture ainsi raffinée est stable par produit de variétés, redonne les constantes obtenues antérieurement par Schanuel pour l'espace projectif et par Franke, Manin et Tshinkel pour les variétés de drapeaux généralisées lorsque le groupe est quasi-déployé. Elle est également compatible avec les résultats de la méthode du cercle.

Dans le cas des variétés de drapeaux ou celui des intersections complètes, le résultat est indépendant de l'ouvert choisi. En particulier, on peut prendre  $U = V$ . Cela n'est plus possible lorsque la variété contient des sous-variétés accumulatrices. Les exemples les plus simples de telles variétés sont obtenues par éclatement. Il nous a donc semblé intéressant de vérifier la conjecture de Manin raffinée pour les surfaces de Del Pezzo obtenues en éclatant un, deux ou trois points sur  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$  ainsi que pour la variété obtenue en éclatant les sous-espaces de  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$  définis par les équations  $X_i = 0$  pour  $i \in I$ , où  $I$  décrit les parties de  $\{0, \dots, n\}$  telles que  $2 \leq \#I \leq n$ .

L'énoncé de la conjecture de Manin est rappelé dans la partie 1. L'objet de la partie 2 est la construction de la constante conjecturale. Dans les parties 3, 4 et 6, nous vérifions la compatibilité de la conjecture raffinée avec les résultats antérieurs. La partie 5 donne une condition nécessaire et suffisante pour que la

conjecture soit indépendante de la construction de la hauteur. Dans les parties 8 à 10 nous montrons la conjecture pour des variétés obtenues par éclatement.

### Table des matières

1. Une conjecture de Manin.....	3
2. Hauteurs et mesures de Tamagawa sur une variété de Fano..	7
3. Compatibilité de la conjecture avec le produit de variétés...	14
4. Le cas des intersections complètes non singulières.....	16
5. Indépendance vis-à-vis de la construction de la hauteur.....	27
6. Compatibilité de la conjecture avec les résultats de Schanuel, Franke, Manin et Tschinkel.....	31
7. Généralités sur les éclatements.....	51
8. Cas de l'éclatement de $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ en trois points rationnels et de ses analogues en dimension supérieure.....	53
9. Cas de l'éclatement en un point rationnel.....	77
10. Cas de l'éclatement en deux points rationnels.....	81
11. Cas de l'éclatement en deux points conjugués.....	85
Références.....	96

## 1. Une conjecture de Manin

**1.1. Notations.** — Nous commençons par introduire des notations qui sont utilisées dans l'ensemble de ce texte.

**Notation .** — Pour tout corps  $F$ , on note  $\overline{F}$  une clôture algébrique de  $F$ .

Pour tout corps de nombres  $k$ ,  $\mathcal{O}_k$  désigne son anneau des entiers et  $U_k$  le groupe des unités de  $k$ . On notera  $M_k$  l'ensemble des places de  $k$ ,  $M_{f,k} \subset M_k$  l'ensemble des idéaux premiers de  $\mathcal{O}_k$  et  $M_{\infty,k}$  l'ensemble des places à l'infini de  $k$ . Pour tout  $\mathfrak{p} \in M_k$ , on note  $k_{\mathfrak{p}}$  le corps local correspondant et  $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$  la norme associée à  $\mathfrak{p}$  définie par (cf. [Se3, page 9])

$$\forall x \in k_{\mathfrak{p}}, |x|_{\mathfrak{p}} = |N_{k_{\mathfrak{p}}/\mathbf{Q}_p}(x)|_p$$

où  $p \in M_{\mathbf{Q}}$  est l'unique place telle que  $\mathfrak{p} | p$  et  $|\cdot|_p$  la norme usuelle. En particulier cette norme n'est pas invariante par extension de corps. Pour tout  $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$ , on

désigne par  $\mathbf{F}_p$  le corps résiduel. Pour tout  $v \in M_{\infty, k}$ , on note  $N_v = [k_v : \mathbf{R}]$ ,

$$\begin{aligned} r_{1,k} &= \#\{v \in M_{\infty, k} \mid N_v = 1\} \\ r_{2,k} &= \#\{v \in M_{\infty, k} \mid N_v = 2\} \\ r_k &= r_{1,k} + r_{2,k} - 1 \\ N_k &= r_{1,k} + 2r_{2,k}. \end{aligned}$$

Pour tout  $v \in M_{\infty, k}$  tel que  $k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ , on fixe un tel isomorphisme. Comme dans [We], pour tout  $v \in M_k$ , on normalise la mesure de Haar  $dx_v$  de la manière suivante

- si  $v \in M_{f,k}$ , alors  $\int_{\mathcal{O}_{k_v}} dx_v = 1$
- si  $k_v = \mathbf{R}$ , alors on prend pour  $dx_v$  la mesure de Lebesgue usuelle.
- si  $k_v = \mathbf{C}$ , alors on pose  $dx_v = -i dz d\bar{z} = 2 dx dy$ .

L'entier  $w_k$  désigne le nombre de racines de l'unité dans  $k$ ,  $d_k$  la valeur absolue du discriminant de  $k$  et  $R_k$  le régulateur de  $k$ . On note  $\mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$  le monoïde des idéaux non nuls de  $\mathcal{O}_k$ ,  $\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)$  le sous-monoïde des idéaux principaux non nuls et  $h_k = \#\mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)$  le nombre de classes d'idéaux. Lorsque  $k = \mathbf{Q}$ , il nous arrivera d'identifier  $\mathcal{I}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}})$  à  $\mathbf{N}^+ = \mathbf{N} - \{0\}$ . Si  $S$  est un sous-ensemble fini de  $M_k$ , on note  $\mathcal{O}_S$ , l'anneau des  $S$ -entiers.

Le plus souvent nous omettrons  $k$  dans ces notations quand le corps de nombres est clairement indiqué par le contexte.

**1.2. Hauteurs associées à un faisceau ample.** — Soient  $k$  un corps de nombres,  $V$  une variété sur  $k$ ,  $\mathcal{L}$  un faisceau très ample sur  $V$ . On choisit  $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$  une base de  $\Gamma(V, \mathcal{L})$ . Par hypothèse, on a un plongement

$$\Phi : V \rightarrow \mathbf{P}_k(\Gamma(V, \mathcal{L})^\vee)$$

où  $\Gamma(V, \mathcal{L})^\vee$  désigne le dual de  $\Gamma(V, \mathcal{L})$ . Une première définition de la hauteur est alors donnée par

**Définition 1.1.** — On définit la *hauteur* de  $P \in V(k)$  relativement à  $\mathcal{L}$  et  $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$  par

$$H(P) = \prod_{v \in M_k} \sup_{1 \leq i \leq q} |y_i|_v$$

où  $(y_i)_{1 \leq i \leq q}$  sont des coordonnées homogènes pour  $\Phi(P)$  pour la base  $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$ .

Par la formule du produit, cette hauteur est indépendante du choix des coordonnées homogènes pour  $\Phi(P)$ . Elle dépend par contre du corps de base  $k$  et de la base choisie.

Plus généralement, on peut considérer les hauteurs définies de la manière suivante pour tout  $v \in M_k$ , on se donne une métrique  $v$ -adique  $\|\cdot\|_v$  sur  $\mathcal{L}$ . On suppose en outre qu'il existe une base  $(s_1, \dots, s_q)$  de  $\Gamma(V, \mathcal{L})$  telle que pour presque tout  $v \in M_f$ , pour tout  $x \in V(k)$  et tout  $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$  telle que  $s(x) \neq 0$ ,

$$\|s(x)\|_v = \left( \sup_{1 \leq i \leq q} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_v \right)^{-1}.$$

Il faut noter que cette condition est alors vérifiée pour toute base. Nous appellerons métrique adélique un tel système de métriques.

**Définition 1.2.** — La hauteur d'un point rationnel  $P$  de  $V$  relativement à  $\mathcal{L}$  et au système de métriques est donnée par

$$H(P) = \prod_{v \in M_k} \|s(x)\|_v^{-1}$$

où  $s$  est section de  $\mathcal{L}$  non nulle en  $x$ . Ce produit est également indépendant du choix de la section. Par abus de langage, nous appellerons hauteur sur  $V$  la donnée d'un faisceau très ample  $\mathcal{L}$  et d'une métrique adélique sur  $\mathcal{L}$ .

Un exemple d'un tel système de métriques consiste à prendre

$$\|s(x)\|_v = \begin{cases} \left( \sup_{1 \leq i \leq q} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_v \right)^{-1} & \text{si } v \in M_f, \\ \sqrt{\left| \frac{s_1(x)}{s(x)} \right|_v^2 + \dots + \left| \frac{s_q(x)}{s(x)} \right|_v^2}^{-1} & \text{si } k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}, \\ \left( \left| \frac{s_1(x)}{s(x)} \right|_v + \dots + \left| \frac{s_q(x)}{s(x)} \right|_v \right)^{-1} & \text{si } k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}. \end{cases}$$

La hauteur utilisée dans [Th] correspond à cette métrique.

Un autre exemple consiste à choisir une famille génératrice finie  $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$  de  $\Gamma(V, \mathcal{L})$  et poser

$$\|s(x)\|_v = \inf_{\substack{1 \leq i \leq q \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{s(x)}{s_i(x)} \right|_v.$$

**1.3. Sous-variétés accumulatrices.** — Soit  $U$  un sous-espace constructible de  $V$  défini sur  $k$ . On note

$$n_U(B) = \#\{P \in U(k) \mid H(P) \leq B\}$$

qui est un nombre fini. On s'intéresse au comportement asymptotique de  $n_U(B)$  quand  $B$  tend vers  $+\infty$ . On pose

$$\beta_U = \overline{\lim}_{B \rightarrow +\infty} (\log n_U(B) / \log(B)).$$

La constante  $\beta_U$  donne la puissance de  $B$  qui intervient dans  $n_U(B)$ . Un fermé  $F$  de  $V$  est dit accumulateur si et seulement si pour tout ouvert  $W$  de  $F$ , il existe un ouvert  $U$  de  $V$  tel que

$$\beta_W > \beta_U.$$

Cette notion permet de définir une stratification arithmétique sur  $V$  qui peut éventuellement être infinie (cf. [Ma]). Il est clair que si l'on a un tel fermé  $F$ , le comportement asymptotique de  $n_V(B)$  reflète la structure de  $F$  et non celle de  $V$ . C'est pourquoi il est plus intéressant de se placer, lorsque cela est possible, sur le complémentaire  $U$  des sous-variétés accumulatrices. C'est ce que nous ferons par la suite.

**1.4. Énoncé de la conjecture de Manin.** — Dans la suite de ce texte, on se placera dans le cas où  $V$  est une variété de Fano, c'est à dire une variété projective et lisse dont l'inverse du faisceau canonique  $\omega_V^{-1}$  est ample. Pour simplifier, je le supposerai très ample. Les hauteurs qu'on utilisera désormais sont relatives au faisceau très ample  $\omega_V^{-1}$ .

Manin énonce alors la conjecture suivante (cf. en particulier [FMT])

**Conjecture 1.4.1 (Manin).** — *Si  $V(k)$  est dense dans  $V$  et si  $U$ , le complémentaire dans  $V$  des sous-variétés accumulatrices, est défini sur  $k$ , alors il existe une constante  $C$  telle que*

$$n_U(B) \sim CB \log^{t-1} B \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

où  $t = \text{rg Pic } V$ .

**1.5. Rappel des résultats connus.** — L'exemple le plus simple de variété de Fano est  $\mathbf{P}_k^n$ . Dans ce cas, on a

$$\omega_V = \mathcal{O}(-n-1)$$

et  $U = V = \mathbf{P}_k^n$ . Le résultat est dû à Schanuel et s'écrit, en remarquant que la hauteur utilisée ici est la puissance  $(n+1)$ -ème de celle utilisée dans [Sc]

**Théorème 1.5.1 (Schanuel [Sc]).** —

$$n_U(B) \sim CB \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

où  $C$  est la constante donnée par

$$C = \frac{b}{\zeta_k(n+1)} \left( \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^{n+1} (n+1)^r \frac{R}{w}.$$

Franke, Manin et Tschinkel ont démontré dans [FMT] que la conjecture est stable par produit de variétés, compatible avec les résultats de la méthode du cercle et vérifiée par les variétés de drapeaux généralisées de la forme  $V = P \backslash G$  où  $G$  est un groupe algébrique semi-simple linéaire et  $P$  un sous-groupe parabolique. Dans le cas où  $G = GL_{n,k}$ , Thunder a donné dans [Th] une majoration explicite du terme résiduel. En outre Batyrev a annoncé avoir démontré la conjecture dans le cas des variétés toriques.

Les résultats à l'origine de ce texte, les théorèmes 8.6.1, 9.6.1, 10.6.1 et 11.6.1 sont des vérifications de cette conjecture dans le cas où  $V$  est obtenue en éclatant certains sous-espaces de  $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$ . Dans le cas particulier où  $V$  est obtenue en éclatant trois points, Batyrev et Manin avaient démontré le résultat suivant

**Théorème 1.5.2 (Batyrev, Manin [BM]).** — Si  $k = \mathbf{Q}$  et si  $U$  désigne le complémentaire des diviseurs exceptionnels sur  $V$ , alors il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que

$$0 < C_1 < \frac{n_U(B)}{B \log^3 B} < C_2.$$

## 2. Hauteurs et mesures de Tamagawa sur une variété de Fano

**2.1. Expression conjecturale de la constante.** — Soit  $k$  un corps de nombres et  $V$  une variété de Fano sur  $k$  telle que  $\omega_V^{-1}$  soit très ample. Comme dans [We], on introduit l'ensemble fini  $S$  des places de mauvaise réduction de  $V$  identifiée avec son plongement dans  $\mathbf{P}^q_k$ . Quitte à augmenter  $S$ ,  $V$  se relève en un schéma projectif et lisse  $\mathcal{V}$  au-dessus de  $\mathcal{O}_S$ . Pour toute algèbre  $A$  sur  $\mathcal{O}_S$ , le produit  $\mathcal{V} \times_{\mathcal{O}_S} \text{Spec } A$  est noté  $\mathcal{V}_A$  et pour tout  $\mathfrak{p} \in M_f - S$ , le morphisme de Frobenius géométrique défini sur  $\text{Pic } \mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}$  est désigné par  $\text{Fr}_{\mathfrak{p}}$ . On pose  $\overline{V} = V \times_k \overline{k}$ . Le terme local de la fonction  $L$  associée à  $\text{Pic } \overline{V}$  est alors défini par

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \overline{V}) = \frac{1}{\text{Det}(1 - N(\mathfrak{p})^{-s} \text{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid \text{Pic } \mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}} \otimes \mathbf{Q})}$$

et la fonction  $L_S$  globale est donnée par le produit eulérien

$$L_S(s, \text{Pic } \bar{V}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \bar{V}).$$

**Lemme 2.1.1.** — *Le produit eulérien*

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \bar{V})$$

converge absolument pour  $\text{Re } s > 1$  et la fonction  $L_S(s, \text{Pic } \bar{V})$  se prolonge en une fonction méromorphe sur  $\mathbf{C}$ . Cette fonction a un pôle d'ordre  $t = \text{rg Pic } V$  en 1.

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{G}$  le groupe de Galois de  $\bar{k}$  sur  $k$ . La suite exacte (1.5.0) dans [CTS] fournit la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Pic } V \rightarrow (\text{Pic } \bar{V})^{\mathcal{G}} \rightarrow \text{Br}(k).$$

Le groupe  $\text{Br}(k)$  étant de torsion

$$t = \text{rg Pic } V = \text{rg}(\text{Pic } \bar{V})^{\mathcal{G}}.$$

Or il existe une extension finie de  $k$  scindant l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\text{Pic } \bar{V}$ . En tant que  $\mathcal{G}$ -module,  $(\text{Pic } \bar{V}) \otimes \mathbf{C}$  se décompose donc sous la forme

$$\text{Pic } \bar{V} \otimes \mathbf{C} \simeq ((\text{Pic } \bar{V})^{\mathcal{G}} \otimes \mathbf{C}) \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i$$

où les  $M_i$  sont des représentations irréductibles de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbf{C}$ . Soit  $K$  une extension galoisienne de  $k$  scindant l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\text{Pic } \bar{V}$ . Soit

$$S' = S \cup \{\mathfrak{p} \in M_f \mid \mathfrak{p} \text{ est ramifié dans } K/k\}.$$

Pour tout  $\mathfrak{p} \in M_f - S'$ , la substitution de Frobenius correspondant à un idéal premier  $\mathfrak{P}$  au-dessus de  $\mathfrak{p}$  est notée  $(\mathfrak{P}, K/k)$  (cf. [Se1, §I.8]) et

$$L_{\mathfrak{p}}(s, M_i) = \frac{1}{\text{Det}(1 - N(\mathfrak{p})^{-s} (\mathfrak{P}, K/k) | M_i)}.$$

La fonction  $L$  d'Artin associée à  $M_i$  est alors définie par le produit eulérien

$$L_{S'}(s, M_i) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S'} L_{\mathfrak{p}}(s, M_i).$$

On a alors la relation

$$L_{S'}(s, \text{Pic } \bar{V}) = \zeta_{k, S'}(s)^t \prod_{i \in I} L_{S'}(s, M_i)$$



D'après [Art, théorème 7], les produits eulériens  $L_{S'}(s, M_i)$  convergent pour  $\text{Re } s > 1$  et les fonctions  $L$  obtenues se prolongent en des fonctions méromorphes qui sont entières au voisinage de 1.  $\square$

Par ailleurs, la densité locale en  $\mathfrak{p} \in M_f - S$  est définie comme

$$d_{\mathfrak{p}}(V) = \frac{\#\mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{N(\mathfrak{p})^{\dim(V)}}.$$

Fixons une métrique adélique  $(\|\cdot\|_{\nu})_{\nu \in M_k}$  sur  $\omega_V^{-1}$  et notons  $H$  la hauteur correspondante. On va alors définir pour tout  $\nu \in M_k$  une mesure  $\omega_{\nu}$  sur  $V(k_{\nu})$  d'une manière analogue à celle utilisée dans [We]. Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des coordonnées locales en  $x \in V$ . Ces coordonnées définissent un morphisme de variétés  $f$  d'un ouvert  $U$  de  $V_{\nu} = V \times k_{\nu}$  dans  $\mathbf{A}_k^n$  et induisent un homéomorphisme d'un ouvert  $W$  pour la topologie  $\nu$ -adique de  $V(k_{\nu})$  sur  $f(W)$  et un morphisme de faisceaux

$$f^* \Omega_{\mathbf{A}_k^n/k} \rightarrow \Omega_{U/k}$$

et donc

$$\omega(f) : f^* \omega_{\mathbf{A}_k^n/k} \rightarrow \omega_{U/k}.$$

Sur  $W$  la mesure  $\omega_{\nu}$  est définie par la relation

$$\omega_{\nu} = \|\omega(f)\|^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (f^{-1}(x)) \Big|_{\nu} dx_1 \dots dx_n.$$

où  $dx_{i,\nu}$  est la mesure de Haar normalisée comme ci-dessus. En particulier si la métrique pour  $\nu$  est définie par une base  $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ , alors

$$\omega_{\nu} = \frac{1}{\sup_{1 \leq i \leq n} |s_i(f^{-1}(x))(\omega(f)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n))|_{\nu}} dx_{1,\nu} \dots dx_{n,\nu}.$$

Ces mesures locales se recollent. En effet, soient  $x_1, \dots, x_n$  et  $x'_1, \dots, x'_n$  deux systèmes de coordonnées définis sur un même ouvert  $W$  et correspondant respectivement à  $f$  et  $f'$ . Il existe un  $C^{\omega}$  difféomorphisme

$$\phi : f(W) \rightarrow f'(W)$$

tel que  $f' = \phi \circ f$ . On a alors la relation

$${}^t \omega(\phi)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x'_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x'_n} \right) = \text{Jac}_x(\phi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
& \|{}^t\omega(f')^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x'_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x'_n} \right) (f'^{-1}(x'))\|_{\nu} dx'_{1,\nu} \dots dx'_{n,\nu} \\
&= \frac{\|{}^t\omega(f)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (f^{-1}(x))\|_{\nu}}{|\text{Jac}_{\phi^{-1}(x')} \phi|_{\nu}} dx'_{1,\nu} \dots dx'_{n,\nu} \\
&= \|{}^t\omega(f)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (f^{-1}(x))\|_{\nu} dx_{1,\nu} \dots dx_{n,\nu}.
\end{aligned}$$

La formule  $dx'_{1,\nu} \dots dx'_{n,\nu} = |\text{Jac}_x \phi|_{\nu} dx_{1,\nu} \dots dx_{n,\nu}$  se démontrant comme dans [We].

Pour tout  $\nu \in M_k$ , on pose

$$\lambda_{\nu} = \begin{cases} L_{\nu}(s, \text{Pic } \overline{V}) & \text{si } \nu \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La mesure de Tamagawa correspondant à  $H$  et  $S$  est alors définie comme

$$\omega_{H,S} = \sqrt{d_k}^{-\dim V} \prod_{\nu \in M_k} \lambda_{\nu}^{-1} \omega_{\nu}.$$

La constante

$$\tau_H(V(\mathcal{A}_k)) = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t L_S(s, \text{Pic } \overline{V}) \omega_{H,S}(V(\mathcal{A}_k))$$

où  $t = \dim \text{Pic } V$  ne dépend plus du choix fait pour  $S$ . Cependant, comme le fait remarquer Swinnerton-Dyer dans le cas d'une surface cubique ([SD]), la constante  $C$  qui apparaît est liée en général au problème de l'approximation faible pour la variété  $V$ . Bien que cela n'intervienne pas dans les cas que nous considérerons, nous poserons donc

$$\tau_H(V) = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t L_S(s, \text{Pic } \overline{V}) \omega_{H,S}(\overline{V(k)})$$

où  $\overline{V(k)}$  désigne l'adhérence de  $V(k)$  dans  $V(\mathcal{A}_k)$ .

**Lemme 2.1.2.** — *Pour presque tout  $\mathfrak{p} \in M_k$ ,*

$$\omega_{\mathfrak{p}}(V(k_{\mathfrak{p}})) = d_{\mathfrak{p}}(V).$$

*Démonstration.* — Soit  $(s_1, \dots, s_q)$  une base de  $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$ . Il suffit de démontrer que la formule est vraie pour presque tout les  $\mathfrak{p}$  tels que

$$\|s(x)\|_{\mathfrak{p}} = \inf_{\substack{1 \leq i \leq q \\ s_i(x) \neq 0}} \left| \frac{s(x)}{s_i(x)} \right|_{\mathfrak{p}}.$$

Or pour presque tout  $\mathfrak{p} \in M_f$ ,  $\mathcal{V}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) = V(k_{\mathfrak{p}})$  puisque  $V$  est complète. L'intégrale peut donc se mettre sous la forme

$$\int_{\mathcal{V}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})} \omega_{\mathfrak{p}} = \sum_{a \in \mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})_{x \equiv a(\mathfrak{p})}} \int \omega_{\mathfrak{p}}.$$

Pour tout  $\mathfrak{p} \notin S$ ,  $\omega_{\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}}^{-1}$  est très ample. Fixons donc un  $\mathfrak{p} \notin S$  vérifiant les conditions ci-dessus. Soit  $a \in V(k_{\mathfrak{p}})$ . On considère des coordonnées locales  $x_1, \dots, x_n$  sur un ouvert  $W \supset \{x \equiv a(\mathfrak{p})\}$ . On note  $f$  le morphisme correspondant et

$$Y_i(x) = s_i(f^{-1}(x))(\omega(f)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)).$$

Comme  $\omega_{\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}}^{-1}$  est très ample, pour tout  $x \in W$ , on a la relation

$$(Y_i(x), 1 \leq i \leq q) = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}.$$

Donc

$$\int_{x \equiv a(\mathfrak{p})} \omega_{\mathfrak{p}} = \int_{x \equiv a(\mathfrak{p})} dx_{1,\mathfrak{p}} dx_{2,\mathfrak{p}} \dots dx_{n,\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})^{-\dim V}. \quad \square$$

**Remarque 2.1.** — Le choix des coefficients  $\lambda_{\mathfrak{p}} = L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \overline{V})$  pour rendre convergent le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \overline{V})}$$

est inspiré de l'article de Bloch (cf. [Bl, p. 69]). On peut l'interpréter de la manière suivante. Par la formule de Lefschetz (cf. [Se2]), on a, si  $\mathfrak{p} \in M_f - S$  et si  $l$  est un nombre premier ne divisant pas  $N(\mathfrak{p})$ ,

$$\#\mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) = \sum (-1)^i \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}} | H_{\text{ét}}^i(\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l)).$$

Notons  $n = \dim V$ . La variété  $\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}$  étant lisse, on a un isomorphisme

$$H_{\text{ét}}^{2n}(\mathcal{V}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Q}_l(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_l.$$

Comme  $\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$  est projective,  $\Gamma(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}})^* = \overline{\mathbb{F}}_p^*$ . Par ailleurs,  $\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$  étant de Fano, le groupe de Picard  $\text{Pic}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p})$  est isomorphe à  $\text{NS}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p})$  et  $\text{Pic}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p})$  est sans torsion. En outre,  $\text{Br}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p})$  est de torsion. La suite exacte

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow 0$$

fournit donc

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^1(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbf{Q}_l) &= 0 \\ \text{Pic}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \otimes \mathbf{Q}_l &\xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^2(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbf{Q}_l(1)). \end{aligned}$$

Par dualité de Poincaré (cf. [Mi, corollaire VI.11.2]) on en déduit que

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^{(2n-1)}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbf{Q}_l) &= 0 \\ H_{\text{ét}}^{(2n-2)}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbf{Q}_l(n-1)) &\xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^2(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbf{Q}_l(1))^\vee \xrightarrow{\sim} (\text{Pic } \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes \mathbf{Q}_l)^\vee. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{p}}(V) &= 1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}} | \text{Pic } \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes \mathbf{Q}_l) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(-1)^i}{N(\mathfrak{p})^{\dim V}} \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}} | H_{\text{ét}}^i(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbf{Q}_l)). \end{aligned}$$

Or, d'après la conjecture de Weil sur les valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (cf. [De, théorème 1.6]),

$$\left| \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}} | H_{\text{ét}}^i(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbf{Q}_l)) \right| \leq \dim H_{\text{ét}}^i(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbf{Q}_l) N(\mathfrak{p})^{\frac{i}{2}}.$$

On obtient donc que

$$d_{\mathfrak{p}}(V) = 1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \text{Tr}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}} | \text{Pic } \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes \mathbf{Q}_l) + O\left(\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Par conséquent, le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_{f-S}} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \overline{V})}$$

converge. Comme l'a indiqué Swinnerton-Dyer dans [SD], on pourrait donc aussi utiliser la série  $L$  associée à  $H_{\text{ét}}^2(\overline{V}, \mathbf{Q}_l(1))$  qui présente l'avantage de pouvoir être définie en toutes les places et de vérifier des équations fonctionnelles.

Cependant, dans les démonstrations de ce texte, les termes correcteurs apparaissent directement comme valeurs de la fonction  $L$  associée au groupe de Picard et c'est pour cette raison que nous avons utilisée cette définition de la mesure de Tamagawa.

Soit  $t$  le rang du groupe de Picard de  $V$ . L'image de  $\text{Pic } V$  dans  $\text{Pic } V \otimes \mathbf{R}$  est un réseau. Le groupe  $\Lambda^t(\text{Pic } V \otimes \mathbf{R})$  contient donc un générateur canonique et on obtient un isomorphisme

$$\Lambda^{t-1}(\text{Pic } V \otimes \mathbf{R})^\vee \xrightarrow{\sim} \text{Pic } V \otimes \mathbf{R}$$

Par conséquent un élément  $x$  de  $\text{Pic } V$  définit une mesure  $\theta_x$  sur

$$\mathcal{H}_x(\lambda) = \{y \in (\text{Pic } V \otimes \mathbf{R})^\vee \mid y(x) = \lambda\}.$$

On convient que si  $t = 1$  et si  $x$  est un générateur de  $\text{Pic } V$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\theta_x(\mathcal{H}_x(\lambda)) = 1.$$

On note  $C_{\text{eff}}^\vee(V)$  l'ensemble des  $y \in (\text{Pic } V \otimes \mathbf{R})^\vee$  tels que pour tout diviseur effectif  $D$  de  $V$  on ait

$$y([D]) > 0.$$

**Définition 2.1.** — Avec les notations ci-dessus, on pose

$$\alpha_c(V) = \theta_{\omega_V^{-1}}(C_{\text{eff}}^\vee(V) \cap \mathcal{H}_{\omega_V^{-1}}(1))$$

et

$$C_H(V) = \alpha_c(V)\tau_H(V).$$

**2.2. La conjecture de Manin raffinée.** — Les différents exemples donnés dans la suite de ce texte vérifient la formule suivante

**Conjecture 2.2.1.** — *On suppose que  $V(k)$  est dense dans  $V$  et que le complémentaire  $U$  des sous-variétés accumulatrices est défini sur  $k$ . Alors*

$$n_U(B) \sim C_H(V)B \log^{t-1} B \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

où  $t = \text{rg Pic } V$ .

Il serait sans doute prématuré de conjecturer cette formule dans le cas général. Il paraît relativement plus raisonnable d'énoncer la conjecture suivante

**Conjecture 2.2.2.** — Si  $V(k)$  est dense dans  $V$  et si  $U$  le complémentaire dans  $V$  des sous-variétés accumulatrices est défini sur  $k$ , alors il existe une constante  $\alpha(V) \in \mathbf{Q}^*$  telle que pour toute métrique sur  $\omega_V^{-1}$

$$n_U(B) \sim \alpha(V) \tau_H(V) B \log^{t-1} B \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

où  $t = \text{rg Pic } V$ .

Toutefois la seule indication que nous ayons pour une telle formule lorsque  $V$  ne vérifie pas l'approximation forte est donnée par la partie 4.3. Il est donc envisageable que d'autres phénomènes interviennent dans ce cas.

**2.3. Présentation des résultats.** — Les principaux résultats de ce texte sont les suivants

- La formule 2.2.1 est stable par produit de variétés (corollaire 3.0.3).
- Elle coïncide avec les résultats de Schanuel et de Franke, Manin et Tschinkel pour les variétés de drapeaux généralisées si le groupe est quasi-déployé sur  $k$  (théorèmes 6.1.1 et 6.2.2).
- Elle est compatible avec les résultats de la méthode du cercle (proposition 4.2.1).
- Elle est également vérifiée par les surfaces de Del Pezzo obtenues en éclatant un, deux ou trois points rationnels en position générale sur  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$  (théorèmes 8.6.1, 9.6.1 et 10.6.1), par celle obtenue en éclatant le 0-cycle  $D = (0 : 1 : i) + (0 : 1 : -i)$  sur  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$  (théorème 11.6.1) ainsi que par la variété torique obtenue en éclatant les sous-espaces de  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$  définis par  $X_i = 0$  pour  $i \in I$  où  $I$  décrit les parties de  $\{0, \dots, n\}$  telles que  $2 \leq \#I \leq n$  (théorème 8.6.1). En outre, la plus grande partie des démonstrations des théorèmes 8.6.1, 9.6.1 et 10.6.1 se généralisent à un corps de nombres quelconque.

Dans les différents résultats ci-dessus la formule est vérifiée pour des métriques particulières sur  $\omega_V^{-1}$ . L'objet de la partie 5 est de donner une condition nécessaire et suffisante pour que la constante  $\alpha(V)$  soit indépendante de la métrique. Cette condition est vérifiée par les variétés de drapeaux généralisées si le groupe est quasi-déployé (proposition 6.2.13). Par conséquent, la formule 2.2.1 est valable pour ces variétés indépendamment du choix de la métrique.

### 3. Compatibilité de la conjecture avec le produit de variétés

Nous allons maintenant démontrer que la conjecture 2.2.1 est compatible avec le produit de variétés.

**Proposition 3.0.1.** — Si  $V_1$  et  $V_2$  sont des variétés de Fano telles que  $V_1 \times V_2(k) \neq \emptyset$ ,  $H_1$  et  $H_2$  des hauteurs sur  $V_1$  et  $V_2$  respectivement,  $t_1 = \text{rg Pic } V_1$  et  $t_2 = \text{rg Pic } V_2$ , alors

$$C_{H_1 H_2}(V_1 \times V_2) = \frac{(t_1 - 1)!(t_2 - 1)!}{(t_1 + t_2 - 1)!} C_{H_1}(V_1) C_{H_2}(V_2).$$

**Lemme 3.0.2.** —

$$\alpha_c(V_1 \times V_2) = \frac{(t_1 - 1)!(t_2 - 1)!}{(t_1 + t_2 - 1)!} \alpha_c(V_1) \alpha_c(V_2).$$

*Démonstration.* — D'après le théorème d'annulation de Kodaira, on a

$$H^i(V_1, \mathcal{O}_{V_1}) = \{0\} \text{ si } i > 0.$$

En particulier,  $H^1(V_1, \mathcal{O}_{V_1}) = \{0\}$ . Donc, d'après [Ha, exercice 3.12.6], on obtient un isomorphisme

$$\begin{aligned} \text{Pic } V_1 \times \text{Pic } V_2 &\xrightarrow{\sim} \text{Pic}(V_1 \times V_2) \\ (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) &\mapsto \mathcal{L}_1 \boxtimes \mathcal{L}_2 = \pi_1^* \mathcal{L}_1 \otimes \pi_2^* \mathcal{L}_2. \end{aligned}$$

En outre, comme  $V_1 \times V_2(k) \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{L}_1 \boxtimes \mathcal{L}_2$  possède une section si et seulement si  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  en ont une. Si on note  $C_{\text{eff}}(V)$  le cône des classes de diviseurs effectifs dans  $\text{Pic } V$ , l'isomorphisme ci-dessus induit donc une bijection

$$C_{\text{eff}}(V_1 \times V_2) \xrightarrow{\sim} C_{\text{eff}}(V_1) \times C_{\text{eff}}(V_2).$$

Enfin, comme  $V_1$  et  $V_2$  sont non singulières, on a, d'après [Ha, page 187], la relation

$$\omega_{V_1 \times V_2} = \omega_{V_1} \boxtimes \omega_{V_2}$$

et la métrique sur  $\omega_{V_1 \times V_2}^{-1}$  est le produit des métriques induites.

Avec les notations de la fin de la partie 2,

$$\begin{aligned} \alpha_c(V_1 \times V_2) &= \theta_{\omega_{V_1 \times V_2}^{-1}}(C_{\text{eff}}^{\vee}(V_1 \times V_2) \cap \mathcal{H}_{\omega_{V_1 \times V_2}^{-1}}(1)) \\ &= \theta_{(\omega_{V_1}^{-1}, \omega_{V_2}^{-1})}(C_{\text{eff}}^{\vee}(V_1) \times C_{\text{eff}}^{\vee}(V_2) \cap \mathcal{H}_{(\omega_{V_1}^{-1}, \omega_{V_2}^{-1})}(1)). \end{aligned}$$

Mais

$$\mathcal{H}_{(\omega_{V_1}^{-1}, \omega_{V_2}^{-1})}(1) = \{(u, v) \in \prod_{i=1}^2 (\text{Pic}(V_i) \otimes \mathbf{R})^{\vee} \mid u(\omega_{V_1}^{-1}) + v(\omega_{V_2}^{-1}) = 1\}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
& \theta_{\omega_{V_1 \times V_2}}^{-1} (C_{\text{eff}}^{\vee}(V_1 \times V_2) \cap \mathcal{H}_{\omega_{V_1 \times V_2}}^{-1} (1)) \\
&= \int_0^1 \theta_{\omega_{V_1}}^{-1} (C_{\text{eff}}^{\vee}(V_1) \cap \mathcal{H}_{\omega_{V_1}}^{-1}(u)) \theta_{\omega_{V_2}}^{-1} (C_{\text{eff}}^{\vee}(V_2) \cap \mathcal{H}_{\omega_{V_2}}^{-1}(1-u)) du \\
&= \prod_{i=1}^2 \theta_{\omega_{V_i}}^{-1} (C_{\text{eff}}^{\vee}(V_i) \cap \mathcal{H}_{\omega_{V_i}}^{-1}(1)) \int_0^1 u^{t_1-1} (1-u)^{t_2-1} du \\
&= \frac{(t_1-1)!(t_2-1)!}{(t_1+t_2-1)!} \prod_{i=1}^2 \alpha_c(V_i)
\end{aligned}$$

ce qui montre la formule.  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.0.1.* — Comme  $V_1 \times V_2(k) = V_1(k) \times V_2(k)$ , on obtient que  $\tau_{H_1 H_2}(V_1 \times V_2) = \tau_{H_1}(V_1) \tau_{H_2}(V_2)$ , ce qui montre la proposition.  $\square$

**Corollaire 3.0.3.** — Si  $V_1$  et  $V_2$  sont des variétés de Fano et si pour  $i = 1, 2$  le complémentaire  $U_i$  des sous-variétés accumulatrices vérifie

$$n_{U_i}(B) = C_{H_i}(V_i) B \log^{t_i-1} B + O(B \log^{t_i-2} B)$$

où  $t_i = \text{rg Pic } V_i$ , alors

$$n_{U_1 \times U_2}(B) = C_{H_1 H_2}(V_1 \times V_2) B \log^{(t_1+t_2-1)} B + O(B \log^{(t_1+t_2-2)} B).$$

*Démonstration.* — Ceci résulte de la proposition 3.0.1 et de la proposition 2 de [FMT].  $\square$

#### 4. Le cas des intersections complètes non singulières

**4.1. Domaine fondamental pour l'action des unités.** — Nous allons maintenant exprimer la compatibilité de la constante définie dans la partie 2 avec celle qui serait obtenue par la méthode du cercle.

Soit  $W \subset \mathbf{A}_k^{n+1} - \{0\}$  une intersection complète non singulière donnée par les équations

$$f_i(x_0, \dots, x_n) = 0$$

où  $f_i$  est une forme homogène de degré  $d_i$  pour  $1 \leq i \leq m$ . Soit

$$\pi : \mathbf{A}_k^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}_k^n$$

la projection canonique. Soit  $V$  l'image de  $W$  par  $\pi$ . On fait les hypothèses suivantes



- $V$  vérifie l'approximation faible, i.e.  $V(k)$  est dense dans  $V(\mathcal{A}_k)$ .
- $\dim V \geq 3$  et  $n > \sum_{i=1}^m d_i$ .

Alors  $V$  est une variété de Fano. En effet  $\omega_V^{-1} = \mathcal{O}_V(n+1 - \sum_{i=1}^m d_i)$ . On pose

$$\delta = n + 1 - \sum_{i=1}^m d_i > 0.$$

Soit  $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$  une famille génératrice finie de  $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$  et  $(Y_i)_{1 \leq i \leq q}$  les fonctions homogènes de degré  $\delta$  correspondant aux  $s_i$ . La hauteur  $H$  correspondante est donnée par

$$\forall x \in W(k), H(\pi(x)) = \prod_{v \in M_k} \sup_{1 \leq i \leq q} |Y_i(x)|_v.$$

Afin de simplifier la démonstration, nous prendrons comme polynômes  $(Y_i)_{1 \leq i \leq q}$  les monômes de degré  $\delta$ .

Le problème est que la méthode du cercle donne des résultats sur le cône  $W$ , alors qu'ici on se place sur  $V$ . L'objet des notations qui suivent est de trouver un système de représentants de  $V$  dans  $W$ . Comme dans [Sc] on définit un domaine fondamental sous l'action des unités de la manière suivante soit  $\log_H$  l'application définie par

$$\begin{aligned} \log_H : \prod_{v \in M_\infty} W(k_v) &\rightarrow \prod_{v \in M_\infty} \mathbf{R} \\ (x_v)_{v \in M_\infty} &\mapsto \left( \log \left( \sup_{1 \leq i \leq q} |Y_i(x_v)|_v \right) \right)_{v \in M_\infty}. \end{aligned}$$

D'après le théorème des unités, le morphisme canonique

$$\begin{aligned} \rho : U_k &\rightarrow \prod_{v \in M_\infty} \mathbf{R} \\ u &\mapsto (\log |u|_v^\delta)_{v \in M_\infty} \end{aligned}$$

a pour noyau le groupe  $\mu_\infty(k)$  des racines de l'unité dans  $k$  et pour image un réseau  $L$  de rang  $r$  dans l'hyperplan  $P$  défini par  $\sum_{v \in M_\infty} y_v = 0$ . En outre, ce réseau étant l'image du réseau usuel par  $\delta \text{Id}$ ,  $\text{Det } L = \delta^r R$ . L'application  $\log_H$  est compatible avec l'action des unités qui agissent de manière diagonale sur  $\prod_{v \in M_\infty} k_v^{n+1}$  et par l'intermédiaire de  $\rho$  sur  $\prod_{v \in M_\infty} \mathbf{R}$ . On projette  $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$  sur  $P$

selon  $(N_\nu)_{\nu \in M_\infty}$

$$\begin{aligned} \text{pr} : \mathbf{R}^{r_1+r_2} &\rightarrow P \\ (y_\nu)_{\nu \in M_\infty} &\mapsto \left( y_\nu - \frac{N_\nu}{N} \sum_{\lambda \in M_\infty} y_\lambda \right)_{\nu \in M_\infty}. \end{aligned}$$

On choisit  $u_1, \dots, u_r$  une base de  $L$ . Soit  $(u_i^\vee)_{1 \leq i \leq r}$  la base duale. On pose

$$F = \{y \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} \mid 0 \leq u_i^\vee(\text{pr}(y)) < 1\}$$

et

$$\Delta_H = \log_H^{-1}(F).$$

**Lemme 4.1.1 (Schanuel [Sc]).** — L'ensemble  $\Delta_H$  vérifie

- (i)  $\Delta_H$  est stable sous  $\mu_\infty(k)$ ,
- (ii)  $\forall u \in U_k - \mu_\infty(k), \quad u\Delta_H \cap \Delta_H = \emptyset$ ,
- (iii)  $\bigcup_{u \in U_k} u\Delta_H = \prod_{\nu \in M_\infty} W(k_\nu)$ .

Pour tout  $x \in (\mathcal{A}_k)^{n+1}$ , on note

$$H_\infty(x) = \prod_{\nu \in M_\infty} \sup_{1 \leq i \leq q} |Y_i(x_\nu)|_\nu$$

et  $x_\infty = (x_\nu)_{\nu \in M_\infty}$ . Pour tout  $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$ , soit  $\Phi_{\mathfrak{b}, B} : W(\mathcal{A}_k) \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction caractéristique des  $x \in W(\mathcal{A}_k)$  tels que

$$\begin{cases} x_\infty \in \Delta_H, \\ \mathfrak{b}_\mathfrak{p} | (x_i)_\mathfrak{p} \text{ pour tout } \mathfrak{p} \in M_f \text{ et } 0 \leq i \leq n, \\ H_\infty(x) \leq B. \end{cases}$$

Soit  $j : W(k) \rightarrow W(\mathcal{A}_k)$  l'application naturelle. La méthode du cercle donne alors une majoration du terme  $R_\mathfrak{b}$  défini par la relation

$$\sum_{x \in W(k)} \Phi_{\mathfrak{b}, B}(x) = \int_{W(\mathcal{A}_k)} \Phi_{\mathfrak{b}, B}(x) \omega_{\text{HL}}(x) + R_\mathfrak{b}(B)$$

où  $\omega_{\text{HL}}$  est la forme de Leray sur  $W(\mathcal{A}_k)$  définie par  $\frac{1}{\sqrt{d}^{n-m+1}} \prod_{\nu \in M_k} \omega_{L, \nu}$ , où la forme locale  $\omega_{L, \nu}$  est caractérisée par la relation

$$\omega_{L, \nu} \wedge f^* \left( \bigwedge_{i=1}^m dx_{i, \nu} \right) = \bigwedge_{i=0}^n dx_{i, \nu}$$

$f : \mathbf{A}_k^{n+1} \rightarrow \mathbf{A}_k^m$  désignant le morphisme défini par les  $f_i$ .

**4.2. Compatibilité de la conjecture avec la méthode du cercle.** — On note  $\mu : \mathcal{I}(\mathcal{O}_k) \rightarrow \mathbf{Z}$  la fonction de Möbius.

**Proposition 4.2.1.** — *Avec les notations précédentes,*

(a) *L'entier  $n_V(B)$  vérifie*

$$n_V(B) = \frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{x \in W(k)} \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, BN(\mathfrak{a})^\delta}(x).$$

(b) *On a la relation*

$$\frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \int_{W(\mathcal{A}_k)} \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, BN(\mathfrak{a})^\delta}(x) \omega_{\text{HL}}(x) = C_H(V)B.$$

**Remarque 4.1.** — La méthode du cercle, lorsqu'elle s'applique fournit donc une majoration de  $|n_V(B) - C_H(V)B|$ .

*Démonstration.* — • Nous allons tout d'abord démontrer l'assertion (a) de la proposition on a la relation

$$n_V(B) = \frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)} n_{W, \mathfrak{a}}(B)$$

où

$$\begin{aligned} n_{W, \mathfrak{a}}(B) &= \#\{x \in W(k) \mid H(x) \leq B, (x_i, 0 \leq i \leq n) = \mathfrak{a} \text{ et } j(x) \in \Delta_H\} \\ &= \#\{x \in W(k) \mid H_\infty(x) \leq BN(\mathfrak{a})^\delta, (x_i, 0 \leq i \leq n) = \mathfrak{a} \text{ et } j(x) \in \Delta_H\}. \end{aligned}$$

La formule d'inversion de Möbius permet alors de passer de la relation

$$(x_0, \dots, x_n) = \mathfrak{a}$$

à la relation

$$(x_0, \dots, x_n) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

donnant l'égalité

$$n_{W, \mathfrak{a}}(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{x \in W(k)} \phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, BN(\mathfrak{a})^\delta}(x). \quad \square$$

• Nous allons maintenant démontrer la deuxième assertion de la proposition 4.2.1. Celle-ci découle des lemmes qui suivent.

Soit  $f : \mathbf{A}_{k_\nu}^{n+1} \rightarrow \mathbf{A}_{k_\nu}^m$  l'application induite par les  $f_i$  et  $H_\nu : k_\nu^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$  l'application définie par

$$H_\nu(x) = \sup_{1 \leq i \leq q} |Y_i(x)|_\nu.$$

Soit  $V_0$  l'ouvert de  $V(k_\nu)$  défini par  $x_0 \neq 0$ . Soit  $V_1$  un ouvert pour la topologie  $\nu$ -adique contenu dans  $V_0$  sur lequel  $x_1, \dots, x_{n-m}$  définit un système de coordonnées. En tout point  $x \in \mathbf{P}^n(k_\nu)$  tel que  $x_0 = 1$ ,  $f$  induit une application

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x : \quad \mathbf{A}_{k_\nu}^m &\rightarrow \mathbf{A}_{k_\nu}^m \\ (y_i)_{1 \leq i \leq m} &\mapsto (f_j(1, x_1, \dots, x_{n-m}, x_{n-m+1} + y_1, \dots, x_n + y_m))_{1 \leq j \leq m} \end{aligned}$$

**Lemme 4.2.2.** — Sur l'ouvert  $V_1$

$$\omega_\nu = \frac{1}{H_\nu(\rho^{-1}(x)) |\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}x}|_\nu} dx_{1,\nu} \dots dx_{n-m,\nu}$$

où  $\rho$  est l'application  $V_1 \rightarrow \mathbf{A}_{k_\nu}^{n-m}$ .

*Démonstration.* — Rappelons tout d'abord la construction de l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_V(\delta) \xrightarrow{\sim} \omega_V^{-1}.$$

Soit  $U_0$  l'ouvert de  $\mathbf{P}_{k_\nu}^n$  défini par  $x_0 \neq 0$ . On a une suite exacte

$$\mathcal{O}_{U_0}^m \otimes \mathcal{O}_{V_0} \xrightarrow{\left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)} \mathcal{O}_{U_0}^n \otimes \mathcal{O}_{V_0} \rightarrow \Omega_{V_0/k}^1 \rightarrow 0$$

Donc si  $g \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V(\delta))$ ,  $g$  est donné par un polynôme homogène de degré  $\delta$  et l'élément associé  $\theta \in \Gamma(V_0, \omega_V^{-1})$  est défini par la relation suivante pour tout  $x = (1 : x_1, \dots, x_n) \in V_0$  tel que  $g(x) \neq 0$ ,

$$g(x)^{-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \theta^\vee(x) \wedge f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m)(x)$$

où  $\theta^\vee$  est la section de  $\omega_V$  duale de  $\theta$ . Pour tout  $x \in V_0$ , on a alors

$$\|\theta(x)\|_\nu = \frac{|g(1, x_1, \dots, x_n)|_\nu}{H_\nu(1, x_1, \dots, x_n)}.$$

La section  ${}^t\omega(\rho)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n-m}} \right)$  de  $\omega_V^{-1}$  correspond donc à une fonction rationnelle homogène  $g$  telle que, pour tout  $x = (1, x_1, \dots, x_n) \in V_0$ ,

$$g(x)^{-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-m} \wedge f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m).$$

La fonction définie par pour tout  $x \in V_0$

$$g(x) = (\text{Jac}_0 \tilde{f}_x)^{-1}$$

convient donc. Le lemme s'en déduit directement.  $\square$

**Lemme 4.2.3.** — Soient  $\mathfrak{p} \in M_f$ ,  $g$  et  $h$  deux fonctions positives et localement constantes sur  $k_{\mathfrak{p}}^{n+1} - \{0\}$  telles que

$$\forall \lambda \in k_{\mathfrak{p}}, \forall x \in k_{\mathfrak{p}}^{n+1}, g(\lambda x) = |\lambda|_{\mathfrak{p}}^p g(x) \text{ et } h(\lambda x) = |\lambda|_{\mathfrak{p}}^q h(x)$$

où  $p$  et  $q$  sont des entiers tels que  $p + q = n + 1$ . On suppose en outre que pour tout  $x \in k_{\mathfrak{p}}^{n+1} - \{0\}$ , il existe  $\lambda \in k_{\mathfrak{p}}$  tel que  $h(x) = |\lambda|_{\mathfrak{p}}^q$ . Soit  $U_1$  un ouvert de  $\mathbf{P}^n(k_{\mathfrak{p}})$  pour la topologie  $v$ -adique contenu dans l'ouvert  $x_0 \neq 0$  et sur lequel  $gh$  ne s'annule pas. On note  $CU_1$  le cône au-dessus de  $U_1$ . On a alors la relation

$$\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \zeta_{\mathfrak{p}}(q) \int_{U_1} \frac{1}{gh} dx_1 \dots dx_n = \int_{\{x \in CU_1 | H(x) \leq 1\}} \frac{1}{g} dx_0 \dots dx_n.$$

*Démonstration.* — Il suffit de montrer le résultat pour un ouvert  $U_1$  où les fonctions considérées  $g(1, x_1, \dots, x_n)$  et  $h(1, x_1, \dots, x_n)$  sont constantes. On peut également supposer que  $U_1$  est de la forme  $B(P_0, \varepsilon)$  pour un  $P_0 \in U_0$  et un  $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ . On se ramène alors à  $g = 1$  sur  $U_1$ . Comme  $h$  vérifie la condition

$$\forall x \in k_{\mathfrak{p}}^{n+1} - \{0\}, \exists \lambda \in k_{\mathfrak{p}}^* / H(x) = |\lambda|_{\mathfrak{p}}^q$$

on peut également se ramener à  $h = 1$  sur  $U_1$ . On peut ensuite supposer  $\varepsilon = 1$  et  $P_0 = (1 : 0 : \dots : 0)$ . On obtient que le résultat du lemme vaut à une constante multiplicative fixe près. La valeur de la constante est alors obtenue en calculant les deux termes pour  $U_1 \subset \mathbf{A}_{k_{\mathfrak{p}}}^{q-1} \times \mathbf{A}_{k_{\mathfrak{p}}}^{n-q+1}$  défini par  $|x_i - 1|_{\mathfrak{p}} < 1$  si  $i \geq q$ ,

$$h = \sup_{0 \leq i \leq q-1} |x_i|_{\mathfrak{p}}^q \text{ et } g = \sup_{q \leq i \leq n} |x_i|_{\mathfrak{p}}^{n-q+1}.$$

Pour ce faire, il suffit de constater que, après s'être ramené à  $q = n + 1$ , l'intégrale de droite est, d'après le lemme 2.1.2,  $d_{\mathfrak{p}}(\mathbf{P}_{k_{\mathfrak{p}}}^n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{N(\mathfrak{p})^i}$  tandis que l'intégrale de gauche vaut 1.  $\square$

**Lemme 4.2.4.** — Soit  $\mathfrak{p} \in M_f$ . Pour tout  $x \in W(k_{\mathfrak{p}})$ , notons

$$H_{\mathfrak{p}}(x) = \sup_{1 \leq i \leq q} |Y_i(x)|_{\mathfrak{p}}.$$

Alors

$$\int_{\{x \in W(k_p) \mid H_p(x) \leq 1\}} \omega_{L,p}(x) = \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \zeta_p(\delta) \omega_p(V(k_p)).$$

*Démonstration.* — Ce lemme résulte du lemme 4.2.2 et du lemme 4.2.3 que l'on applique avec  $g = |\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}}(x)|_p$  qui, vue comme fonction en les coordonnées homogènes, vérifie l'équation du lemme 4.2.3 avec  $p = \sum_{i=1}^m (d_i - 1)$ . En effet la mesure de Leray est définie localement par

$$\frac{1}{|\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}}(x)|_p} dx_{0,p} \dots dx_{n-m,p}. \quad \square$$

**Lemme 4.2.5.** — *Pour les places archimédiennes, on a la relation*

$$\int_{\prod_{v \in M_\infty} W(k_v)} \chi_{\{x \in \Delta_H \mid H_\infty(x) \leq B\}} \prod_{v \in M_\infty} \omega_{L,v} = B \frac{\sqrt{dw}}{h\delta} \lim_{s \rightarrow 1} \zeta_k(s)(s-1) \prod_{v \in M_\infty} \omega_v(V(k_v)).$$

*Démonstration.* — Il suffit de montrer le résultat analogue pour un ouvert  $U_1$  pour le produit des topologies  $v$ -adiques sur lequel  $x_{1,v} \dots x_{n-m,v}$  définissent un système de coordonnées. On note  $CU_1$  le cône au-dessus de  $U_1$ . Par définition de la mesure de Leray, le membre de gauche s'écrit

$$\begin{aligned} L &= \int_{\{x \in \Delta_H \cap CU_1 \mid H_\infty(x) \leq B\}} \prod_{v \in M_\infty} \frac{1}{|\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}}(x)|_v} dx_{0,v} \dots dx_{n-m,v} \\ &= B \int_{\mathcal{V}_1} \frac{1}{\prod_{v \in M_\infty} |\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}}(x)|_v} \prod_{v \in M_\infty} dx_{0,v} \dots dx_{n-m,v} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{V}_1$  désigne l'ensemble des  $x \in CU_1$  tels que

$$\begin{cases} \prod_{v \in M_\infty} \sup_{0 \leq i \leq q} |Y_i(x_v)|_v \leq 1 \\ (\log(\sup_{0 \leq i \leq q} |Y_i(x_v)|_v))_{v \in M_\infty} \in F. \end{cases}$$

Notons  $M_{\mathbf{R}} = \{\nu \in M_{\infty} \mid N_{\nu} = 1\}$  et  $M_{\mathbf{C}} = \{\nu \in M_{\infty} \mid N_{\nu} = 2\}$ . Pour tout  $\nu \in M_{\mathbf{C}}$ , on utilise des coordonnées polaires pour  $x_{0,\nu}$ . On note

$$\iota : \prod_{\nu \in M_{\infty}} \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{N_{\nu} \dim V} \rightarrow \prod_{\nu \in M_{\infty}} k_{\nu}^{\dim V + 1}$$

le produit des applications définies par

$$\begin{aligned} \iota_{\nu} : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{N_{\nu} \dim V} &\rightarrow k_{\nu}^{\dim V + 1} \\ (x_0, (x_{j,l})_{\substack{1 \leq j \leq \dim V \\ 1 \leq l \leq 2}}) &\mapsto (x_0, (x_{j,1} + ix_{j,2})_{1 \leq j \leq \dim V}) \end{aligned}$$

si  $N_{\nu} = 2$  et de manière similaire si  $\nu \in M_{\mathbf{R}}$ . On obtient alors

$$L = B2^{r_2(\dim V + 1)}(2\pi)^{r_2} 2^{r_1} \int_{\mathcal{V}_2} \frac{\prod_{\nu \in M_{\mathbf{C}}} x_{0,\nu}}{\prod_{\nu \in M_{\infty}} |\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1} \iota(x)}|_{\nu}} dx$$

où  $\mathcal{V}_2$  désigne l'ensemble des  $x \in \prod_{\nu \in M_{\infty}} \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{N_{\nu} \dim V}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \iota(x) \in CU_1 \\ \prod_{\nu \in M_{\infty}} H_{\nu, \iota_{\nu}}(x_{\nu}) \leq 1 \\ \left( \log(H_{\nu, \iota_{\nu}}(x_{\nu})) \right)_{\nu \in M_{\infty}} \in F \end{array} \right.$$

On fait alors le changement de variables

$$\begin{aligned} v_{\nu} &= H_{\nu, \iota_{\nu}}(x_{\nu}) && \text{pour } \nu \in M_{\infty} \\ v_{j,\nu} &= \frac{x_{j,\nu}}{x_{0,\nu}} && \text{pour } \nu \in M_{\infty} \text{ et } 1 \leq j \leq N_{\nu} \dim V \end{aligned}$$

La Jacobienne est le produit pour  $v \in M_\infty$  des déterminants suivants

$$\begin{aligned}
& \left| \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_{v,t_v}}{\partial x_0} & \frac{\partial H_{v,t_v}}{\partial x_1} & \frac{\partial H_{v,t_v}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial H_{v,t_v}}{\partial x_{N_v \dim V}} \\ -\frac{x_1}{x_0^2} & \frac{1}{x_0} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{x_2}{x_0^2} & 0 & \frac{1}{x_0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{x_{N_v \dim V}}{x_0^2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{x_0} \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{1}{x_0^{N_v \dim V}} \left( \frac{\partial H_{v,t_v}}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{N_v \dim V} \frac{x_i}{x_0^2} x_0 \frac{\partial H_{v,t_v}}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{1}{x_0^{N_v \dim V + 1}} \left( \sum_{i=0}^{N_v \dim V} x_i \frac{\partial H_{v,t_v}}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{N_v \delta}{x_0^{N_v \dim V + 1}} H_{v,t_v} \\
&= \frac{N_v \delta}{x_0^{N_v (\dim V - \delta) + 1}} H_{v,t_v} \left( 1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_{N_v}}{x_0} \right).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.2.2 et le fait que la fonction  $x \mapsto |\text{Jac}_0 \tilde{f}_{\rho^{-1}t(x)}|_v$  est homogène de degré  $N_v \sum_{i=1}^m (d_i - 1)$ , on obtient

$$L = B(2\pi)^{r_2} 2^{r_1} 2^{r_2} \frac{1}{2^{r_2} \delta^{r_1 + r_2}} \left( \prod_{v \in M_\infty} \omega_v \right) (U_1) \int_{\substack{\prod_{v \in M_\infty} u_v \leq 1 \\ (\log u_v)_{v \in M_\infty} \in F}} \prod_{v \in M_\infty} du_v.$$

On fait alors le changement de variables  $w_0 = \prod_{v \in M_\infty} v_v$  et  $w_i = u_i^{\vee}(\text{pr}(v))$  si  $1 \leq i \leq r$  où  $u_i$  désigne la base du réseau  $L$  introduite dans la partie 4.1. Comme dans [Sc], on en déduit que

$$L = B(2\pi)^{r_2} 2^{r_1} \frac{1}{\delta^{r_1 + r_2}} \left( \prod_{v \in M_\infty} \omega_v \right) (U_1) \delta^r R.$$

La formule de Dirichlet montre alors le résultat.  $\square$



**Lemme 4.2.6.** — La constante  $\alpha$  est donnée par

$$\alpha_c(V) = \frac{1}{\delta}.$$

*Démonstration.* — Comme  $\dim V \geq 3$ , le théorème de Lefschetz (cf. [SGA2, exposé XII]) implique que  $\text{Pic } V \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}\mathcal{O}_V(1)$ . Or  $\omega_V^{-1} = \mathcal{O}_V(\delta)$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} \alpha_c(V) &= \theta_{\omega_V^{-1}}(\mathcal{H}_{\omega_V^{-1}}(1) \cap C_{\text{eff}}^V(V)) \\ &= \frac{1}{\delta}. \quad \square \end{aligned}$$

*Démonstration de l'assertion (b) de la proposition 4.2.1.* — D'après ce qui précède,  $\text{Pic } V$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}$ . Les lemmes 4.2.4 et 4.2.5 impliquent donc que

$$\int_{W(\mathcal{A}_k)} \phi_{\text{ab}, BN(\mathfrak{a})^\delta \omega_{\text{HL}}} = B \frac{w \lim_{s \rightarrow 1} \zeta_k(s)(s-1)}{\delta b \sqrt{d}^{\dim V}} \frac{\zeta_k(\delta)}{N(\mathfrak{b})^\delta} \prod_{\mathfrak{v} \in M_\infty} \omega_{\mathfrak{v}}(V(k_{\mathfrak{v}})) \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \frac{\omega_{\mathfrak{p}}(V(k_{\mathfrak{p}}))}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \overline{V})}.$$

Le terme de gauche dans l'assertion (b) de la proposition 4.2.1 s'écrit donc

$$B \frac{\zeta_k(\delta)}{\delta} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_k)} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{N(\mathfrak{b})^\delta} \tau_H(V(\mathcal{A}_k)).$$

Mais

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_k)} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{N(\mathfrak{b})^\delta} = \frac{1}{\zeta_k(\delta)}$$

et  $\alpha_c(V) = \frac{1}{\delta}$ . □

En appliquant le théorème 1 de [Bir], on obtient le corollaire suivant

**Corollaire 4.2.7.** — Si  $d_1 = \dots = d_m = d \geq 2$ ,  $k = \mathbf{Q}$ , si  $n > 2^{d-1}m(m+1)(d-1)$  et si  $H$  est défini par une famille génératrice  $(s_i)_{1 \leq i \leq q}$  de  $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$  telle que les  $s_i$  correspondent à des monômes  $M_i$  de degré  $\delta$  avec  $M_i = X_i^\delta$  pour  $0 \leq i \leq n$  alors

$$n_V(B) \sim C_H(V)B \text{ lorsque } B \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* — Comme  $k = \mathbf{Q}$ , on a  $\Delta_H = \prod_{\mathfrak{v} \in M_\infty} W(k_{\mathfrak{v}})$ . En outre, on a supposé que les  $n+1$  premières sections de la famille choisie sont induites par les monômes  $X_i^\delta$ . On peut donc appliquer le théorème 1 de [Bir] pour obtenir que

$$|R_{\mathbf{Z}}(B^\delta)| \leq CB^{\delta-\varepsilon}$$

avec des constantes  $C$  et  $\varepsilon$  strictement positives. Par conséquent

$$R_{(n)}(B^\delta) \leq C \left(\frac{B}{n}\right)^{\delta-\varepsilon}.$$

Soit  $g(B, n) = R_{(n)}(B^\delta)$ . On déduit du lemme 12 de [Sc] que

$$\sum_{n \in \mathbf{N}^+} \mu(n)g(B, n) = O(B^{\delta-\varepsilon}). \quad \square$$

**4.3. Le cas de la surface cubique étudiée par Heath-Brown.** — Dans [HB], Heath-Brown décrit un test numérique réalisé pour la surface  $V$  définie par l'équation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = kT^3$$

avec  $k = 2$  ou  $3$ . D'après [HB, theorem 1], cette variété ne vérifie pas l'approximation faible. Les résultats de ce test fait sur les points de hauteur inférieure à 1000 donne un comportement asymptotique de la forme

$$n_V(B) \sim C_{\text{HB}}(V)B.$$

Cette constante  $C_{\text{HB}}(V)$  peut, d'après [SD], se mettre sous la forme

$$C_{\text{HB}}(V) = \frac{1}{6} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) L_S(s, \text{Pic } \bar{V}) \prod_{\nu \in M_k} \sigma_\nu$$

où  $S = \{p \mid 3k\}$  et pour tout  $\nu \in M_{\mathbf{Q}}$

$$\sigma_\nu = \lambda_\nu^{-1} \int_{\substack{H_\nu(x,y,z,t) \leq 1 \\ f(x,y,z,t)=0}} \frac{dx dy dz}{\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|_\nu}$$

avec  $f(x, y, z, t) = x^3 + y^3 + z^3 - kt^3$  et

$$\lambda_\nu = \begin{cases} L_\nu(1, \text{Pic } \bar{V}) & \text{si } \nu \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or le lemme 4.2.4 implique que pour tout nombre premier  $p$

$$\sigma_p = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \zeta_p(1) \lambda_p^{-1} \omega_p(V(\mathbf{Q}_p)) = \lambda_p^{-1} \omega_p(V(\mathbf{Q}_p))$$

et par le lemme 4.2.5, comme  $k = \mathbf{Q}$ , on a

$$\sigma_\infty = 2\omega_{\mathbf{R}}(V(\mathbf{R}))$$

donc  $C_{\text{HB}}(V) = \frac{1}{3}\tau_H(V(\mathcal{A}_k))$ . Or, d'après [CTS, page 430],  $\text{Pic } V$  est un  $\mathbf{Z}$ -module libre de dimension 1 et  $\alpha_c(V) = 1$ . En outre comme dans [SD] on a

$$\frac{1}{3}\tau_H(V(\mathcal{A}_k)) = \tau_H(\overline{V(k)}).$$

On obtient donc

**Proposition 4.3.1.** — *Avec les notations ci-dessus,*

$$C_{\text{HB}}(V) = C_H(V).$$

### 5. Indépendance vis-à-vis de la construction de la hauteur

On note  $V$  une variété de Fano telle que  $\omega_V^{-1}$  soit très ample. Les hauteurs considérées ici sont définies par des systèmes de métriques relatifs au faisceau  $\omega_V^{-1}$ . On reprend les notations de la partie 2.

**Définition 5.1.** — On fixe un ouvert  $U$  de  $V$ . Pour toute hauteur  $H$  sur  $V$  et tout ouvert  $W$  de  $V(\mathcal{A}_k)$  on note

$$n_{H,W}(B) = \#\{x \in U(k) \cap W \mid H(x) \leq B\}.$$

On dira qu'un ouvert  $W$  de  $V(\mathcal{A}_k)$  est bon si et seulement si il existe une hauteur  $H$  sur  $V$  telle que  $\omega_{H,S}(\partial W) = 0$ . Cette condition est alors vérifiée pour toute hauteur  $H$ .

On dit alors que les points rationnels de  $V$  sont équidistribués sur  $U$  ou que  $V$  vérifie la propriété  $(E_U)$  si et seulement si il existe un choix de la hauteur  $H$  sur  $V$  tel que pour tout bon ouvert  $W$  de  $U(\mathcal{A}_k)$

$$\begin{aligned} \frac{n_{H,W}(B)}{n_U(B)} &\rightarrow \frac{\omega_{H,S}(\overline{V(k)} \cap W)}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})} \\ B &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

**Remarques 5.1.** — (1) Il est clair que si  $V$  contient des sous-variétés accumulatrices alors  $V$  ne vérifie pas  $(E_V)$ . La question de savoir si  $(E_U)$  est vérifiée n'est en fait pertinente que si  $U$  est inclu dans le complémentaire des sous-variétés accumulatrices. C'est ce que l'on suppose par la suite.

(2) La raison pour laquelle on ne considère que les bons ouverts est que la condition ne peut être vérifiée par tout les ouverts  $W$ . En effet soit  $v_0 \in M_\infty$ . L'ensemble  $V(k)$  étant dénombrable,  $\omega_{v_0}(V(k)) = 0$ . Or la mesure  $\omega_{v_0}$  est régulière. Pour tout  $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ , il existe donc un ouvert  $W_{v_0}$  de  $V(k_{v_0})$  tel que

$V(k) \subset W_{\nu_0}$  et  $\omega_{\nu_0}(W_{\nu_0}) < \varepsilon$ . Prenons pour  $W$  le produit  $W_{\nu_0} \times \prod_{\substack{\nu \in M_k \\ \nu \neq \nu_0}} V(k_\nu)$ .

On obtient que

$$n_{H,W}(B) = n_U(B)$$

mais

$$\omega_{H,S}(\overline{V(k)} \cap W) \leq \varepsilon \omega_{H,S}(V(\mathcal{A}_k)).$$

**Proposition 5.0.1.** — (a) La propriété  $(E_V)$  est compatible avec les résultats de la méthode du cercle au sens de la proposition 4.2.1.

(b) Si  $V$  vérifie  $(E_U)$  pour une hauteur  $H$  alors, pour toute fonction continue  $f$  sur  $V(\mathcal{A}_k)$ , on a

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\{x \in U(k) \mid H(x) \leq B\}} f(x)}{n_U(B)} = \frac{\int f \omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})}.$$

(c) Si  $V$  vérifie  $(E_U)$  et la formule 2.2.1 pour une même hauteur  $H$ , alors elle les vérifie pour toute hauteur relative au faisceau  $\omega_V^{-1}$ .

(d) Si  $V$  vérifie la conjecture de Manin raffinée, alors elle vérifie la propriété  $(E_U)$  où  $U$  désigne le complémentaire des sous-variétés accumulatrices.

**Remarque 5.2.** — On verra par la suite que la propriété  $(E_V)$  est vérifiée par les variétés de drapeaux généralisées lorsque le groupe est quasi-déployé.

*Démonstration de la proposition.* — • L'assertion (a) se démontre comme la proposition 4.2.1. En effet, les démonstrations des lemmes 4.2.3 et 4.2.5 montrent que si  $g$  est de la forme  $\prod_{\nu \in S'} g_\nu$  pour un ensemble fini  $S'$  de places de  $k$  et  $g_\nu$  des fonctions continues sur  $V(k_\nu)$ , alors, avec les notations de la partie 4, on a

$$\int_{W(\mathcal{A}_k)} g \circ \pi \Phi_{\text{ab}, BN(\mathfrak{a})^\delta} \omega_{\text{HL}} = B \frac{w \lim_{s \rightarrow 1} \zeta_k(s)(s-1)}{\delta h} \frac{\zeta_k(\delta)}{N(\mathfrak{b})^\delta} \int_{V(\mathcal{A}_k)} g \omega_{H,\emptyset}.$$

Or si  $O$  est un bon ouvert de  $V(\mathcal{A}_k)$ , alors il existe une suite d'applications  $(g_i)_{i \in \mathbf{N}}$  de la forme ci-dessus telles que

$$\begin{aligned} \int_{V(\mathcal{A}_k)} |\chi_O - g_i| \omega_{H,\emptyset} &\rightarrow 0 \\ i &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

ce qui implique l'analogie de l'assertion (b) de la proposition 4.2.1 pour l'ouvert  $O$ . L'analogie de l'assertion (a) de la proposition 4.2.1, c'est à dire

$$\sum_{\{x \in V(k) \mid H(x) \leq B\}} \chi_O(x) = \frac{1}{w} \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k) / \mathcal{P}(\mathcal{O}_k)} \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{x \in W(k)} \chi_{O \circ \pi}(x) \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, BN(\mathfrak{a})^\delta}(x)$$

se démontre exactement comme dans la partie 4.

- Démontrons l'assertion (b). Elle est vérifiée par les fonctions caractéristiques des bons ouverts de  $V(\mathcal{A}_k)$  et donc par toute combinaison linéaire de telles fonctions. Or les bons ouverts forment une base de la topologie de  $V(\mathcal{A}_k)$  qui est compact. On peut donc approcher  $f$  de manière uniforme par des applications de la forme  $\sum_{i \in I} \lambda_i \chi_{W_i}$  où les  $W_i$  sont de bons ouverts de  $V(\mathcal{A}_k)$ .

- Pour démontrer (c), on constate tout d'abord que pour toute hauteur  $H'$ , la fonction  $\frac{H}{H'}$  est bien définie sur  $V(\mathcal{A}_k)$ . En outre

$$\frac{H}{H'} = \prod_{\nu \in S'} \frac{H_{2,\nu}}{H_{1,\nu}}$$

où  $S'$  est un ensemble fini de places. Par conséquent  $\frac{H}{H'}$  est continue et partout non nulle. Si  $V$  vérifie  $(E_U)$ , alors pour toute fonction caractéristique  $\chi_W$  d'un bon ouvert  $W$  de  $V(\mathcal{A}_k)$ , on a

$$\frac{\#\{x \in U(k) \mid H(x) \leq \chi_W B\}}{n_U(B)} \xrightarrow[B \rightarrow +\infty]{} \frac{\int \chi_W \omega_{H,S}}{\frac{\omega_{H,S}(V(k))}{\#V(k)}}.$$

Cette relation est également vraie pour une combinaison linéaire de telles fonctions. On approche alors  $\frac{H}{H'}$  de manière uniforme en utilisant le fait que

$$\frac{\#\{x \in U(k) \mid B \leq H(x) \leq B(1 + \varepsilon)\}}{n_U(B)} \xrightarrow[B \rightarrow +\infty]{} \varepsilon.$$

- Démontrons maintenant l'assertion (d). On fixe une hauteur  $H$  sur  $V$ . Nous allons démontrer l'assertion  $(E_U)$  pour  $H$ . On montre tout d'abord le résultat pour un ouvert élémentaire  $W$  de  $V(\mathcal{A}_k)$ , c'est à dire de la forme  $W = \prod_{\nu \in M_k} W_\nu$  où, quel que soit  $\nu \in M_k$ ,  $\omega_\nu(\partial W_\nu) = 0$  et, pour presque tout  $\nu \in M_k$ ,

$W_\nu = V_\nu(k_\nu)$ . On note  $S_W$  l'ensemble des places telles que  $W_\nu \neq V_\nu(k_\nu)$ . Soit  $\varepsilon \in ]0, 1]$ . Comme  $\omega_\nu(\partial W_\nu) = 0$  pour tout  $\nu \in S_W$  il existe des fonctions continues  $f_\nu$  et  $g_\nu$  de  $V(k_\nu)$  dans  $\mathbf{R}_+$  telles que

$$0 \leq f_\nu \leq \chi_{W_\nu} \leq g_\nu \leq 1 \text{ et } \int_{V(k_\nu)} (g_\nu - f_\nu) \omega_\nu \leq \frac{\varepsilon}{8\omega_\nu(V_\nu)}.$$

On pose  $\eta = \frac{\varepsilon}{4}$  et

$$\tilde{f}_\nu = (1 - \eta)f_\nu + \eta \text{ et } \tilde{g}_\nu = (1 - \eta)g_\nu + \eta$$

si  $\nu \in S_W$  et  $\tilde{f}_\nu = \tilde{g}_\nu = 1$  sinon. On définit alors  $f = \prod_{\nu \in M_k} \tilde{f}_\nu$  et  $g = \prod_{\nu \in M_k} \tilde{g}_\nu$ . Alors

$\frac{H}{f}$  et  $\frac{H}{g}$  sont des hauteurs sur  $V$  et, par hypothèse, on a les équivalences

$$\#\{x \in U(k) \mid \frac{H}{f}(x) \leq B\} \sim C_0 \int_{\overline{V(k)}} f \omega_{H,S} B \log^{t-1} B$$

et

$$\#\{x \in U(k) \mid \frac{H}{g}(x) \leq B\} \sim C_0 \int_{\overline{V(k)}} g \omega_{H,S} B \log^{t-1} B.$$

où

$$\frac{C_0}{\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t L_S(s, \text{Pic } \overline{V})} \in \mathbf{Q}.$$

On obtient donc

$$\frac{\#\{x \in U(k) \mid H(x) \leq Bf(x)\}}{\#\{x \in U(k) \mid H(x) \leq B\}} \rightarrow \frac{\int_{\overline{V(k)}} f d\omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})}$$

$$B \rightarrow +\infty$$

et on a une limite analogue pour  $g$ . Il existe donc  $B_0$  tel que pour tout  $B > B_0$  on ait

$$\frac{\int_{\overline{V(k)}} f d\omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})} - \frac{\varepsilon}{8} \leq \frac{\#\left\{x \in U(k) \mid H(x) \leq \prod_{\nu \in S_W} ((1-\eta)\chi_{W_\nu}(x) + \eta)B\right\}}{n_U(B)} \leq \frac{\int_{\overline{V(k)}} g d\omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})} + \frac{\varepsilon}{8}.$$

Or

$$\frac{\#\{x \in U(k) \mid H(x) \leq \eta B\}}{n_U(B)} \rightarrow \eta.$$

$$B \rightarrow +\infty$$

Donc, pour  $B$  assez grand,

$$\left| \frac{\#\{x \in U(k) \mid H(x) \leq \chi_W(x)B\}}{n_U(B)} - \frac{\frac{\int \chi_W \omega_{H,S}}{V(k)}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})} \right| \leq 2\frac{\varepsilon}{4} + 4\frac{\varepsilon}{8}.$$

On en déduit alors que pour tout  $W \subset V(\mathcal{A}_k)$  appartenant à l'algèbre de Boole engendrée par les ouverts élémentaires

$$\frac{\#\{x \in W \cap U(k) \mid H(x) \leq B\}}{n_U(B)} \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{\int \chi_W \omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})}.$$

Le cas général s'obtient en construisant pour tout bon ouvert  $W$  de  $V(\mathcal{A}_k)$  et tout  $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$  des éléments  $W'$  et  $W''$  de cette algèbre tels qu'on ait les relations

$$\chi_{W'} < \chi_W < \chi_{W''} \text{ et } \omega_{H,S}(W'' - W') < \varepsilon.$$

Là encore on utilise le fait que  $\omega_{H,S}(\partial W) = 0$ .  $\square$

## 6. Compatibilité de la conjecture avec les résultats de Schanuel, Franke, Manin et Tschinkel

**6.1. Le cas de l'espace projectif.** — Nous allons maintenant vérifier que  $C_H(\mathbf{P}_k^n)$  coïncide avec la constante obtenue par Schanuel.

**Proposition 6.1.1.** —

$$C_{\text{Sch}}(\mathbf{P}_k^n) = \frac{h_k}{\zeta_k(n+1)} \left( \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^{n+1} (n+1)^r \frac{R}{w} = \frac{1}{n+1} \tau_H(\mathbf{P}_k^n) = C_H(\mathbf{P}_k^n).$$

**Remarque 6.1.** — Ce résultat découle également du corollaire 6.2.16. Toutefois nous en donnons ici une démonstration directe.

*Démonstration.* — Grâce à la formule de Dirichlet, on peut réécrire  $C_{\text{Sch}}(\mathbf{P}_k^n)$  sous la forme

$$C_{\text{Sch}}(\mathbf{P}_k^n) = \left( \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_k(s) \right) \frac{1}{\zeta_k(n+1)} \left( \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^n (n+1)^{r_1+r_2-1}.$$

Mais, par définition de la fonction  $\zeta_k$ , on a la relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_k(n+1)} &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \left( 1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^{n+1}} \right) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \left( 1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \right) \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{N(\mathfrak{p})^k} \right) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \frac{d_{\mathfrak{p}}(\mathbf{P}_k^n)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \mathbf{P}_k^n)}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant la volume à l'infini de  $\mathbf{P}_{k_\nu}^n$  correspondant à notre choix de la hauteur. Dans le cas où  $k_\nu = \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned} \omega_\nu(\mathbf{P}^n(k_\nu)) &= \int_{\mathbf{R}^n} \inf \left( 1, \inf_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{1}{|x_i|_\nu^{n+1}} \right) \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= 2^n \left( 1 + n \int_1^{+\infty} \frac{x_1^{n-1}}{x_1^{n+1}} dx_1 \right) \\ &= 2^n \times (n+1) \end{aligned}$$

et, dans le cas où  $k_\nu = \mathbf{C}$ , en remarquant que, avec nos notations,  $|\cdot|_\nu = |\cdot|^2$

$$\omega_\nu(\mathbf{P}^n(k_\nu)) = 2^n \int_{\substack{0 \leq \theta_i \leq 2\pi \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ 0 \leq r_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n}} \inf \left( 1, \inf_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{1}{r_i^{2(n+1)}} \right) \right) \prod_{i=1}^n r_i dr_i d\theta_i.$$

En faisant le changement de variables  $u_i = r_i^2$ , on obtient que

$$\begin{aligned} \omega_\nu(\mathbf{P}^n(k_\nu)) &= (2\pi)^n \frac{1}{2^n} \omega_\nu(\mathbf{P}^n(\mathbf{R})) \\ &= (2\pi)^n (n+1). \end{aligned}$$

En définitive la constante  $C$  s'écrit

$$C = \frac{1}{n+1} \frac{\prod_{\nu \in M_\infty} \omega_\nu(\mathbf{P}^n(k_\nu))}{\sqrt{d}^n} \left( \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)L(s, \text{Pic } \mathbf{P}_k^n) \right) \prod_{\mathfrak{p} \in M_k} \frac{d_{\mathfrak{p}}(\mathbf{P}_k^n)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \mathbf{P}_k^n)}$$

ce qui est la constante recherchée.  $\square$



## 6.2. Le cas des variétés de drapeaux généralisées

**6.2.1. Notations.** — Nous allons maintenant comparer la constante obtenue par Franke, Manin et Tschinkel dans le cas des variétés de drapeaux généralisées (cf. [FMT, (2.11)]) avec  $C_H(P \setminus G)$ .

On fixe donc un groupe linéaire semi-simple connexe  $G$  sur  $k$  et  $P$  un  $k$ -sous-groupe parabolique de  $G$ . On note  $V = P \setminus G$  et  $\pi : G \rightarrow V$  la projection canonique. Quitte à remplacer  $G$  par son  $k$ -revêtement universel  $\tilde{G}$  (cf. [BoTi, proposition 2.24]) et  $P$  par son image réciproque dans  $\tilde{G}$ , on peut se ramener au cas où  $G$  est simplement connexe. On note  ${}_kP$  un  $k$ -sous-groupe parabolique minimal de  $G$  contenu dans  $P$ . Pour tout groupe algébrique linéaire  $H$  sur un corps  $L$  de caractéristique 0,  $L(H)$  désigne l'algèbre de Lie de  $H$ ,  $\mathcal{R}H$  son radical,  $\mathcal{R}_u H$  son radical unipotent,  $X^*(H)_L$  le groupe des caractères de  $H$  sur  $L$  et  $X_*(H)_L$  le groupe des cocaractères de  $H$  sur  $L$ . On note  ${}_kS$  la composante scindée du tore maximal dans  $\mathcal{R}{}_kP$ . Soit  ${}_k\Phi$  l'ensemble des racines de  ${}_kS$  dans  $G$ ,  ${}_k\Delta$  la base de  ${}_k\Phi$  correspondant à  ${}_kP$  et  ${}_k\Phi^+$  l'ensemble des racines positives. Pour tout  $\alpha \in {}_k\Phi$ , on note  $\check{\alpha}$  la coracine correspondante.

Pour toute partie  $J$  de  ${}_k\Delta$ , on note  $[J]$  l'ensemble des racines s'écrivant comme combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de  $J$ ,  $[J]^+$  l'intersection de  $[J]$  avec  ${}_k\Phi^+$ ,  ${}_kP_J$  le  $k$ -sous-groupe parabolique standard correspondant (cf. [Bo, page 234]) et  ${}_kS_J$  le tore

$${}_kS_J = \left( \bigcap_{\alpha \in J} \text{Ker } \alpha \right)^\circ.$$

Le tore  ${}_kS_J$  est la composante scindée du tore maximal dans  $\mathcal{R}({}_kP_J)$ . L'application de restriction de  $X^*({}_kP_J)_k$  dans  $X^*({}_kS_J)_k$  est injective et de conoyau fini. On identifiera  $X^*({}_kP_J)_k$  à son image. On note également

$$\mathfrak{s}_J = X_*({}_kS_J)_k \otimes \mathbf{R}, \quad \mathfrak{s}_J^\vee = X^*({}_kS_J) \otimes \mathbf{R}$$

et  $\mathfrak{r}_J$  le radical de  $L({}_kP_J)$ . On désigne par  $\Phi(J)^+$  l'ensemble des racines de  ${}_kS_J$  dans  $\mathfrak{r}_J$  et  $\rho_{{}_kP_J}$  la demi-somme de ces racines comptées avec des multiplicités égales à la dimension de leur espace propre dans  $\mathfrak{r}_J$ . Si  $V_J$  désigne le quotient  ${}_kP_J \setminus G$  et  $\pi_J : G \rightarrow V_J$  la projection canonique, on a, d'après [San, proposition 6.10] une suite exacte

$$0 \rightarrow k[V_J]^*/k^* \rightarrow k[G]^*/k^* \rightarrow X^*({}_kP_J)_k \rightarrow \text{Pic } V_J \rightarrow \text{Pic } G.$$

Par le théorème de Rosenlicht [Ro, theorem 3]  $k[G]^*/k^*$  est isomorphe à  $X^*(G)_k$  qui est trivial. En outre par [San, lemme 6.9 (iii)],  $\text{Pic } G$  est trivial puisque  $G$  est simplement connexe. On obtient donc un isomorphisme

$$X^*({}_kP_J)_k \xrightarrow{\sim} \text{Pic } V_J.$$

On vérifie aisément que cet isomorphisme est l'application qui à tout caractère  $\chi$  de  ${}_kP_J$  associe le faisceau  $\mathcal{L}_\chi$  défini par

$$\Gamma(U, \mathcal{L}_\chi) = \{f \in \Gamma(\pi_J^{-1}(U), \mathcal{O}_G) \mid \forall p \in {}_kP_J, \forall g \in \pi_J^{-1}(U) f(pg) = \chi(p)f(g)\}$$

pour tout ouvert  $U$  de  $V_J$ . Cet isomorphisme envoie  $2\rho_{{}_kP_J}$  sur le faisceau canonique  $\omega_{V_J}$ . Par définition on a  ${}_kP = {}_kP_\emptyset$ . Nous noterons  $I$  la partie de  ${}_k\Delta$  correspondant à  $P$ . On a donc la relation

$$(6.2.1) \quad \omega_V = \mathcal{L}_{2\rho_P}.$$

Pour toute place  $v$  de  $k$ , on note  $K_v$  un sous-groupe compact maximal de  $G(k_v)$  tel que

$$G(k_v) = {}_kP(k_v)K_v.$$

L'existence de tels sous-groupes est une conséquence de la décomposition d'Iwasawa (cf. [Tit, §3.3.2] pour le cas d'un corps local). On suppose en outre qu'il existe un plongement  $G \rightarrow GL_{n,k}$  tel que pour presque tout  $v \in M_f$  on ait

$$K_v = G \cap GL_n(\mathcal{O}_{k_v}).$$

On pose  $K = \prod_{v \in M_k} K_v$ . On a alors  $G(\mathcal{A}_k) = {}_kP(\mathcal{A}_k)K$ . La hauteur d'un point  $x \in V(k)$  relativement à un faisceau ample  $\mathcal{L}_\chi$  est défini de la manière suivante (cf. [FMT, §2]) soit  $s \in \Gamma(V, \mathcal{L}_\chi)$  une section de  $\mathcal{L}_\chi$  non nulle en  $x$  correspondant à une fonction  $\tilde{s} \in \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$ , soit  $k \in K$  tel que, pour tout  $v \in M_k$ ,  $\pi(k_v) = x$ , alors

$$H_\chi(x) = \prod_{v \in M_k} |\tilde{s}(k_v)|_v^{-1}.$$

L'hypothèse sur  $K$  entraîne que ce produit n'a qu'un nombre fini de termes non triviaux et la formule du produit qu'il est indépendant du choix de la section  $s$ . Dans la suite de cette section, on utilisera la hauteur

$$(6.2.2) \quad H = H_{-2\rho_P}$$

correspondant à  $\omega_V^{-1}$  d'après (6.2.1).

On note  ${}_k W$  le groupe de Weyl de  ${}_k \Phi$ . et  ${}_k W_J$  le sous-groupe de  ${}_k W$  engendré par les symétries  $s_\alpha$  pour  $\alpha \in J$ . Nous désignerons par  $w^J$  le plus long élément de  ${}_k W_J$  et par  $w'_J$  un relevé de  $w_J$  dans  $\mathcal{N}_G({}_k S)(k)$ . Pour tout  $\nu \in M_k$ , on note  $H_{{}_k P_J, \nu}$  la fonction de  $G(k_\nu)$  dans  $\mathfrak{s}_J$  définie par

$$\forall \chi \in X^*({}_k P_J)_k, \forall p \in {}_k P_J, \forall k \in K_\nu, \exp(\langle H_{{}_k P_J, \nu}(pk), \chi \rangle) = |\chi(p)|_\nu.$$

La fonction globale correspondante est définie par

$$\forall g \in G(\mathcal{A}_k), H_{{}_k P_J}(g) = \sum_{\nu \in M_k} H_{{}_k P_J, \nu}(g_\nu).$$

On a alors la relation (cf. [FMT, §2.3])

$$\forall \chi \in X^*(P)_k, \forall g \in G(k), H_\chi(\pi(g)) = \exp(\langle H_P(g), \chi \rangle).$$

Pour tout groupe unipotent  $U$  sur  $k$ , on normalise la mesure de Haar sur  $U(\mathcal{A}_k)$  par

$$\int_{U(k) \backslash U(\mathcal{A}_k)} du = 1.$$

Pour tout  $w \in {}_k W$ , représenté par  $w' \in \mathcal{N}_G({}_k S)(k)$  et tout  $\lambda \in \mathfrak{s}_\emptyset^\vee$ , l'intégrale d'entrelacement  $c(w, \lambda)$  est définie par

$$c(w, \lambda) = \int_{w' {}_k N(\mathcal{A}_k) w'^{-1} \cap {}_k N(\mathcal{A}_k) \backslash {}_k N(\mathcal{A}_k)} \exp(\langle H_{{}_k P}(w'^{-1}n), \lambda + \rho_{{}_k P} \rangle) dn.$$

où  ${}_k N$  désigne le radical unipotent de  ${}_k P$ . On note alors

$$C_{{}_k P_J} = \lim_{\lambda \rightarrow \rho_{{}_k P}} \prod_{\alpha \in J} \langle \check{\alpha}, \lambda - \rho_{{}_k P} \rangle c(w_J, \lambda).$$

**6.2.2. Le résultat de Franke, Manin et Tschinkel.** — En utilisant les travaux de Langlands sur les séries d'Eisenstein [Lan], Franke, Manin et Tschinkel démontrent le résultat suivant (cf. [FMT, (2.11)])

**Théorème 6.2.1 (Franke, Manin, Tschinkel).** — Avec les notations introduites dans le paragraphe 6.2.1

$$n_V(B) \sim C_{\text{FMT}}(V) B \log^{t-1} B \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

avec  $t = \text{rg Pic } V$  et

$$C_{\text{FMT}}(V) = \frac{C_G}{C_P(t-1)! \prod_{\alpha \in {}_k\Delta - I} \langle \check{\alpha}, 2\rho_P \rangle}.$$

**6.2.3. Expression de la constante en termes de la mesure de Tamagawa.** — L'objectif de cette section est la démonstration du résultat suivant

**Théorème 6.2.2.** — *Si le groupe  $G$  est quasi-déployé alors*

$$C_{\text{FMT}}(V) = C_H(V).$$

Nous commençons par décrire une métrique sur  $\omega_V^{-1}$  qui induit la hauteur  $H$ . Pour tout  $J \subset {}_k\Delta$ , pour tout  $\nu \in M_k$  la métrique  $\nu$ -adique  $\|\cdot\|_{J,\nu}$  sur  $\omega_{V_J}^{-1}$  est définie par pour toute section  $s$  de  $\omega_{V_J}^{-1}$  correspondant à une fonction  $\bar{s}$  sur  $G$

$$\forall k \in K_\nu, \|s(\pi_J(k))\|_{J,\nu} = |\bar{s}(k)|_\nu.$$

**Lemme 6.2.3.** — *Les normes  $\|\cdot\|_{I,\nu}$  définissent une métrique adélique sur  $\omega_V^{-1}$  dont  $H$  est la hauteur associée.*

*Démonstration.* — Fixons un plongement de  $G$  dans  $GL_n(k)$  et une base  $(s_1, \dots, s_q)$  de  $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$  correspondant à des éléments  $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_q$  de  $\Gamma(G, \mathcal{O}_G)$ . Par l'hypothèse que nous avons faite sur  $K$ , pour presque tout  $\nu \in M_k$ ,

$$K_\nu = G(k_\nu) \cap GL_n(\mathcal{O}_{k_\nu}).$$

En outre,  $\omega_V^{-1}$  étant très ample, pour presque tout  $\nu \in M_k$ , pour tout  $x$  appartenant à l'intersection de  $GL_n(\mathcal{O}_{k_\nu})$  et de  $G(k_\nu)$ , l'idéal fractionnaire engendré par les  $\bar{s}_i(x)$  est égal à  $\mathcal{O}_{k_\nu}$ . Si  $\nu \in M_k$  vérifie les deux conditions ci-dessus, pour tout  $p \in P(k_\nu)$ , tout  $k \in K_\nu$  et toute section  $s$  de  $\omega_V^{-1}$  correspondant à une fonction  $\bar{s}$  sur  $G$ , on a

$$\begin{aligned} \|s(\pi(pk))\|_\nu &= |\bar{s}(k)|_\nu \\ &= \frac{|\bar{s}(pk)|_\nu}{|-2\rho_P(p)|_\nu}. \end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq i \leq q} |\bar{s}_i(pk)|_\nu &= |-2\rho_P(p)|_\nu \sup_{1 \leq i \leq q} |\bar{s}_i(k)|_\nu \\ &= |-2\rho_P(p)|_\nu. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|s(\pi(pk))\|_v = \frac{|\bar{s}(pk)|_v}{\sup_{1 \leq i \leq q} |\bar{s}_i(pk)|_v}$$

ce qui montre la première assertion. La seconde est une conséquence directe des définitions.  $\square$

On se donne maintenant deux parties  $J$  et  $J'$  de  ${}_k\Delta$  telles que  $J \subset J'$ . On note  $\rho_{JJ'}$  la demi-somme des racines de  ${}_kS_J$  dans  $\mathfrak{r}_J \cap \mathbb{L}(\mathcal{Z}_G({}_kS_{J'}))$ . Notons  $V_{JJ'}$  la variété homogène  $V_{JJ'} = {}_kP_J \backslash {}_kP_{J'}$ . D'après [San, proposition 6.10], et le théorème de Rosenlicht, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow X^*({}_kP_{J'}) \xrightarrow{\text{Res}} X^*({}_kP_J) \rightarrow \text{Pic}(V_{JJ'}) \rightarrow \text{Pic}({}_kP_{J'}).$$

Ce dernier groupe étant fini on obtient un isomorphisme

$$\left( X^*({}_kP_J) / X^*({}_kP_{J'}) \right) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(V_{JJ'}) \otimes \mathbf{Q}.$$

En outre l'image de la classe de  $2\rho_{JJ'}$  par cet isomorphisme est  $\omega_{V_{JJ'}}$ . On a une fibration d'espaces homogènes pointés

$$e \rightarrow V_{JJ'} \xrightarrow{j} V_J \xrightarrow{\pi_{JJ'}} V_{J'} \rightarrow e.$$

On obtient alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Pic}(V_{J'}) \otimes \mathbf{Q} & \xrightarrow{\pi_{JJ'}^*} & \text{Pic}(V_J) \otimes \mathbf{Q} & \xrightarrow{j^*} & \text{Pic}(V_{J'}) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & X^*({}_kP_{J'}) \otimes \mathbf{Q} & \xrightarrow{\text{Res}} & X^*({}_kP_J) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \left( X^*({}_kP_J) / X^*({}_kP_{J'}) \right) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et les colonnes des isomorphismes.

**Lemme 6.2.4.** — *Avec les notations ci-dessus, on a la relation*

$$\rho_{{}_kP_J} - \text{Res}(\rho_{{}_kP_{J'}}) = \rho_{JJ'}$$

*Démonstration.* — On a un isomorphisme de  ${}_kS_J$  modules

$$\mathfrak{r}_J \cap \mathbb{L}(\mathcal{Z}_G({}_kS_{J'})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{r}_J / \mathfrak{r}_{J'}$$

Par conséquent  $2\rho_{J,J'}$  est le déterminant de la représentation de  ${}_k P_J$  sur  $\mathfrak{r}_J/\mathfrak{r}_{J'}$  induite par la représentation adjointe. Or  $2\rho_{{}_k P_J}$  est le déterminant de la représentation adjointe restreinte à  $\mathfrak{r}_J$  et  $2\text{Res}(\rho_{{}_k P_{J'}})$  celui de sa restriction à  $\mathfrak{r}_{J'}$ . La formule provient donc de la suite exacte de  ${}_k P_J$ -modules

$$0 \rightarrow \mathfrak{r}_{J'} \rightarrow \mathfrak{r}_J \rightarrow \mathfrak{r}_J/\mathfrak{r}_{J'} \rightarrow 0. \quad \square$$

Comme ci-dessus nous définissons une métrique adélique  $\|\cdot\|_{J,J'}$  sur  $\omega_{V_{J,J'}}^{-1}$  par pour toute place  $v$  de  $k$ , pour toute section  $s$  de  $\omega_{V_{J,J'}}^{-1}$  correspondant à une fonction  $\tilde{s}$  sur  ${}_k P_{J'}$ ,

$$\forall k \in K_v \cap {}_k P_{J'}(k_v), \|s({}_k P_J k)\|_{J,J',v} = |\tilde{s}(k)|_v.$$

On note  $\omega_J$ ,  $\omega_{J'}$  et  $\omega_{J,J'}$  les mesures de Tamagawa définies respectivement sur  $V_J$ ,  $V_{J'}$  et  $V_{J,J'}$  par les normes adéliques  $\|\cdot\|_J$ ,  $\|\cdot\|_{J'}$  et  $\|\cdot\|_{J,J'}$ . On note  $H_J$ ,  $H_{J'}$  et  $H_{J,J'}$  les hauteurs induites. Pour tout  $x \in V_J(\mathcal{A}_k)$  se relevant en un élément  $k \in K$ , on note  $\omega_{J,J'}^x$  la mesure sur  $V_{J,J'}(\mathcal{A}_k)k$ , vu comme sous-espace de  $V_J(\mathcal{A}_k)$ , telle que, pour tout ouvert  $U$  de  $V_{J,J'}(\mathcal{A}_k)k$ , on ait

$$\omega_{J,J'}^x(U) = \omega_{J,J'}(Uk^{-1})$$

Cela ne dépend pas du relèvement choisi. En effet la norme  $\|\cdot\|_{J,J'}$  est invariante sous l'action à droite de  $K_v \cap {}_k P_{J'}(k_v)$ . La mesure  $\omega_{J,J'}$  est donc également invariante sous cette action. La mesure  $\omega'_J$  sur  $V_J(\mathcal{A}_k)$  est alors donnée par la relation

$$\omega'_J(U) = \int_{V_{J'}(\mathcal{A}_k)} \omega_{J'} \int_{V_J(\mathcal{A}_k)x} \chi_U \omega_{J,J'}^x$$

pour tout ouvert  $U$  de  $V_J(\mathcal{A}_k)$ .

**Lemme 6.2.5.** — *Les mesures  $\omega_J$  et  $\omega'_J$  coïncident. En particulier*

$$\tau_{H_{J'}}(V_{J'}) = \tau_{H_J}(V_J) / \tau_{H_{J,J'}}(V_{J,J'}).$$

*Démonstration.* — La suite exacte de  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -modules

$$0 \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}_{J'}) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}_J) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}_{J,J'}) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow 0$$

donne pour tout  $v \in M_f - S$  la relation

$$L_v(1, \text{Pic}(\overline{V}_J)) = L_v(1, \text{Pic}(\overline{V}_{J'}))L_v(1, \text{Pic}(\overline{V}_{JJ'})).$$

Il suffit donc de montrer que les mesures locales coïncident. On fixe donc une place  $v$  de  $k$ . Pour tout  $\alpha \in {}_k\Phi$ , on pose

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in {}_kS(k), \text{Ad } t(X) = \alpha(t)X\}$$

où  $\mathfrak{g}$  désigne l'algèbre de Lie de  $G$ ;  $(\alpha)$  est l'ensemble des multiples positifs de  $\alpha$  et  $\mathfrak{g}_{(\alpha)} = \bigoplus_{\beta \in (\alpha)} \mathfrak{g}_\beta$ . L'unique  $k$ -sous-groupe connexe unipotent de  $G$  normalisé par  $\mathcal{Z}_G({}_kS)$  et ayant  $\mathfrak{g}_{(\alpha)}$  pour algèbre de Lie est noté  ${}_kU_{(\alpha)}$  (cf. [Bo, proposition 21.9]). Nous noterons  $U_J^-$  (resp.  $U_{J'}^-$ ,  $U_{JJ'}^-$ ) le sous-groupe engendré par les  ${}_kU_{(\alpha)}$  pour  $\alpha$  appartenant à  ${}_k\Phi^- - [J]$  (resp.  ${}_k\Phi^- - [J']$ ,  ${}_k\Phi^- \cap ([J'] - [J])$ ) où  ${}_k\Phi^-$  désigne l'ensemble des racines négatives. Le groupe  $U_J^- \mathcal{Z}_G({}_kS_J)$  est le  $k$ -sous-groupe parabolique opposé à  ${}_kP_J$  et  $U_J^-$  est le radical unipotent de ce groupe. D'après [Bo, proposition 14.21 (iii)], la projection  $\pi_J$  induit donc un isomorphisme de  $U_J^-$  sur un ouvert de Zariski  $W$  de  $V_J$ . Il suffit de montrer le résultat sur cet ouvert. L'application produit

$$U_{JJ'}^- \times U_{J'}^- \rightarrow U_J^-$$

est un isomorphisme. En outre,  $U_{J'}^-$  et  $U_{JJ'}^-$  sont isomorphes à des espaces affines en tant que variétés sur  $k$ . Soient  $u_{1,1}, \dots, u_{1,k}$  des coordonnées pour  $U_{JJ'}^-$  et  $u_{2,1}, \dots, u_{2,n-k}$  des coordonnées pour  $U_{J'}^-$ . Les coordonnées  $(u_{1,1}, \dots, u_{2,n-k})$  induisent des coordonnées locales sur  $V_J(k_v)$ . On notera  $u$  le morphisme correspondant de  $W$  dans  $\mathcal{A}_k^n$ . La section

$${}^t\omega(u)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial u_{1,1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u_{2,n-k}} \right)$$

de  $\omega_{V_J}^{-1}$  correspond à la fonction  $f$  sur  $\pi^{-1}(W)$  caractérisée par les relations

$$\begin{cases} \forall p \in {}_kP_J(k_v), \forall g \in G(k_v), & f(pg) = (-2\rho_{{}_kP_J})(p)f(g) \\ \forall g \in U_J^-(k_v), & f(g) = 1. \end{cases}$$

Si  $g \in U_J^-(k_\nu)$  s'écrit  $g = pk$  avec  $p \in {}_kP(k_\nu)$  et  $k \in K_\nu$  alors

$$\begin{aligned} \|\iota \omega(u)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial u_{1,1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u_{2,n-k}} \right) (\pi_J(g))\|_\nu &= |f(k)|_\nu \\ &= |-2\rho_{{}_kP_J}(p)|_\nu^{-1} \\ &= \exp(\langle H_{{}_kP_J}(g), 2\rho_{{}_kP_J} \rangle). \end{aligned}$$

La mesure  $\omega_{J,\nu}$  est donc donnée par

$$(6.2.3) \quad \omega_{J,\nu} = \exp(\langle H_{{}_kP_J}(u), 2\rho_{{}_kP_J} \rangle) du.$$

De même, sur l'image de  $U_{J'}^-(k_\nu)$  dans  $V_{J'}(k_\nu)$ , la mesure  $\omega_{J',\nu}$  s'écrit

$$(6.2.4) \quad \begin{aligned} \omega_{J',\nu} &= \exp(\langle H_{{}_kP_{J'}}(u_2), 2\rho_{{}_kP_{J'}} \rangle) du_2 \\ &= \exp(\langle H_{{}_kP_J}(u_2), 2 \operatorname{Res} \rho_{{}_kP_{J'}} \rangle) du_2 \end{aligned}$$

et sur l'image de  $U_{JJ'}^-(k_\nu)$  dans  $V_{JJ'}(k_\nu)$  on a

$$(6.2.5) \quad \omega_{JJ',\nu} = \exp(\langle H_{{}_kP_J}(u_1), 2\rho_{JJ'} \rangle) du_1.$$

Soit  $u_2 \in U_{J'}^-$ . Nous allons maintenant décrire la mesure  $\omega_{JJ'}^{\pi_{J'}(u_2)}$ . Soit  $U$  un ouvert de  $U_{JJ'}^- u_2$ . Soit  $u_2 = p_2 k_2$  une décomposition de  $u_2$  avec  $p_2 \in {}_kP_J(k_\nu)$  et  $k_2 \in K_\nu$ . Par définition on a

$$\begin{aligned} \omega_{JJ'}^{\pi_{J'}(u_2)}(U) &= \omega_{JJ'}(Uk_2^{-1}) \\ &= \omega_{JJ'}((Uu_2^{-1})p_2). \end{aligned}$$

Il nous faut donc déterminer comment l'action à droite de  ${}_kP_J$  sur  $V_{JJ'}$  agit sur  $\omega_{JJ'}$ . Soit  $x$  un élément de  ${}_kP_{J'}$  de décomposition  $x = pk$ , soit  $s$  une section de  $\omega_{V_{JJ'}}^{-1}$  correspondant à une fonction  $\bar{s}$  sur  $G$ . Soit  $\bar{s}'$  la fonction définie par

$$\forall g \in G(k_\nu), \bar{s}'(g) = \bar{s}(gp_2^{-1}).$$



Soit  $s'$  la section correspondante. Soit  $p'k'$  une décomposition de  $xp_2$  avec des éléments  $p'$  de  ${}_kP_J(k_\nu)$  et  $k'$  de  $H_\nu$ . On obtient

$$\begin{aligned}
\|s(\pi_J(x)) \cdot p_2\|_\nu &= \|s'(\pi_J(xp_2))\|_\nu \\
&= |\bar{s}'(k')|_\nu \\
&= |\bar{s}'(k'p_2^{-1})|_\nu \\
&= |(-2\rho_{JJ'})(p'^{-1}p)|_\nu \|s(\pi_J(x))\|_\nu \\
&= \exp(\langle H_{{}_kP_J}(xp_2) - H_{{}_kP_J}(x), 2\rho_{JJ'} \rangle) \|s(\pi_J(x))\|_\nu.
\end{aligned}$$

En appliquant (6.2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
&\omega_{JJ'}^{\pi_J'(u_2)}(U) \\
&= \int_{Uu_2^{-1}} \exp(\langle H_{{}_kP_J}(u_1), 2\rho_{JJ'} \rangle) \exp(\langle H_{{}_kP_J}(u_1p_2) - H_{{}_kP_J}(u_1), 2\rho_{JJ'} \rangle) du_1 \\
&= \int_{Uu_2^{-1}} \exp(\langle H_{{}_kP_J}(u_1u_2), 2\rho_{JJ'} \rangle) du_1.
\end{aligned}$$

La mesure  $\omega_J'$  s'écrit donc

$$\omega_J' = \exp(\langle H_{{}_kP_J}(u), 2 \operatorname{Res} \rho_{{}_kP_{J'}} + 2\rho_{JJ'} \rangle) du.$$

Le lemme découle de (6.2.3) et du lemme 6.2.4.  $\square$

Notre objectif est maintenant de comparer  $C_G$  à  $\tau_{H_\emptyset}(V_\emptyset)$  et  $C_P$  à  $\tau_{H_{JJ'}}(V_{\emptyset, I})$ . Pour toutes parties  $J, J'$  de  ${}_k\Delta$ , nous noterons

$$\lambda_\nu(J, J') = \begin{cases} L_\nu(1, \operatorname{Pic}(\overline{V}_{JJ'})) & \text{si } \nu \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On posera également  $\lambda_\nu(J) = \lambda_\nu(J, {}_k\Delta)$ . Si  $U$  est un groupe unipotent sur  $k_\nu$ , les mesures de Haar sur  $U(k_\nu)$  sont normalisées de sorte que

$$\int_{U(\mathcal{O}_{k_\nu})} du_\nu = 1$$

si  $v \in M_f$  et

$$\int \prod_{v \in M_\infty} U(k_v) / U(k) du_v = 1.$$

On note

$$Q_J = {}_k N \cap w_J'^{-1} {}_k N w_J' \setminus w_J'^{-1} {}_k N.$$

**Lemme 6.2.6.** — *La projection  $\pi_\emptyset$  induit un isomorphisme de  $Q_\emptyset$  sur un ouvert de Zariski  $W_\emptyset$  de  $V_\emptyset$ . Cet isomorphisme transforme la mesure  $\omega_{H_\emptyset, S}$  en la mesure*

$$\prod_{v \in M_k} \lambda_v(\emptyset) \exp(\langle H_{k^{P_\emptyset, v}}(n), 2\rho_{k^{P_\emptyset}} \rangle) dn_v.$$

*Elle induit également un isomorphisme de  $Q_I$  sur un ouvert de Zariski  $W_I$  de  $V_{\emptyset, I}$ . Cet isomorphisme transforme la mesure  $\omega_{H_{\emptyset, I}, S}$  en la mesure*

$$\prod_{v \in M_k} \lambda_v(\emptyset, I) \exp(\langle H_{k^{P_\emptyset, v}}(n), 2\rho_{k^{P_\emptyset}} \rangle) dn_v.$$

*Démonstration.* — D'après la démonstration du lemme 6.2.5  $\pi_\emptyset$  induit un isomorphisme de  $U_\emptyset$  sur un ouvert de  $V_\emptyset$ . Mais  $U_\emptyset$  est isomorphe à

$${}_k N \cap w_\emptyset'^{-1} {}_k N w_\emptyset' \setminus w_\emptyset'^{-1} {}_k N$$

ce qui démontre la première assertion du lemme. En outre cela montre que  $Q_\emptyset$  est isomorphe à un espace affine  $\mathbf{A}_k^n$ . On note  $u$  l'isomorphisme induit de  $W_\emptyset$  dans  $\mathbf{A}_k^n$ . Comme dans le lemme précédent, on montre que pour tout  $g \in w_\emptyset' {}_k N(k_v)$

$$\|{}^t \omega(u)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u_n} \right) (\pi_\emptyset(g))\|_v = \exp(\langle H_{k^{P_\emptyset, v}}(g), 2\rho_{k^{P_\emptyset}} \rangle)$$

Par ailleurs la mesure induite par l'isomorphisme de  $Q_\emptyset(k_v)$  sur  $\mathbf{A}_k^n(k_v)$  transporte la mesure de  $\mathbf{A}_k^n(k_v)$  en  $dn_v$  si  $v$  est une place finie de  $k$  et le produit des places à l'infini en  $\sqrt{d_k}^{\dim V} \prod_{v \in M_\infty} dn_v$ . Ceci démontre la seconde assertion. Les deux

dernières se démontrent de manière similaire en utilisant le fait que les fonctions

$$\exp(\langle H_{k^{P_J}}(g), 2\rho_{k^{P_\emptyset}} \rangle) \text{ et } \exp(\langle H_{k^{P_J}}(g), 2\rho_{\emptyset, I} \rangle)$$

coïncident sur l'ensemble  $w_I'^{-1} {}_k N(\mathbf{A}_k)$ .  $\square$

L'intégrale divergente  $\int_{Q_\emptyset} \exp(\langle H_{k^P_\emptyset}(n), 2\rho_{k^P_\emptyset} \rangle) dn$  et l'intégrale similaire pour  $Q_I$  peuvent donc être régularisées de deux manières différentes, soit en utilisant les facteurs de convergence  $\lambda_\nu(\emptyset)$  (resp.  $\lambda_\nu(\emptyset, I)$ ), soit en utilisant les fonctions  $s \rightarrow c(w, s\rho_{k^P})$ . Il nous faut comparer les valeurs obtenues par ces deux méthodes. Pour cela il nous faut étudier de manière plus précise les termes locaux intervenant dans  $c(w, \lambda)$ , ce qui nous amène à considérer les intégrales d'entrelacement locales.

Dans ce but nous commençons par rappeler quelques notations de la théorie des immeubles. On suppose désormais que le groupe  $G$  est quasi-déployé. Pour souligner cette hypothèse on notera  $B$  le  $k$ -sous-groupe de Borel de  $k^P$ . Soit  $T$  le normalisateur de  $k^S$ . C'est un tore maximal de  $G$ . Pour toute place finie  $\mathfrak{p}$  de  $k$ , on note  $k_{\mathfrak{p}}S$  la composante scindée de  $T_{k_{\mathfrak{p}}}$ ,  $k_{\mathfrak{p}}\Phi$  l'ensemble des racines de  $k_{\mathfrak{p}}S$  dans  $G_{k_{\mathfrak{p}}}$  et  $k_{\mathfrak{p}}W$  le groupe de Witt associé. L'appartenance associée au triplet  $(G, k_{\mathfrak{p}}S, k_{\mathfrak{p}})$  sera noté  $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ . Le groupe de Weyl du système de racines affines est noté  $k_{\mathfrak{p}}W_{\text{aff}}$ . D'après [Tit, §3.9.1], pour presque tout  $\mathfrak{p} \in M_f$  le groupe  $K_{\mathfrak{p}}$  est le stabilisateur d'un point  $x_{\mathfrak{p}}$  de  $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ . Soit  $k_{\mathfrak{p}}\Phi_0$  le système de racines réduit dont  $k_{\mathfrak{p}}W_{\text{aff}}$  est le groupe de Weyl affine. Le choix de  $x_{\mathfrak{p}}$  permet d'identifier  $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$  à l'espace vectoriel associé qui est donné par

$$V_{\mathfrak{p}} = \text{Hom}(X^*(\mathcal{L}_G(k_{\mathfrak{p}}S))_{k_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{R}) = \text{Hom}(X^*(T)_{k_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{R}).$$

Comme  $X^*(T)_{k_{\mathfrak{p}}}$  est égal à  $X^*(k_{\mathfrak{p}}S)$ , on a un plongement de  $X^*(k_{\mathfrak{p}}S)$  dans le dual de  $V_{\mathfrak{p}}$ . On identifie  $k_{\mathfrak{p}}\Phi$  avec son image par ce plongement. Toute racine de  $k_{\mathfrak{p}}\Phi$  est proportionnelle à une unique racine de  $k_{\mathfrak{p}}\Phi_0$ . Pour toute racine affine  $\alpha$ , on note  $k_{\mathfrak{p}}N$  le radical unipotent de  $k_{\mathfrak{p}}P$  et

$$N(\alpha) = \{n \in k_{\mathfrak{p}}N(k_{\mathfrak{p}}) \mid \forall x \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}, \alpha(x) \geq 0 \Rightarrow nx = x\}.$$

On définit  $q_{\alpha} = [N(\alpha - 1) : N(\alpha)]$ . Comme dans [Mac] ou [Cas], on définit  $k_{\mathfrak{p}}\Phi_1$  comme la réunion de  $k_{\mathfrak{p}}\Phi_0$  et de

$$\left\{ \frac{\alpha}{2}, \alpha \in k_{\mathfrak{p}}\Phi_0 \mid q_{\alpha} \neq q_{\alpha+1} \right\}.$$

Nous noterons  $k_{\mathfrak{p}}\tilde{\Phi}$  le système obtenu à partir de  $k_{\mathfrak{p}}\Phi$  en retirant les racines telles que  $2\alpha$  appartient à  $k_{\mathfrak{p}}\Phi$ .

Pour tout  $\mathfrak{p} \in M_f$ , on note  $\rho_{B_{k_{\mathfrak{p}}}}$  la demi-somme des racines positives comptées avec multiplicités et

$$\begin{aligned} \chi_{\mathfrak{p}} : T(k_{\mathfrak{p}}) &\rightarrow \mathbf{C}^* \\ m &\mapsto |2\rho_{B_{k_{\mathfrak{p}}}}(m)|_{\mathfrak{p}}^{1/2}. \end{aligned}$$

Soit  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\Delta$  la base de  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi$  correspondant à  $B_{k_{\mathfrak{p}}}$ . Soit  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}I \subset {}_{k_{\mathfrak{p}}}\Delta$  la partie de  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\Delta$  correspondant à  $P_{k_{\mathfrak{p}}}$ . Comme précédemment, si  $J \subset {}_{k_{\mathfrak{p}}}\Delta$ , on note  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}W_J$  le sous-groupe de  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}W$  engendré par les symétries  $s_{\alpha}$  pour  $\alpha \in J$  et  $w_J$  le plus long élément de  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}W_J$ . Pour tout caractère régulier  $\chi \in \text{Hom}(T(k_{\mathfrak{p}}), \mathbf{C}^*)$  et tout  $w \in {}_{k_{\mathfrak{p}}}W$ ,  $c_{\mathfrak{p}}(w, \chi)$  est l'intégrale d'entrelacement locale (cf. [Cas, theorem 3.11]).

**Lemme 6.2.7.** — *Si le groupe  $G$  est quasi-déployé, pour presque toute place finie  $\mathfrak{p}$  de  $k$ , le terme local de  $c(w_{k_{\Delta}}, s\rho_B)$  à savoir l'intégrale*

$$\int_{w'_{k_{\Delta}}k^N(k_{\mathfrak{p}})w'_{k_{\Delta}}{}^{-1} \cap k^N(k_{\mathfrak{p}}) \backslash k^N(k_{\mathfrak{p}})} \exp(\langle H_{B,\mathfrak{p}}(w'_{k_{\Delta}}{}^{-1}n), (s+1)\rho_B \rangle) dn_{\mathfrak{p}}$$

est égale à

$$c_{\mathfrak{p}}(w_{k_{\mathfrak{p}}\Delta}, \chi_{\mathfrak{p}}^s).$$

Un résultat analogue vaut pour  $c(w_I, s\rho_B)$ .

*Démonstration.* — D'après [Cas, theorem 3.1] et [Car, §3.7 (32)], pour tout caractère  $\chi \in X^*({}_{k_{\mathfrak{p}}}S)$  tel que la composée  $|\cdot|_{\mathfrak{p}} \circ \chi$  soit régulière, on a

$$c_{\mathfrak{p}}(w, |\cdot|_{\mathfrak{p}} \circ \chi) = \int_{w'_{k_{\mathfrak{p}}}N(k_{\mathfrak{p}})w'{}^{-1} \cap {}_{k_{\mathfrak{p}}}N(k_{\mathfrak{p}}) \backslash {}_{k_{\mathfrak{p}}}N(k_{\mathfrak{p}})} \exp(\langle H_{B,\mathfrak{p}}(w'{}^{-1}n), \chi + \rho_B \rangle) dn_{\mathfrak{p}}.$$

où  $w'$  est un relevé de  $w$  dans  $\mathcal{N}_G({}_{k_{\mathfrak{p}}}S)(k_{\mathfrak{p}}) \cap K_{\mathfrak{p}}$ . La formule résulte alors du fait que  $w'_{k_{\Delta}}$  représente  $w_{k_{\mathfrak{p}}\Delta}$  puisque  $G$  est quasi-déployé et appartient à  $K_{\mathfrak{p}}$  pour presque toute place finie de  $k$ . La démonstration de la seconde assertion est analogue.  $\square$

**Lemme 6.2.8.** — *Pour presque tout  $\mathfrak{p} \in M_f$ , les systèmes de racines  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\tilde{\Phi}$  et  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi_0$  coïncident. Si  $\alpha$  est une racine de  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\tilde{\Phi}$  telle que  $1/2\alpha \notin {}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi$  et telle que l'espace propre correspondant  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  est de dimension un, alors  $1/2\alpha \notin {}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi_1$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{p} \in M_f$  une place telle que  $K_{\mathfrak{p}}$  soit le stabilisateur d'un point hyperspécial de  $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$  et telle que  $G_{k_{\mathfrak{p}}}$  se déploie sur une extension non ramifiée. Nous allons tout d'abord montrer la première assertion. Pour cela il suffit de démontrer que les groupes de Weyl affines correspondants sont identiques. Par définition, le groupe de Weyl affine de  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi_0$  est  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}W_{\text{aff}}$ . Soit

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}} : T(k_{\mathfrak{p}}) &\rightarrow V_{\mathfrak{p}} \\ m &\mapsto \left( \chi \mapsto \nu_{\mathfrak{p}}(\chi(m)) \right). \end{aligned}$$

le noyau de  $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$  est noté  $T_{k_{\mathfrak{p}}}^0$ . Le groupe  $G$  étant semi-simple et simplement connexe

$${}_{k_{\mathfrak{p}}}W_{\text{aff}} = \mathcal{N}_G({}_{k_{\mathfrak{p}}}S)(k_{\mathfrak{p}})/T_{k_{\mathfrak{p}}}^0$$

(cf. [Tit, §1.13]). Par [Tit, §1.3]

$$\text{Im } \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}} = \text{Hom}(X^*({}_{k_{\mathfrak{p}}}S)_{k_{\mathfrak{p}}}, \mathbf{Z})$$

puisque  $G$  se déploie sur une extension non ramifiée. Comme  $G$  est simplement connexe  $X^*({}_{k_{\mathfrak{p}}}S)_{k_{\mathfrak{p}}}$  est le réseau des poids  $P({}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi)$  de  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi$ . Son dual est donc le réseau engendré par  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\tilde{\Phi}^{\vee}$ , noté  $Q({}_{k_{\mathfrak{p}}}\tilde{\Phi}^{\vee})$ . On obtient donc que  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}W_{\text{aff}}$  est le produit semi-direct

$$Q({}_{k_{\mathfrak{p}}}\tilde{\Phi}^{\vee}) \rtimes ({}_{k_{\mathfrak{p}}}W_{\text{aff}})_{x_{\mathfrak{p}}}.$$

Mais comme  $x_{\mathfrak{p}}$  est spécial,  $({}_{k_{\mathfrak{p}}}W_{\text{aff}})_{x_{\mathfrak{p}}}$  coïncide avec le groupe de Weyl de  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi$ . Par [Bki, §VI.2.1, proposition 1], le groupe  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}W_{\text{aff}}$  est le groupe de Weyl affine de  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\tilde{\Phi}$ .

Soient  $\mathfrak{p}$  et  $\alpha$  vérifiant les hypothèses de la seconde assertion du lemme. Alors  $U_{\alpha}(k_{\mathfrak{p}})$  est isomorphe en tant que groupe à  $\mathbf{G}_{\alpha}(k_{\mathfrak{p}})$  et  $q_{\alpha} = q_{\alpha+1} = N(\mathfrak{p})$ .  $\square$

Soit  $k'$  une extension de Galois de  $k$  déployant le groupe  $G$ . Soit  ${}_{k'}\Delta$  la base du système de racines  ${}_{k'}\Phi$  de  $T_{k'}$  dans  $G_{k'}$  correspondant à  $B_{k'}$ . Soit  ${}_{k'}I$  la partie de  ${}_{k'}\Delta$  correspondant à  $P_{k'}$ . La base du réseau des poids est notée  $(\tilde{\omega}_{\alpha})_{\alpha \in {}_{k'}\Phi}$ .

**Lemme 6.2.9.** — *Si  $G$  est quasi-déployé et  $J$  est une partie de  ${}_{k'}\Delta$ , alors une base de  $\text{Pic}(V_J \times k')$  est donnée par les éléments  $\tilde{\omega}_{\alpha}$  pour  $\alpha \in {}_{k'}\Delta - J$ . L'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(k'/k)$  sur  $\text{Pic}(V_J \times k')$  est celle induite par l'action naturelle sur cette base et le cône des classes de diviseur effectifs est le cône  $\sum_{\alpha \in {}_{k'}\Phi - J} \mathbf{R}^+(-\tilde{\omega}_{\alpha})$ .*

*Démonstration.* — Comme  $G$  est simplement connexe,  $X^*(T_{k'})$  est le réseau des poids. Il en est donc de même de  $X^*(B_{k'})$  ce qui montre les deux premières assertions du lemme pour  $V_\emptyset$ . Par la décomposition de Bruhat,  $G$  est la réunion disjointe des  $C(w) = BwB$  pour  $w \in {}_{k'}W$ . On a également des isomorphismes (cf. [Bo, theorem 14.12])

$$(6.2.6) \quad \begin{aligned} B \times U'_w &\xrightarrow{\sim} BwB \\ (b, u) &\mapsto bwu \end{aligned}$$

où  $U'_w$  est le sous-groupe de  $G_k$  engendré par les sous-groupes  $U_\gamma$  pour

$$\gamma \in \{\delta \in {}_{k'}\Phi \mid \delta > 0 \text{ et } w\delta < 0\}.$$

Si  $J \subset {}_{k'}\Delta$ ,  ${}_{k'}W^J$  désigne l'ensemble des uniques éléments de longueur minimale dans les classes  $W_J w \subset {}_{k'}W$ . D'après [Bo], theorem 21.29, les  $\pi_J(C(w))$  pour  $w \in {}_{k'}W^J$  forment une décomposition cellulaire de  $V_J \times k'$  et l'isomorphisme (6.2.6) fournit un isomorphisme

$$U'_w \xrightarrow{\sim} \pi_J(C(w))$$

pour tout  $w \in {}_{k'}W^J$ . On obtient donc que

$$\begin{aligned} \dim\left(\pi_J(C(w))\right) &= \dim(U'_w) \\ &= \#\{\gamma \in {}_{k'}\Phi \mid \delta > 0 \text{ et } w\delta < 0\} \\ &= l(w) \end{aligned}$$

où la dernière égalité est donnée par [Bki, §VI 1.1.6 corollaire 2]. Par [Fu], exemple 1.9.1 on en déduit que le groupe de Chow  $\text{CH}_i(V_J)$  est engendré par les classes  $\overline{[\pi_J(C(w))]}$  pour  $w \in {}_{k'}W^J$  avec  $l(w) = i$ . En particulier  $\text{CH}_1(V_\emptyset \times k')$  est engendré par les éléments  $\overline{[\pi_\emptyset(C(s_\alpha))]}$  pour  $\alpha \in {}_{k'}\Delta$  et  $\text{Pic}(V_\emptyset \times k')$  par les éléments  $\overline{[\pi_\emptyset(C(s_\alpha w_{k'}\Delta))]}$ . La fonction définie par

$$\forall b \in B(k'), \forall u \in U(k'), f(bw'_{k'}\Delta u) = \varpi_\alpha(b)^{-1}$$

s'étend en une fonction sur  $G$  et induit une section du faisceau inversible associé. Elle s'annule sur  $Bs_\alpha w_{k'}\Delta B$ . On en déduit que la base du lemme correspond au système générateur ci-dessus. En particulier les images des poids fondamentaux sont les opposés de classes de diviseurs effectifs. Par ailleurs, pour tout  $\alpha \in {}_{k'}\Delta$ ,  $\overline{[\pi_\emptyset(C(s_\alpha))]}$  est isomorphe à  $\mathbf{P}^1$  et si  $\chi \in X^*(B)_k$ , alors  $\mathcal{L}_\chi$  induit le faisceau  $\mathcal{O}(<$

$\check{\alpha}, \chi \rangle$  sur  $\overline{\pi_{\emptyset}(C(s_{\alpha}))}$  ce qui montre l'inclusion inverse. Soit  ${}_{k'}W^J(1)$  le sous-ensemble des éléments de longueur  $\dim(V_J) - 1$  dans  ${}_{k'}W^J$ . D'après [Bki, Chap. IV §1 exercice 3], pour tout  $w \in {}_{k'}W^J(1)$ ,

$$\begin{aligned} l(w_J w) &= l(w_J) + l(w) \\ &= \dim(V_{\emptyset, J}) + \dim(V_J) - 1 \\ &= \dim(V_{\emptyset}) - 1 \end{aligned}$$

et d'après [Bo, §14.21]

$$\pi_{\emptyset, J}(\pi_{\emptyset}(C(w_J w))) = \pi_{\emptyset, J}(\pi_{\emptyset}(C(w))).$$

Par conséquent une base de  $\text{Pic}(V_J \times k')$  est donnée par les éléments  $\omega_{\alpha}$  pour  $\alpha \in {}_{k'}\Delta - J$ . Les autres assertions pour  $V_J$  résultent de leurs analogues pour  $V_{\emptyset}$ .  $\square$

**Lemme 6.2.10.** — *Si  $G$  est quasi-déployé, le produit*

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \overline{V}_{\emptyset}) c_{\mathfrak{p}}(w_{k_{\mathfrak{p}} \Delta}, \chi_{\mathfrak{p}}^s)$$

*converge absolument au voisinage de 1. Un résultat analogue vaut pour  $\overline{V}_{\emptyset, I}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{p} \in M_f - S$ . Pour tout  $\alpha \in {}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi_0$ ,  $a_{\alpha}$  désigne un élément de  $T_{k_{\mathfrak{p}}}$  tel que  $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$  est la coracine  $\check{\alpha}$ . D'après [Car, theorem 3.9],

$$c_{\mathfrak{p}}(w, \chi) = \prod_{\substack{\alpha \in {}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi_0 \\ \alpha > 0 \text{ et } w\alpha < 0}} c_{\mathfrak{p}}(\alpha, \chi)$$

avec

$$c_{\mathfrak{p}}(\alpha) = \frac{(1 - q_{\frac{\alpha}{2}}^{-1/2} q_{\alpha}^{-1} \chi(a_{\alpha})) (1 + q_{\frac{\alpha}{2}}^{-1/2} \chi(a_{\alpha}))}{1 - \chi(a_{\alpha})^2}$$

où  $q_{\frac{\alpha}{2}} = q_{\alpha+1}/q_{\alpha}$  et vaut 1 si  $\frac{\alpha}{2} \notin {}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi_1$ . Pour presque tout  $\mathfrak{p} \in M_f$  le point  $x_{\mathfrak{p}}$  correspondant à  $K_{\mathfrak{p}}$  est hyperspécial et, par le lemme 6.2.8,  ${}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi_0 = {}_{k_{\mathfrak{p}}}\tilde{\Phi}$ . Si  $\mathfrak{p}$  vérifie ces deux conditions, alors

$$\forall \alpha \in {}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi_0, \chi_{\mathfrak{p}}^s(a_{\alpha}) = N(\mathfrak{p})^{-s \langle \check{\alpha}, \rho_B k_{\mathfrak{p}} \rangle}$$

et  $q_{\frac{\alpha}{2}} \geq 1$ . En outre

$$\{\alpha \in {}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi \mid \alpha > 0 \text{ et } w_{k_{\mathfrak{p}} \Delta} \alpha < 0\} = {}_{k_{\mathfrak{p}}}\Phi^+.$$

Il suffit donc de montrer que le produit

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} \frac{L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \overline{V}_{\emptyset})}{\prod_{\alpha \in \{k_{\mathfrak{p}} \Delta \mid \dim \mathfrak{g}(\alpha) = 1\}} (1 - N(\mathfrak{p})^s)}$$

converge au voisinage de 1. Pour tout  $\mathfrak{p} \in M_f - S$  tel que  $k'$  soit contenu dans une extension non ramifiée maximale  $k_{\mathfrak{p}}^{\text{nr}}$  de  $k_{\mathfrak{p}}$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(k_{\mathfrak{p}}^{\text{nr}}/k_{\mathfrak{p}})$  qui est isomorphe à  $\hat{Z}$  conserve la base de  $\text{Pic } V_{\emptyset} \times k'$  et l'orbite d'un élément de  $k'/\Delta$  est réduite à cet élément si et seulement si  $\dim \mathfrak{g}_{(j(\alpha))} = 1$  où  $j: k'/\Delta \rightarrow k_{\mathfrak{p}} \Delta$  est l'application naturelle. La première assertion du lemme s'en déduit. La seconde se démontre de même.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que les deux méthodes de régularisation donnent le même résultat ce qui fournit le lemme suivant

**Lemme 6.2.11.** — *Si le groupe  $G$  est quasi-déployé, on a les égalités*

$$C_G = \prod_{\alpha \in_k \Delta} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg Pic } V_{\emptyset}} L_S(s, \text{Pic } \overline{V}_{\emptyset}) \omega_{\emptyset}(V_{\emptyset}(\mathcal{A}_k))$$

et

$$C_P = \prod_{\alpha \in I} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg Pic } V_{\emptyset, I}} L_S(s, \text{Pic } \overline{V}_{\emptyset, I}) \omega_{\emptyset, I}(V_{\emptyset, I}(\mathcal{A}_k)).$$

*Démonstration.* — Par définition, on a

$$\begin{aligned} C_G &= \lim_{\lambda \rightarrow \rho_B} \prod_{\alpha \in_k \Delta} \langle \check{\alpha}, \lambda - \rho_B \rangle c(w_{k\Delta}, \lambda) \\ &= \prod_{\alpha \in_k \Delta} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{\text{rg Pic } V_{\emptyset}} \int_{Q_{\emptyset}(\mathcal{A}_k)} \exp(\langle H_B(n), \rho_B \rangle)^{s+1} dn \\ &= \prod_{\alpha \in_k \Delta} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \lim_{s \rightarrow 1} \left[ (s-1)^{\text{rg Pic } V_{\emptyset}} L_S(s, \text{Pic } \overline{V}_{\emptyset}) \right. \\ &\quad \left. \int_{Q_{\emptyset}(\mathcal{A}_k)} \left( \prod_{v \in M_k} \lambda_v(s)^{-1} \right) \exp(\langle H_B(n), \rho_B \rangle)^{s+1} dn \right] \end{aligned}$$

où

$$\lambda_v(s) = \begin{cases} L_v(s, \text{Pic } \overline{V}_{\emptyset}) & \text{si } v \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Grâce aux lemmes 6.2.7 and 6.2.10, on obtient

$$C_G = \prod_{\alpha \in {}_k\Delta} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \lim_{s \rightarrow 1} \left( (s-1)^{\text{rg Pic } V_\emptyset} L_S(s, \text{Pic } \overline{V}_\emptyset) \right) \\ \int_{\mathcal{Q}_\emptyset(\mathcal{A}_k)} \left( \prod_{\nu \in M_k} \lambda_\nu(1)^{-1} \right) \exp(\langle H_B(n), \rho_B \rangle)^2 dn.$$

La première assertion s'en déduit à l'aide du lemme 6.2.6. On démontre de façon semblable la seconde assertion.  $\square$

**Lemme 6.2.12.** — *Si  $G$  est quasi-déployé alors*

$$\alpha_c(V) = \prod_{\alpha \in {}_k\Delta-I} \frac{\langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle}{(t-1)! \prod_{\alpha \in {}_k\Delta-I} \langle \check{\alpha}, 2\rho_P \rangle}.$$

*Démonstration.* — Par le lemme 6.2.9, le groupe  $\text{Pic}(\overline{V}_J)^{\text{Gal}(\overline{k}/k)}$  a pour base

$$\left( \sum_{j(\beta)=\alpha} \overline{\omega}_\beta \right)_{\alpha \in {}_k\Delta-J}.$$

Or on a des isomorphismes

$$\text{Pic}(V_J) \xrightarrow{\sim} X^*(P_J)_k \xrightarrow{\sim} X^*(P_J)_{\overline{k}}^{\text{Gal}(\overline{k}/k)} \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(\overline{V}_J)^{\text{Gal}(\overline{k}/k)}.$$

Donc les éléments ci-dessus forment également une base de  $\text{Pic } V_J$ . Sur la base obtenue pour  $\text{Pic } V_\emptyset$ ,  $\rho_B$  s'écrit comme  $\sum_{\beta \in {}_{k'}\Delta} \overline{\omega}_\beta$ . Une base de  $\text{Pic}(V_I)^\vee$  est donc

donnée par les éléments  $\frac{\check{\alpha}}{\langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle}$ . Or le cône des classes de diviseurs effectifs est donné par

$$C_{\text{eff}}(V_I) = \sum_{\alpha \in {}_k\Delta-I} \mathbf{R}^+ \sum_{j(\beta)=\alpha} -\overline{\omega}_\beta$$

Le domaine  $C_{\text{eff}}^\vee(V_I) \cap \mathcal{H}_{\omega_V}^{-1}(1)$  a donc pour équations

$$\begin{cases} x_\alpha < 0 \text{ pour } \alpha \in {}_k\Delta-I \\ \sum_{\alpha \in {}_k\Delta-I} \frac{\langle \check{\alpha}, -2\rho_P \rangle}{\langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle} x_\alpha = 1 \end{cases}$$

ce qui donne la formule du lemme.  $\square$

*Démonstration du théorème 6.2.2.* — D'après le lemme 6.2.11, on a

$$\frac{C_G}{C_P} = \prod_{\alpha \in_k \Delta} \langle \check{\alpha}, \rho_B \rangle \tau_H(V(\mathcal{A}_k)).$$

Donc le lemme 6.2.12 montre que

$$C_{\text{FMT}}(V) = \alpha_c(V) \tau_H(V(\mathcal{A}_k)). \quad \square$$

#### 6.2.4. Vérification de la conjecture raffinée

**Proposition 6.2.13.** — *Si  $G$  est quasi-déployé, pour tout bon ouvert  $W$  de  $V(\mathcal{A}_k)$*

$$\begin{aligned} \frac{n_{H,W}(B)}{n_U(B)} &\rightarrow \frac{\omega_{H,S}(W)}{\omega_{H,S}(V(\mathcal{A}_k))} \\ B &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Soit  $S'$  un sous-ensemble fini de  $M_k$  et pour tout  $\nu \in S'$ , soit  $\phi_\nu$  une application continue et  $K_\nu$ -finie sur le quotient  $K_\nu \cap P(k_\nu) \backslash K_\nu$  (i.e. telle que l'espace vectoriel engendré par l'orbite de  $\phi_\nu$  sous l'action de  $K_\nu$  soit de dimension finie.) On étend  $\phi_\nu$  à  $G(k_\nu)$  à l'aide de la décomposition d'Iwasawa et on note  $\phi = \prod_{\nu \in S'} \phi_\nu$ . La remarque 10.b dans [FMT] qui est une conséquence des travaux de Langlands (cf. notamment [Lan] appendice II) et la démonstration du théorème 6.2.2 impliquent que

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\{x \in V(k) \mid H(x) \leq B\}} \phi(x)}{n_V(B)} = \frac{\int \phi \omega_{H,S}}{\omega_{H,S}(\overline{V(k)})}.$$

Or toute fonction continue  $f_\nu$  sur  $V(k_\nu)$  est limite uniforme de telles fonctions  $\phi_\nu$ . Par conséquent, on a une limite analogue si on remplace  $\phi$  par une fonction  $f$  de la forme  $\prod_{\nu \in S'} f_\nu$  où  $f_\nu$  est une fonction continue sur  $V(k_\nu)$ . La fin de la démonstration de l'assertion (b) est semblable à celle de l'assertion (d) de la proposition 5.0.1.  $\square$

Ceci donne en particulier une nouvelle démonstration de l'approximation faible pour ces variétés (cf. [Bor]).

**Corollaire 6.2.14.** — *Si  $G$  est quasi-déployé,  $V$  vérifie l'approximation faible.*

*Démonstration.* — Pour tout  $\nu \in M_k$ ,  $V(k_\nu)$  est lisse et pour tout  $P \in V(\mathcal{A}_k)$ ,  $P$  possède une base de voisinage constituée de bons ouverts de volume non nul pour  $\omega_{H,S}$ .  $\square$

**Corollaire 6.2.15.** — Si  $G$  est quasi-déployé,

$$C_H(V) = C_{\text{FMT}}(V)$$

et  $V$  vérifie la propriété  $(E_V)$ .

**Corollaire 6.2.16.** — Si  $V = P \backslash G$  est une variété de drapeaux généralisée pour un groupe semi-simple quasi-déployé  $G$  et un sous-groupe parabolique  $P$  défini sur  $k$  et si  $H$  est une hauteur quelconque, relative au faisceau  $\omega_V^{-1}$ , alors

$$n_V(B) \sim C_H(V) B \log^{t-1} B \text{ quand } B \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* — Cela résulte du corollaire précédent et de l’assertion (c) de la proposition 5.0.1.  $\square$

## 7. Généralités sur les éclatements

**7.1. Domaine fondamental pour l’action des unités.** — Soit  $V$  une variété de Fano obtenue en éclatant des sous-variétés de  $\mathbf{P}_k^n$ . On suppose que  $\omega_V^{-1}$  est très ample. Soit  $U$  le complémentaire dans  $V$  des sous-variétés accumulatrices. Soit  $\pi : V \rightarrow \mathbf{P}_k^n$  la projection canonique. Quitte à restreindre  $U$  on peut supposer que  $\pi(U) \xrightarrow{\sim} U$ . On identifiera  $U$  avec son image. Comme dans la section 4.1, l’objectif est de se ramener de l’espace projectif à l’espace affine en utilisant un système de représentants. La méthode utilisée ici s’inspire également de celle introduite dans [Sc]. Une base de  $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$  est donnée par des polynômes homogènes de degré  $n+1$ ,  $P_i \in k[X_0, \dots, X_n]$  pour  $1 \leq i \leq q$ . Pour tout  $v \in M_k$ , on note

$$H_v(x_0, \dots, x_n) = \sup_{1 \leq i \leq q} |P_i(x_0, \dots, x_n)|_v.$$

La hauteur associée à la base choisie est donnée par

$$\forall (x_0 : \dots : x_n) \in U(k), H(x_0 : \dots : x_n) = \prod_{v \in M_k} H_v(x_0, \dots, x_n).$$

L’objectif est donc de se ramener de  $U(k)$  à  $W(k)$  cône au-dessus de  $U(k)$ . On fixe un idéal  $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$ . On veut donc déterminer

$$N_{\mathfrak{a}}(B) = \# \mathcal{N}_{\mathfrak{a}}(B)$$

où  $\mathcal{N}_\alpha(B)$  désigne l'ensemble des  $(n+1)$ -uplets  $(\bar{x}_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{O}_k^{n+1}/U_k$  possédant un représentant  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  qui vérifie

$$(7.1.1) \quad (x_i, 0 \leq i \leq n) = \alpha$$

$$(7.1.2) \quad H(x) \leq B$$

$$(7.1.3) \quad x \in W(k).$$

Pour cela on introduit comme dans la section 4.1 l'application  $\log_H$  définie par

$$\begin{aligned} \log_H: \prod_{v \in M_\infty} W(k_v) &\rightarrow \mathbf{R}^{r_1+r_2} \\ (u_v)_{v \in M_\infty} &\mapsto \left( \log(H_v(u_v)) \right)_{v \in M_\infty}. \end{aligned}$$

On considère également la composée des applications canoniques

$$U_k \rightarrow \prod_{v \in M_\infty} k_v^* \xrightarrow{\log} \mathbf{R}^{M_\infty} \xrightarrow{\times(n+1)} \mathbf{R}^{M_\infty}.$$

Par le théorème des unités c'est un homomorphisme dont le noyau est le groupe  $\mu_\infty(k)$  des racines de l'unité dans  $k$  et l'image un réseau  $L$  de rang  $r$  dans l'hyperplan  $P$  défini par  $\sum_{v \in M_\infty} y_v = 0$ . En outre,  $\text{Det } L = (n+1)^r R$ . Cet homomorphisme

définit une action de  $U_k$  sur  $\mathbf{R}^{M_\infty}$ . L'application  $\log_H$  est compatible avec les actions de  $U_k$  ainsi définies. Comme dans la section 4.1, on note par la projection sur  $P$  suivant  $(N_v)_{v \in M_\infty}$  et on choisit  $u_1, \dots, u_r$  une base de  $L$ . On pose

$$F = \{y \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} \mid 0 \leq u_j^\vee(\text{pr}(y)) < 1\}$$

et

$$\Delta_H = \log_H^{-1}(F) \subset \prod_{v \in M_\infty} W(k_v).$$

**Lemme 7.1.1 (Schanuel [Sc]).** — L'ensemble  $\Delta_H$  vérifie

- (i)  $\Delta_H$  est stable sous  $\mu_\infty(k)$ ,
- (ii)  $\forall u \in U_k - \mu_\infty(k), \quad u\Delta_H \cap \Delta_H = \emptyset,$
- (iii)  $\bigcup_{u \in U_k} u\Delta_H = \prod_{v \in M_\infty} W(k_v).$

On en déduit comme dans [Sc] le lemme suivant

**Lemme 7.1.2.** — En notant  $j : W(k) \rightarrow \prod_{v \in M_\infty} W(k_v)$  l'injection canonique,

$$wN_\alpha(B) = \#\mathcal{N}'_\alpha(B)$$

où  $\mathcal{N}'_\alpha(B)$  désigne l'ensemble des  $x \in \mathcal{O}_k^{n+1}$  vérifiant les conditions (7.1.1), (7.1.2) et (7.1.3) ci-dessus, ainsi que

$$(7.1.4) \quad j(x) \in \Delta_H.$$

**7.2. Volume du domaine fondamental.** — A tout  $x \in \Delta_H$ , on associe

$$H_\infty(x) = \prod_{v \in M_\infty} H_v(x_v).$$

Soit

$$\mathcal{D}_B = \{x \in \Delta_H \mid H_\infty(x) \leq B\}.$$

Comme nous le verrons un peu plus loin, le volume de  $\mathcal{D}_B$  intervient dans l'estimation du cardinal  $\mathcal{N}'_\alpha(B)$ . Or la démonstration du lemme 4.2.5 implique le lemme suivant

**Lemme 7.2.1.** —

$$\text{Vol } \mathcal{D}_B = B \frac{\sqrt{d}w}{(n+1)h2^{(n+1)r_2}} \lim_{s \rightarrow 1} \zeta_k(s)(s-1) \prod_{v \in M_\infty} \omega_v(V(k_v)).$$

## 8. Cas de l'éclatement de $\mathbf{P}_k^2$ en trois points rationnels et de ses analogues en dimension supérieure

Sauf indication du contraire, on se place sur un corps de nombres  $k$  arbitraire.

**8.1. Construction de la hauteur et sous-variétés accumulatrices.** — On fixe un entier  $n \geq 2$ . Pour tout  $m \in 1, \dots, n$ , on note  $F_m$  l'ensemble des parties à  $m$  éléments de  $\{0, \dots, n+1\}$ . On pose  $F' = \bigcup_{m=2}^n F_m$  et  $F = F_1 \cup F'$ . Pour toute partie  $I \in F$  on note  $P_I$  le sous-espace de  $\mathbf{P}_k^n$  défini par les équations  $X_i = 0$  pour  $i \in I$ . La lettre  $V$  désigne ici la variété torique obtenue en éclatant successivement pour  $m$  variant de  $n$  à 2 les relevés stricts des sous-espaces  $P_I$  pour  $I \in F_m$ . Pour tout  $I \in F'$ , on note  $L_I$  la sous-variété de  $V$  au-dessus de  $P_I$ . On notera  $L_{\{i\}}$  ou  $L_i$  le relevé strict de l'hyperplan  $P_{\{i\}}$ . On note  $\pi : V \rightarrow \mathbf{P}_k^n$  la projection canonique et

$$U = V - \bigcup_{I \in F} L_I$$

que l'on identifiera avec son image par  $\pi$ . Une base de  $\text{Pic } \mathcal{V} = \text{Pic } \overline{\mathcal{V}}$  est donnée par  $\Lambda = \pi^*(H)$  où  $H$  est un hyperplan ne contenant aucun des sous-espaces  $P_I$  et les diviseurs  $L_I$  pour  $I \in F'$ . On a en outre la relation

$$[L_i] = [\Lambda] - \sum_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} [L_I].$$

D'après [Ha, exercice II.8.5], un diviseur canonique de  $\mathcal{V}$  est donné par

$$K = \sum_{I \in F} (\#I - 1)L_I - (n + 1)\Lambda.$$

Donc

$$\omega_{\mathcal{V}}^{-1} = (n + 1)[\Lambda] - \sum_{I \in F} (\#I - 1)[L_I] = \sum_{I \in F} [L_I].$$

Dans ce cas  $\omega_{\mathcal{V}}^{-1}$  n'est pas ample si  $n \geq 3$ . Toutefois le système linéaire correspondant est sans point base et définit un morphisme de  $\mathcal{V}$  dans un espace projectif qui est injectif sur un ouvert dont le complémentaire est de codimension deux. Les définitions se généralisent sans difficulté à ce cas. Une base de  $\Gamma(\mathcal{V}, \omega_{\mathcal{V}}^{-1})$  est donnée par les monomômes de degré  $n + 1$

$$X^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^n X_i^{k_i}$$

où au plus un des  $k_i$  est nul. On notera  $T_n$  l'ensemble de ces monômes. Sur  $U$  la hauteur correspondant à cette base est donnée par

$$H((x_0 : \dots : x_n)) = \prod_{v \in M_k} \sup_{Y \in T_n} |Y(x)|_v.$$

Les sections 8.2 à 8.5 ont pour objet la démonstration de l'équivalence

$$n_U(B) \sim C_H(\mathcal{V}) B \log^{t-1} B.$$

Le lemme suivant montre donc que les sous-variétés  $L_I$  sont effectivement accumulatrices.

**Lemme 8.1.1.** — *Pour tout  $I \in F$ , pour tout ouvert non vide  $U_I$  de  $L_I$*

$$\beta_{U_I} > 1.$$

*Démonstration.* — Soit  $I \in F'$ . Soit  $W$  l'ouvert  $V - \bigcup_{J \neq I} L_J$ . Cet ouvert est isomorphe à un ouvert de l'éclaté de  $\mathbf{P}_k^n$  en  $L_I$  qui est donné par les équations

$$\forall (i, j) \in I^2, X_i U_j = X_j U_i$$

dans  $\mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^{\#I-1}$ . Notons  $m$  le cardinal de  $I$ . Soit  $Y$  un élément de  $T_n$  de la forme  $X_i^2 \prod_{k \notin \{i, j\}} X_k$  avec  $i \neq j$ . Soit  $s$  la section correspondante de  $\omega_V^{-1}$ . Soit  $J$  une partie de cardinal  $m-1$  de  $I - \{j\}$ . La restriction de  $s$  à  $W$  est donnée par un polynôme de la forme

$$\frac{X_i^2 \prod_{k \notin \{i, j\}} X_k}{\prod_{k \in J} X_k} \prod_{k \in J} U_k$$

sa restriction à un ouvert  $U_I$  contenu dans  $L_I - \bigcup_{K \neq I} L_K$  est donc nulle sauf

lorsque  $i \notin I$  et  $j \in I$ . La restriction de  $H$  à  $U_I$  est donc donnée par

$$\begin{aligned} H((x, u)) &= \prod_{\substack{v \in M_k \\ i \notin I \\ j \in I}} \sup(|x_i^2 \prod_{\substack{k \notin I \\ k \neq i}} x_k \prod_{k \in I - \{j\}} u_k|_v) \\ &\leq \prod_{v \in M_k, i \notin I} \sup(|x_i|_v^{n+2-\#I}) \sup(|u_i|_v^{\#I-1}). \end{aligned}$$

Donc par le résultat de schanuel  $\beta_{U_I} \geq \frac{\#I}{\#I-1}$ . Sur un ouvert  $U_i$  de  $L_i$  contenu dans le complémentaire des  $L_I$ , la hauteur d'un élément  $x = (x_0 : \dots : x_n)$  est donnée par

$$H(x) = \prod_{v \in M_k, j \neq i} \sup |x_j|_v \prod_{v \in M_k, j \neq i} \prod |x_j|_v = \prod_{v \in M_k, j \neq i} \sup |x_j|_v.$$

Le résultat de Schanuel montre alors que  $\beta_{U_i} \geq n$ . □

**8.2. Réécriture de la hauteur.** — Jusqu'à la section 8.4 on fixe un idéal  $\mathfrak{a} \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_k)$ . l'objectif est donc d'estimer le cardinal  $N'_\mathfrak{a}(B) = wN_\mathfrak{a}(B)$  des  $x \in \mathcal{O}_k^{n+1}$  tels que

$$(8.2.1) \quad (x_i, 0 \leq i \leq n) = \mathfrak{a}$$

$$(8.2.2) \quad H(x) \leq B$$

$$(8.2.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n$$

$$(8.2.4) \quad j(x) \in \Delta_H$$

où  $j$  et  $\Delta_H$  sont définis dans la section 7.1. On reprend également les notations  $H_\nu$  et  $H_\infty$  de cette section. Soit  $x$  un élément de  $\mathcal{O}_k^{n+1}$  vérifiant (8.2.1) et (8.2.3), la hauteur de l'image  $\bar{x}$  de  $x$  dans  $U$  est donnée par

$$H(\bar{x}) = \frac{H_\infty(x)}{N((Y(x), Y \in T_n))}.$$

On notera  $\tilde{\rho} : \mathcal{S}(\mathcal{O}_k)^{n+1} \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{O}_k)^F$  l'application qui à  $(\mathbf{c}_i)_{0 \leq i \leq n}$  associe  $(\mathbf{b}_I)_{I \in F}$  défini par

$$\forall I \in F, \mathbf{b}_I = \left( \sum_{i \in I} \mathbf{c}_i \right) \prod_{\substack{J \in F \\ J \not\supseteq I}} \mathbf{b}_J^{-1}.$$

Si  $x$  vérifie la condition (8.2.1) et  $\mathbf{b} = \tilde{\rho}(((x_i)\mathbf{a}^{-1})_{0 \leq i \leq n})$  alors pour tout  $\mathfrak{p} \in M_f$ , l'entier  $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathbf{b}_I)$  est le degré d'intersection entre le diviseur défini par  $L_I$  dans  $\mathcal{V}_{\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}}$  et le  $\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}$ -point de cette variété induit par  $x\pi^{-\nu_{\mathfrak{p}}(\mathbf{a})}$  pour une uniformisante  $\pi$  de  $\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}$ . En outre pour tout  $\mathfrak{p} \in M_f$ ,  $\{I \mid \nu_{\mathfrak{p}}(\mathbf{b}_I) \neq 0\}$  est totalement ordonné par l'inclusion. Soit  $i_0$  n'appartenant pas au plus grand élément de cet ensemble et  $j_0$  un élément du plus petit. Alors

$$\inf_{Y \in T_n} \nu_{\mathfrak{p}}(Y(x)) = \nu_{\mathfrak{p}}(x_{i_0}^2 \prod_{k \neq j_0} x_j) = (n+1)\nu_{\mathfrak{p}}(\mathbf{a}) + \sum_{I \in F'} (\#I - 1)\nu_{\mathfrak{p}}(\mathbf{b}_I).$$

On a donc la relation

$$N((Y(x), Y \in T_n)) = N(\mathbf{a})^{n+1} \prod_{I \in F} N(\mathbf{b}_I)^{\#I-1}.$$

Soit  $\mathcal{H}'$  l'ensemble des  $\mathbf{b} \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_k)^F$  tels que pour tout  $\mathfrak{p} \in M_f$  on ait

$$((C_p)) \quad \forall I, J \in F, ((I \not\subset J \text{ et } J \not\subset I) \Rightarrow \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathbf{b}_I), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathbf{b}_J)) = 0)$$

ce qui équivaut à

$$((C_p)) \quad \forall G \subset F, \left( \bigcap_{f \in G} L_f = \emptyset \Rightarrow \inf_{f \in G} (\nu_{\mathfrak{p}}(\mathbf{b}_f)) = 0 \right).$$



Pour tout  $\mathfrak{b} \in \mathcal{J}(\mathcal{O}_k)^F$ , on note  $n_{\mathfrak{b}}(B)$  le cardinal de l'ensemble des  $x \in \mathcal{O}_k^{n+1}$  tels que

$$(8.2.1') \quad (x_i) = \mathfrak{a} \prod_{\substack{I \in F \\ i \in I}} \mathfrak{b}_I$$

$$(8.2.2') \quad H_{\infty}(x) \leq BN \left( \mathfrak{a}^{n+1} \prod_{I \in F} \mathfrak{b}_I^{\#I-1} \right)$$

$$(8.2.4) \quad j(x) \in \Delta_H.$$

**Lemme 8.2.1.** —

$$wN_{\mathfrak{a}}(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{H}'} n_{\mathfrak{b}}(B).$$

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{H} = \left\{ \mathfrak{c} \in \mathcal{J}(\mathcal{O}_k)^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n \mathfrak{c}_i = \mathcal{O}_k \right\}$ . L'application  $\bar{\rho}$  induit alors une bijection

$$\rho: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$$

dont la réciproque  $\theta$  est donnée par

$$\theta(\mathfrak{b}) = \left( \prod_{\substack{I \in F \\ i \in I}} \mathfrak{b}_I \right)_{0 \leq i \leq n} . \quad \square$$

**8.3. Estimations pour le corps des rationnels.** — Pour déterminer le cardinal  $wN_{\mathfrak{a}}(B)$ , nous allons tout d'abord chercher pour tout  $(\mathfrak{c}) \in \mathcal{J}(\mathcal{O}_k)^{n+1}$  une estimation du cardinal  $m_{\mathfrak{c}}(B)$  de l'ensemble des  $(x) \in \prod_{i=0}^n \mathfrak{c}_i$  tels que

$$(8.2.2'') \quad H_{\infty}(x) \leq B$$

$$(8.2.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n$$

$$(8.2.4) \quad j(x) \in \Delta_H.$$

On reprend la notation  $\mathcal{D}_B$  de la section 7.1.

**Lemme 8.3.1.** — Dans le cas où  $k = \mathbf{Q}$ , on a pour tout  $c \in \mathbf{N}^{+n+1}$  les inégalités

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{D}_B)}{\prod_{i=0}^n c_i} - C_1 \left( \sum_{i=0}^n \prod_{j \neq i} \frac{1}{c_j} \right) B^{\frac{n}{n+1}} \leq m_c(B) \leq \frac{\text{Vol}(\mathcal{D}_B)}{\prod_{i=0}^n c_i}$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de  $B$  et de  $c$ .

**Remarque 8.1.** — la difficulté pour généraliser le théorème 8.6.1 aux autres corps de nombres réside dans la démonstration de ce lemme ainsi que dans celle du lemme suivant. Il faudrait en particulier pouvoir majorer de manière suffisamment fine

$$\left| m_c(B) - \frac{\text{Vol}(\mathcal{D}_B)}{\text{Det}(M)} \right|$$

où  $M$  est le réseau  $j \left( \prod_{i=0}^n c_i \right)$  et donc

$$\text{Det}(M) = \frac{N \left( \prod_{i=0}^n c_i \right) \sqrt{d}^{n+1}}{2^{(n+1)r_2}}.$$

L'estimation de  $m_c(B)$  se complique du fait que le domaine est non borné (si on ôte la condition  $x_i \neq 0$ , le cardinal de l'intersection du réseau avec  $\mathcal{D}_B$  est infini).

*Démonstration.* — Dans cette démonstration,  $k = \mathbf{Q}$ . Fixons  $c \in \mathbf{N}^{+n+1}$ . Majorons tout d'abord  $m_c(B)$

$$\begin{aligned} m_c(B) &= 2^{n+1} \# \left\{ x \in \prod_{i=0}^n (c_i) / \left\{ \begin{array}{l} x_i > 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n \\ x \in \mathcal{D}_B \end{array} \right\} \right\} \\ &= 2^{n+1} \# \{ m \in \mathbf{N}^{+n+1} \mid H_\infty((c_i m_i)_{0 \leq i \leq n}) \leq B \} \\ &= \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=0}^n c_i} \text{Vol} \{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} \mid \left( c_i E \left( \frac{x_i}{c_i} \right) + c_i \right)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_B \}. \end{aligned}$$

Or  $H_\infty(x)$  est croissante en chacune des variable  $x_i$  pour  $0 \leq i \leq n$ . Donc

$$\left( c_i E \left( \frac{x_i}{c_i} \right) + c_i \right)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_B \Rightarrow (x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_B.$$

Par conséquent on a les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} m_c(B) &\leq \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=0}^n c_i} \text{Vol} \{ x \in \mathbf{R}^{+n+1} \mid x \in \mathcal{D}_B \} \\ &\leq \frac{1}{\prod_{i=0}^n c_i} \text{Vol}(\mathcal{D}_B). \end{aligned}$$

Majorons maintenant  $\text{Vol}(\mathcal{D}_B)$

$$\begin{aligned}
& \text{Vol}(\mathcal{D}_B) \\
&= 2^{n+1} \text{Vol}\{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x \in \mathcal{D}_B\} \\
&\leq 2^{n+1} \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \left\{ \begin{array}{l} \left( c_i E \left( \frac{x_i}{c_i} \right) \right)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_B \\ E \left( \frac{x_i}{c_i} \right) \geq 1 \end{array} \right. \right\} \\
&\quad + 2^{n+1} \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \left\{ \begin{array}{l} \exists i \in \{0, \dots, n\} / 0 \leq x_i \leq c_i \\ x \in \mathcal{D}_B \end{array} \right. \right\} \\
&\leq \left( \prod_{i=0}^n c_i \right) m_c(B) \\
&\quad + 2^{n+1} \left( \sum_{i=0}^n c_i \right) \text{Vol} \left\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^{+n} \mid \sup_{Y \in T_n} (Y(0, x_1, \dots, x_n)) \leq B \right\}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& \text{Vol} \left\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^{+n} \mid \sup_{Y \in T_n} (Y(0, x_1, \dots, x_n)) \leq B \right\} \\
&= B^{\frac{n}{n+1}} \text{Vol} \left\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^{+n} \mid \sup_{1 \leq i \leq n} (x_i) x_1 \dots x_n < 1 \right\} \\
&= B^{\frac{n}{n+1}} \frac{(n+1)^n}{3}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser  $C_1 = \frac{(n+1)^n}{3}$ . □

**Lemme 8.3.2.** — Si  $c \in \mathbf{N}^{+n+1}$  vérifie  $c_0 \geq B^{\frac{1}{n+1}}$ , alors

$$m_c(B) \leq C_2 \frac{B^{1+\frac{1}{n-1}}}{c_0^{2+\frac{2}{n-1}} \prod_{i=1}^n c_i}$$

où  $C_2$  est indépendante de  $c$  et de  $B$ .

*Démonstration.* —

$$\begin{aligned} & m_c(B) \\ & \leq \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=0}^n c_i} \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq c_0 \\ H_\infty(x) \leq B \end{array} \right\} \right\} \\ & \quad + \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=1}^n c_i} \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid H_\infty(c_0, x_1, \dots, x_n) \leq B \right\}. \end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned} & \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq c_0 \\ H_\infty(x) \leq B \end{array} \right\} \right\} \\ & \leq n \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq c_0 \\ x_0 \geq x_i \geq x_n \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ x_0^2 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leq B \end{array} \right\} \right\} \\ & \quad + n(n-1) \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq c_0 \\ x_1 \geq x_i \geq x_n \text{ pour } i=0 \text{ ou } 2 \leq i \leq n-1 \\ x_1^2 x_0 \prod_{i=2}^{n-1} x_i \leq B \end{array} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Le premier des deux volumes que l'on notera  $\mathcal{V}_1$  est majoré par

$$\begin{aligned} & \text{Vol} \left\{ x \in (\mathbf{R}^+)^{n+1} \mid \left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq c_0 \\ x_i \geq x_n \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ x_0^2 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leq B \end{array} \right\} \right\} \\ & \leq \int_{c_0}^{+\infty} \text{Vol} \left\{ x \in (\mathbf{R}^+)^n \mid \left\{ \begin{array}{l} x_i \geq x_n \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leq \frac{B}{x_0^2} \end{array} \right\} \right\} dx_0. \end{aligned}$$

Or les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i \geq x_n \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ \prod_{i=1}^{n-1} x_i \leq 1 \end{array} \right.$$

définissent un domaine de volume fini. On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &\leq C_3 \int_{c_0}^{+\infty} \left( \frac{B}{x_0^2} \right)^{\frac{n}{n-1}} dx_0 \\ &\leq C_3 \frac{B^{\frac{n}{n-1}}}{c_0^{\frac{n}{n-1}-1}} \end{aligned}$$

où  $C_3$  est indépendante de  $B$  et de  $c$ . Par ailleurs on a les inégalités

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &\leq \text{Vol} \left\{ x \in (\mathbf{R}^+)^{n+1} \left| \begin{array}{l} x_1 \geq c_0 \\ x_i \geq x_n \text{ pour } i = 0 \text{ ou } 2 \leq i \leq n-1 \\ x_1^2 x_0 \prod_{i=2}^{n-1} x_i \leq B \end{array} \right. \right\} \\ &\leq C_3 \frac{B^{\frac{n}{n-1}}}{c_0^{\frac{n}{n-1}-1}}. \end{aligned}$$

Enfin le même raisonnement montre que

$$\begin{aligned} &\text{Vol}\{x \in (\mathbf{R}^+)^n \mid H_\infty(c_0, x_1, \dots, x_n) \leq B\} \\ &\leq (n + n(n-1)) C_3 \frac{B^{\frac{n}{n-1}}}{c_0^{\frac{n}{n-1}}}. \quad \square \end{aligned}$$

**8.4. Sommation sur les idéaux.** — On considère l'ensemble  $\mathcal{B} = \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^F$ . L'ensemble  $\mathcal{B}$  est un monoïde pour la multiplication terme à terme des idéaux. Si  $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ , on note

$$(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{c} \in \mathcal{B} \mid \mathfrak{c}_f \subset \mathfrak{b}_f \text{ pour tout } f \in F\}.$$

Nous allons maintenant étudier pour tout  $\mathfrak{b}_0 \in \mathcal{B}$  la somme

$$P_{\mathfrak{b}_0}^{\mathfrak{a}}(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in (\mathfrak{b}_0)} n_{\mathfrak{b}}(B).$$

Il s'agit en réalité d'une somme finie. Comme on le verra dans la partie suivante,  $wN_{\mathfrak{a}}(B)$  s'exprime en fonction de  $P_{\mathfrak{b}_0}^{\mathfrak{a}}(B)$ . Jusqu'à la fin de cette partie, on omettra  $\mathfrak{a}$  dans cette notation. Pour commencer, exprimons en général  $P_{\mathfrak{b}_0}$  en termes des nombres  $m_{\mathfrak{c}}$  définis au début de la partie 8.3.

**Lemme 8.4.1.** — *On considère*

$$(\mathfrak{b}^0, \mathfrak{d}^0) \in \mathcal{B} = \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{n+1} \times \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F'}.$$

Posons, pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$  et tout  $\mathfrak{d} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F'}$

$$c(\mathfrak{d})_i = \mathfrak{a} b_i^0 \prod_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} \mathfrak{d}_I^0 \mathfrak{d}_I.$$

Alors on a l'égalité

$$P_{\mathfrak{b}_0, \mathfrak{d}_0}(B) = \sum_{\mathfrak{d} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F'}} m_{c(\mathfrak{d})} \left( BN \left( \mathfrak{a}^{n+1} \prod_{I \in F'} (\mathfrak{d}_I^0 \mathfrak{d}_I)^{\#I-1} \right) \right).$$

En fait, comme nous le verrons dans la partie suivante, l'introduction de cette sommation correspond au choix du facteur de convergence  $L_p(1, \text{Pic } \overline{V})$ .

*Démonstration.* — Le lemme résulte du fait que pour tout  $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{d}_0) \in \mathcal{B}$ , tout  $\mathfrak{d} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^{F'}$  on a la relation

$$m_{c(\mathfrak{d})} \left( BN \left( \mathfrak{a}^{n+1} \prod_{I \in F'} (\mathfrak{d}_I^0 \mathfrak{d}_I)^{\#I-1} \right) \right) = \sum_{\mathfrak{b} \in (\mathfrak{b}_0)} n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d} \mathfrak{d}_0)}(B). \quad \square$$

Nous allons maintenant déduire du lemme précédant une estimation de  $P_{\mathfrak{b}, \mathfrak{d}}(B)$  dans le cas où  $k = \mathbf{Q}$ .

**Lemme 8.4.2.** — Dans le cas où  $k = \mathbf{Q}$ , on peut poser  $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$  et on obtient

$$P_b(B) \sim C'' \frac{B \log^{t-1} B}{\prod_{I \in F} b_I} \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

où  $t = \text{rg Pic } V$  et où la constante  $C''$  est donnée par la formule

$$C'' = (n+1) \alpha_c(V) \text{Vol } \mathcal{D}_1 \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{t-1} \zeta_{\mathbf{Q}}^{t-1}(s).$$

De plus, on a la majoration

$$P_b(B) \leq \text{Vol } \mathcal{D}_1 \frac{B(\log B + C_4)^{t-1}}{\prod_{f \in F} b_f}$$

où  $C_4$  est une constante indépendante de  $b$  et de  $B$ .

**Remarque 8.2.** — Ce lemme repose sur les lemmes 8.3.1 et 8.3.2 et n'est donc valable que sur le corps  $\mathbf{Q}$ . Si les lemmes 8.3.1 et 8.3.2 se généralisaient au cas

du corps de nombres quelconque, alors on obtiendrait un lemme analogue avec une constante  $C''$  de la forme

$$C'' = (n+1)\alpha_c(V) \frac{2^{(n+1)r_2}}{\sqrt{d}^{n+1}} \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{t-1} \zeta_k^{t-1}(s).$$

D'après le lemme 7.2.1, on obtiendrait

$$C'' = \alpha_c(V) \frac{w}{h\sqrt{d}^n} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t \zeta_k^t(s) \prod_{v \in M_\infty} \omega_v(V(k_v)).$$

*Démonstration.* — D'après le lemme 8.3.1, on sait que

$$m_c(B') = \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{B'}{\prod_{i=0}^n c_i} + R(c, B')$$

avec

$$-C_1 \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{\prod_{j \neq i} c_j} \right) B'^{\frac{n}{n+1}} \leq R(c, B') \leq 0.$$

On fixe  $b^0$  dans  $\mathbf{N}^{+F}$  et  $B$  dans  $\mathbf{R}^+$ . Pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on pose

$$c_i^0 = \prod_{\substack{I \in F \\ i \in I}} b_I^0.$$

Soit  $B_0 = B \prod_{i \in F'} b_I^{0\#I-1}$  et  $h_0 = \log B_0$ . On écrira  $c(d)$  à la place de  $\mathfrak{c}(\mathfrak{d})$ . On note

$\mathcal{P}_B$  l'ensemble des  $d \in \mathbf{N}^{+F'}$  tels que

$$(**) \quad \begin{cases} d_I \geq 1 \text{ pour } I \in F' \\ c_i^0 \prod_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} d_I \leq B_0 \frac{1}{d_i^{\frac{1}{n+1}}} \prod_{I \in F'} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \text{ pour } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} A &= \sum_{d \in \mathbf{N}^{+F'}} m_{c(d)} \left( B_0 \prod_{I \in F'} d_I^{\#I-1} \right) \\ &= A_1 + A_2 + A_3 \end{aligned}$$

où  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  sont définis par

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{B}{\prod_{I \in F} b_I^0} \sum_{d \in \mathcal{P}_B} \frac{1}{\prod_{I \in F'} d_I} \\ A_2 &= \sum_{d \in \mathcal{P}_B} R \left( c(d), B_0 \prod_{I \in F'} d_I^{\#I-1} \right) \\ A_3 &= \sum_{d \notin \mathcal{P}_B} m_{c(d)} \left( B_0 \prod_{I \in F'} d_I^{\#I-1} \right). \end{aligned}$$

- Commençons par évaluer  $A_1$ . Tout d'abord estimons

$$W(B) = \int_{\{x \in \mathbf{R}^{+F'} \mid (**)\}} \frac{1}{\prod_{f \in F'} x_f} \prod_{f \in F'} dx_f.$$

**Lemme 8.4.3.** —

$$W(B) \sim (n+1) \alpha_c(V) b_0^{t-1} \text{ quand } B \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* — Posons  $\lambda_i = (n+1) \log c_i^0$  pour  $0 \leq i \leq n$  et faisons le changement de variables  $y_f = \log x_f$ . On trouve

$$W(B) = \text{Vol}(\mathcal{W}_B)$$

où  $\mathcal{W}_B$  est le polyèdre de  $\mathbf{R}^{F'}$  défini par

$$\begin{cases} y_I \geq 0 \text{ pour } I \in F' \\ (n+1) \sum_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} y_I \leq b_0 - \lambda_i + \sum_{I \in F'} (\#I - 1) y_I \text{ si } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Par conséquent

$$W(B) \sim b_0^{t-1} \text{Vol}(\mathcal{W}')$$

où  $\mathcal{W}'$  est l'ensemble des  $y \in \mathbf{R}^{F'}$  tels que

$$\begin{cases} y_I \geq 0 \text{ pour } I \in F' \\ (n+1) \sum_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} y_I - \sum_{I \in F'} (\#I - 1) y_I \leq 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$



La correspondance entre les idéaux  $d_I$  et les diviseurs  $L_I$  introduite dans la section 8.2 amène à considérer les  $y_I$  comme un système de coordonnées sur l'hyperplan défini par  $x([\omega_V^{-1}]) = 0$  dans  $(\text{Pic}(V) \otimes \mathbf{R})^\vee$ . Plus précisément, une base de  $\text{NS}(V)$  est donnée par  $[\Lambda]$  et les  $[L_I]$  pour  $I \in F'$ . On note  $(Y, Y_I)$  le système de coordonnées correspondant à la base duale. L'équation  $x([\omega_V^{-1}]) = 1$  s'écrit

$$(n+1)Y - \sum_{I \in F'} (\#I - 1)Y_I = 1.$$

La relation  $x([L_I]) > 0$  s'écrit  $Y_I > 0$  pour  $I \in F'$  et  $x([L_i]) > 0$  s'écrit

$$Y - \sum_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} Y_I > 0.$$

Par conséquent le domaine

$$\mathcal{H}_{\omega_V^{-1}}(1) \cap C_{\text{eff}}^\vee(V) = \left\{ x \in (\text{Pic}(V) \otimes \mathbf{R})^\vee \left| \begin{cases} \text{pour tout } D \text{ effectif } x([D]) > 0 \\ x(\omega_V^{-1}) = 1 \end{cases} \right. \right\}$$

a pour équations

$$\begin{cases} (n+1)Y - \sum_{I \in F'} (\#I - 1)Y_I = 1 \\ Y_I > 0 \text{ pour } I \in F' \\ 1 + \sum_{I \in F'} (\#I - 1)Y_I - (n+1) \sum_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} Y_I > 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Le domaine  $\mathcal{W}'$  est donc la projection de  $\mathcal{H}_{\omega_V^{-1}}(1) \cap C_{\text{eff}}^\vee(V)$  sur l'hyperplan  $Y = 0$ . Par conséquent

$$\text{Vol}(\mathcal{W}') = (n+1)\alpha_c(V). \quad \square$$

*Suite de la démonstration du lemme 8.4.2.* — Nous allons maintenant majorer la différence entre  $A_1$  et  $W(B)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{d \in \mathcal{P}_B} \frac{1}{\prod_{I \in F'} d_I} &= \sum_{d \in \mathcal{P}_B} \prod_{I \in F'} (\log(d_I + 1) - \log d_I) \\ &\quad + \sum_{d \in \mathcal{P}_B} \left( \prod_{I \in F'} \frac{1}{d_I} - \prod_{I \in F'} (\log(d_I + 1) - \log d_I) \right). \end{aligned}$$

Notons  $A_{1,1}$  la première somme et  $A_{1,2}$  la seconde. On a la relation

$$A_{1,1} = \text{Vol} \left( \bigcup_{d \in \mathcal{P}_B} \prod_{I \in F'} [\log d_I, \log(d_I + 1)] \right)$$

et on en déduit que

$$|A_{1,1} - W(B)| < \text{Vol} \left( \bigcup_{I \in F'} \prod [\log d_I, \log(d_I + 1)] \right)$$

où la réunion est prise sur les  $(d_I)_{I \in F'}$  tels que

$$\prod_{I \in F'} [\log d_I, \log(d_I + 1)] \cap \mathcal{S}_B \neq \emptyset$$

$\mathcal{S}_B$  désignant la surface du polyèdre  $\mathcal{W}_B$  défini ci-dessus. Mais le diamètre de la boîte  $\prod_{I \in F'} [\log d_I, \log(d_I + 1)]$  est bornée par  $\sqrt{t-1}$ . Donc

$$\begin{aligned} |A_{1,1} - W(B)| &\leq \text{Vol}(\{x \mid d(x, \mathcal{S}_B) \leq \sqrt{t-1}\}) \\ &\leq C_5 b_0^{t-2} \text{ pour } B \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$A_{1,1} \sim W(B) \sim (n+1)\alpha_c(V)b_0^{t-1}.$$

Majorons maintenant  $A_{1,2}$ . Pour tout  $a \in \mathbf{N}^+$  on a les inégalités

$$\frac{1}{2a^2} \geq \frac{1}{a} - (\log(a+1) - \log(a)) \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} |A_{1,2}| &\leq C_6 \sum_{d \in [1, B_0]^{F'}} \left( \sum_{f \in F'} \frac{1}{d_f^2 \prod_{g \neq f} d_g} \right) \\ &\leq (t-1)C_6 \sum_{d \in [1, B_0]^{F'}} \frac{1}{d_{\{0,1\}}^2 \prod_{g \neq \{0,1\}} d_g} \\ &\leq (t-1)C_6 \frac{\pi^2}{6} (\log(B_0) + 1)^{t-2} \end{aligned}$$

donc

$$A_1 \sim (n+1)\alpha_c(V) \log^{t-1} B.$$

- Majorons maintenant  $A_2$ . On a les inégalités

$$\left| R \left( c(d), B_0 \prod_{I \in F'} d_I^{\#I-1} \right) \right| \leq C_7 B_0^{\frac{n}{n+1}} \left( \sum_{i=0}^n \frac{\left( \prod_{I \in F'} d_I^{\#I-1} \right)^{\frac{n}{n+1}}}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} d_I} \right)$$

où on a posé

$$C_7 = C_1 \left( \sum_{i=0}^n \prod_{j \neq i} \frac{1}{c_j} \right) \left( \prod_{I \in F'} b_I^{0^{\#I-1}} \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

et on obtient

$$|A_2| \leq (n+1) C_7 B_0^{\frac{n}{n+1}} \sum_{d \in \mathcal{P}'_B} \frac{1}{\prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I^{(\#I-1)(1-\frac{n}{n+1})} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{\#I-(\#I-1)\frac{n}{n+1}}}$$

où  $\mathcal{P}'_B$  désigne l'ensemble des  $d \in \mathbf{N}^{+F'}$  tels que

$$\prod_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} d_I \leq B_0^{\frac{1}{n+1}} \prod_{I \in F'} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \text{ pour } 0 \leq i \leq n.$$

La dernière somme est donc majorée par

$$\begin{aligned} & (n+1) \sum_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \frac{1}{\prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{1+\frac{\#I-1}{n+1}}} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I \leq \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I \text{ pour } 0 \leq i \leq n \\ \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I \leq \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I \end{array} \right. \\ & = (n+1) \sum_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \frac{1}{\prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{1+\frac{\#I-1}{n+1}}} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I^{n+2-\#I} \leq B_0 \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{\#I-1} \\ \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{\#I} \leq \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I^{n+1-\#I} \end{array} \right. \end{aligned}$$

En sommant sur  $d_{\{0,1\}}$  on obtient que la dernière somme est majorée par

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{1 - \frac{1}{n+1}} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{\#I} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I \\ I \neq \{0,1\}}} d_I^{\#I-n-1} \\
& \leq B_0 \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{\#I-1} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I \\ I \neq \{0,1\}}} d_I^{\#I-n-2} \\
& \leq 2 \frac{n+1}{n} B_0^{\frac{1}{n+1}} \sum_{\substack{I \in F' \\ I \neq \{0,1\}}} \prod_{d_I \leq B_0} \frac{1}{\prod_{\substack{I \in F' \\ I \neq \{0,1\}}} d_I} \\
& \leq 2 \frac{n+1}{n} B_0^{\frac{1}{n+1}} (2 \log B_0 + 1)^{t-2}.
\end{aligned}$$

$$\frac{\left( B_0 \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{\#I-1} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I \\ I \neq \{0,1\}}} d_I^{\#I-n-2} \right)^{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}}{\prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I \\ I \neq \{0,1\}}} d_I^{\frac{\#I-1}{n+1}} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{1 + \frac{\#I-1}{n+1}}}$$

En conclusion

$$A_2 = O(B \log^{t-2} B).$$

- Nous allons maintenant majorer le terme  $A_3$ . D'après le lemme 8.3.2, si

$$c_0^0 \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I \geq B_0^{\frac{1}{n+1}} \left( \prod_{I \in F'} d_I^{\#I-1} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \text{ on a}$$

$$\left| m_{c(d)} \left( B_0 \prod_{I \in F'} d_I^{\#I-1} \right) \right| \leq C_8 \frac{B^{1 + \frac{1}{n-1}} \left( \prod_{I \in F'} d_I^{\#I-1} \right)^{1 + \frac{1}{n-1}}}{\left( \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I \right)^{2 + \frac{2}{n-1}} \prod_{i=1}^n \prod_{\substack{I \in F' \\ i \in I}} d_I}$$

où on a posé

$$C_8 = \sup_{0 \leq i \leq n} \frac{C_2 \left( \prod_{I \in F'} b_I^{0\#I-1} \right)^{1 + \frac{1}{n-1}}}{(c_i^0)^{2 + \frac{2}{n-1}} \prod_{j \neq i} c_j^0}.$$

En outre, s'il existe  $I \in F'$  tel que  $d_I \geq B \text{Vol}(\mathcal{D}_1)$  alors

$$\text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{B}{\prod_{i=0}^n b_i^0 \prod_{I \in F'} b_I^0 d_I} < 1$$

et par conséquent

$$m_{c(d)} \left( B_0 \prod_{I \in F'} d_I^{\#I-1} \right) = 0.$$

On en déduit, en posant  $B'_0 = \inf_{0 \leq i \leq n} \frac{B_0}{c_i^{0^{n+1}}}$ ,

$$\begin{aligned}
A_3 &\leq (n+1)C_8 B^{1+\frac{1}{n-1}} \sum_{1 \leq d_I \leq \text{Vol } \mathcal{D}_1 B} \frac{1}{\prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I^{2-\frac{\#I-3}{n-1}} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{1-\frac{\#I-1}{n-1}}} \\
&\leq (n+1)C_8 B^{1+\frac{1}{n-1}} \sum_{\substack{1 \leq d_I \leq \text{Vol } \mathcal{D}_1 B \\ \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I^{n+2-\#I} \geq B'_0}} \frac{1}{\prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I^{\#I-1} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I}} d_I^{1-\frac{\#I-1}{n-1}}} \\
&\leq C_9 B^{1+\frac{1}{n-1}} \sum_{1 \leq d_I \leq \text{Vol } \mathcal{D}_1 B, \text{ si } I \neq \{1,2\}} \frac{\left( \left( B'_0 \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I \\ I \neq \{1,2\}}} d_I^{\#I-1} \right)^{-1} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I^{n+2-\#I} \right)^{\frac{1}{n-1}}}{\prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \in I}} d_I^{2-\frac{\#I-3}{n-1}} \prod_{\substack{I \in F' \\ 0 \notin I \\ I \neq \{1,2\}}} d_I^{1-\frac{\#I-1}{n-1}}} \\
&\leq C_{10} B \sum_{1 \leq d_I \leq \text{Vol } \mathcal{D}_1 B, \text{ si } I \neq \{1,2\}} \frac{1}{\prod_{\substack{I \in F' \\ I \neq \{1,2\}}} d_I} \\
&\leq C_{11} B (\log B + 1)^{t-2}.
\end{aligned}$$

On obtient également

$$A_3 = O(B \log^{t-2} B).$$

• Majorons maintenant  $P_{b,d}(B)$  de manière uniforme. S'il existe  $I \in F'$  tel que  $d_I \geq B \text{Vol}(\mathcal{D}_1)$  alors

$$m_{c(d)} \left( B_0 \prod_{I \in F'} d_I^{\#I-1} \right) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} P_{b^0}(B) &\leq \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{B}{\prod_{I \in F} b_I^0} \sum_{1 \leq d_I \leq B \text{Vol}(\mathcal{D}_1)} \frac{1}{\prod_{I \in F'} d_I} \\ &\leq \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{B(\log B + \log \text{Vol}(\mathcal{D}_1) + 1)^{t-1}}{\prod_{I \in F} b_I^0}. \quad \square \end{aligned}$$

**8.5. Formule d'inversion.** — Notre but est maintenant de construire l'analogue de la formule d'inversion de Möbius. Si  $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ , on note

$$\beta(\mathfrak{b}) = \frac{1}{\prod_{f \in F} N(\mathfrak{b}_f)},$$

et pour tout  $\mathfrak{p} \in M_f$ ,

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) = (\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_f))_{f \in F}.$$

Pour tout  $\mathfrak{p} \in M_f$ , on pose également si  $n = (n_g)_{g \in F} \in \mathbf{N}^F$ ,  $\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^{n_g})_{g \in F}$  et si  $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ ,  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})}$ . Si  $B$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{B}$ , sa fonction caractéristique est notée  $\chi_B$ .

**Lemme 8.5.1.** — *Il existe une unique fonction  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Z}$  telle que*

$$(a) \quad \chi_{\mathcal{H}'} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \mu(\mathfrak{b}) \chi(\mathfrak{b}).$$

*Cette fonction vérifie en outre les conditions suivantes*

$$(b) \quad \mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) \text{ pour tout } \mathfrak{b} \in \mathcal{B},$$

$$(c) \quad \sum_{n \in \mathbf{N}^F} \mu(\mathfrak{p}^n) \beta(\mathfrak{p}^n) = \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \overline{V})},$$

$$(d) \quad \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} |\mu(\mathfrak{b}) \beta(\mathfrak{b})| < +\infty.$$

*Démonstration.* — • Si  $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathcal{B}$ , on note  $\mathfrak{b} | \mathfrak{b}'$  si et seulement si  $\mathfrak{b}' \in (\mathfrak{b})$ . Une fonction  $\mu$  vérifie (a) si et seulement si

$$\forall \mathfrak{b} \in \mathcal{B}, \chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{b}' | \mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{b}')$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \mathfrak{b} \in \mathcal{B}, \mu(\mathfrak{b}) = \chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{b}) - \sum_{\substack{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b}}} \mu(\mathfrak{b}')$$

ce qui montre l'existence et l'unicité de  $\mu$ .

• Montrons (b) par récurrence sur  $\#\{\mathfrak{b}' \in \mathcal{B} \mid \mathfrak{b}'|\mathfrak{b}\}$ . On remarque tout d'abord que pour tout  $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ ,

$$\chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}).$$

Par hypothèse de récurrence, pour tout  $\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}$  tel que  $\mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b}$ , on a

$$\mu(\mathfrak{b}') = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_{\mathfrak{p}}).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mu(\mathfrak{b}) &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) - \sum_{\substack{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b}}} \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_{\mathfrak{p}}) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) + \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \sum_{n \leq \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})} \mu(\mathfrak{p}^n) - \sum_{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}} \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}'_{\mathfrak{p}}) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}). \end{aligned}$$

• Démontrons (c). Soit  $n \in \mathbf{N}^F$ . Montrons tout d'abord par récurrence sur  $|n| = \sum_{g \in F} n_g$  que s'il existe  $f \in F$  tel que  $n_f \geq 2$  alors  $\mu(\mathfrak{p}^n) = 0$ . Soit  $n'$  défini par

$$\begin{cases} n'_g = n_g \text{ si } g \neq f \\ n'_f = n_f - 1. \end{cases}$$

Alors on a

$$\chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{p}^n) = \chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{p}^{n'})$$



et

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{p}^n) &= \mu(\mathfrak{p}^n) + \sum_{\substack{\mathfrak{b}|\mathfrak{p}^n \\ \mathfrak{b} \neq \mathfrak{p}^n}} \mu(\mathfrak{b}) \\ &= \mu(\mathfrak{p}^n) + \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{p}^{n'}} \mu(\mathfrak{b}) + \sum_{\substack{\mathfrak{p}^k|\mathfrak{p}^n \\ k \neq n \\ k_f = n_f}} \mu(\mathfrak{p}^k).\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence  $\mu(\mathfrak{p}^k) = 0$  si  $\mathfrak{p}^k|\mathfrak{p}^n$ ,  $k \neq n$  et  $k_f = n_f > 1$ . Donc  $\mu(\mathfrak{p}^n) = 0$ .

- A toute application  $\phi : \{0, 1\}^F \rightarrow \mathbf{Z}$  on associe le polynôme

$$S_F(\phi)(T) = \sum_{n \in \{0, 1\}^F} \phi(n) T^{|n|}.$$

La somme que nous voulons calculer s'exprime alors de la manière suivante

$$\sum_{n \in \{0, 1\}^F} \mu(\mathfrak{p}^n) \beta(\mathfrak{p}^n) = S_F(\mu) \left( \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \right)$$

où on note également  $\mu : \begin{array}{ccc} \{0, 1\}^F & \rightarrow & \mathbf{Z} \\ n & \mapsto & \mu(\mathfrak{p}^n) \end{array}$ . On introduit sur  $\{0, 1\}^F$  l'ordre suivant  $n|m$  si et seulement si pour tout  $f \in F$ ,  $n_f \leq m_f$ . On a donc

$$\chi_{\mathcal{H}'}(n) = \sum_{m|n} \mu(m)$$

et donc

$$\begin{aligned}
S_F(\chi_{\mathcal{H}'}) (T) &= \sum_{n \in \{0,1\}^F} \chi_{\mathcal{H}'}(n) T^{|n|} \\
&= \sum_{n \in \{0,1\}^F} \sum_{m|n} \mu(m) T^{|n|} \\
&= \sum_{m \in \{0,1\}^F} \mu(m) T^{|m|} \sum_{m|n} T^{|n|-|m|} \\
&= \sum_{m \in \{0,1\}^F} \mu(m) T^{|m|} \sum_{i \leq \#F-|m|} C_{\#F-|m|}^i T^i \\
&= \sum_{m \in \{0,1\}^F} \mu(m) T^{|m|} (1+T)^{\#F-|m|} \\
&= (1+T)^{\#F} \sum_{m \in \{0,1\}^F} \mu(m) \left( \frac{T}{1+T} \right)^{|m|}.
\end{aligned}$$

On obtient donc la relation

$$\begin{aligned}
S_F(\mu)(T) &= (1-T)^{\#F} S_F(\chi_{\mathcal{H}'}) \left( \frac{T}{1-T} \right) \\
&= (1-T)^{\text{rg Pic } V} T^{\dim V} \sum_{n \in \{0,1\}^F} \chi_{\mathcal{H}'}(n) \left( \frac{1-T}{T} \right)^{\dim V-|n|}.
\end{aligned}$$

**Lemme 8.5.2.** —

$$\sum_{n \in \{0,1\}^F} \chi_{\mathcal{H}'}(n) (N(\mathfrak{p}) - 1)^{\dim V-|n|} = \#V(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}).$$

*Démonstration.* — Soit  $\gamma : \mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) \rightarrow \{0,1\}^F$  l'application qui à  $x$  associe la fonction caractéristique de  $\{f \mid x \in L_f\}$ . L'application  $\gamma$  induit une surjection

$$\mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) \twoheadrightarrow \tilde{\mathcal{H}}' = \{n \in \{0,1\}^F \mid \chi_{\mathcal{H}'}(n) = 1\}.$$

En outre on vérifie que l'image réciproque par  $\gamma$  d'un point  $n$  de  $\tilde{\mathcal{H}}'$  est isomorphe à

$$(\mathbf{A}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}^1 - \{0\})^{\dim V-|n|}. \quad \square$$

L'interprétation de la valeur locale dans le cas particulier où  $n = 2$  m'a été indiquée par Manin à qui elle avait été montrée par Beukers.

*Fin de la démonstration du lemme 8.5.1.* — • Nous allons maintenant démontrer (d). Si  $n \in \mathbf{N}^F$  vérifie  $|n| = 1$  alors

$$\chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{p}^n) = 1 = \chi_{\mathcal{H}'}(\mathfrak{p}^0)$$

et  $\mu(\mathfrak{p}^n) = 0$ . Par conséquent

$$\sum_{n \in \mathbf{N}^F} |\mu(\mathfrak{p}^n)\beta(\mathfrak{p}^n)| \leq 1 + \sum_{n \in \mathbf{N}^F - \{0\}} |\mu(\mathfrak{p}^n)| \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}$$

On note  $C_{12} = \sum_{n \in \mathbf{N}^F - \{0\}} |\mu(\mathfrak{p}^n)|$ . Donc pour tout  $\mathfrak{b}_0 \in \mathcal{B}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathcal{B} \\ \mathfrak{b} | \mathfrak{b}_0}} |\mu(\mathfrak{b})\beta(\mathfrak{b})| &= \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathcal{B} \\ \mathfrak{b} | \mathfrak{b}_0}} \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} |\mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})|\beta(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \sum_{n \leq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_0)} |\mu(\mathfrak{p}^n)\beta(\mathfrak{p}^n)| \\ &\leq \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \sum_{n \in \mathbf{N}^F} |\mu(\mathfrak{p}^n)\beta(\mathfrak{p}^n)| \\ &\leq \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \left( 1 + \frac{C_{12}}{N(\mathfrak{p})^2} \right) \\ &< +\infty. \quad \square \end{aligned}$$

Il faut remarquer que c'est la sommation de la section 8.4 qui introduit pour l'assertion (c) le facteur  $\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^{\text{rg Pic } V}$  et rend convergente la série ci-dessus.

La formule d'inversion implique le lemme suivant valable sur tout corps de nombres et qui va nous permettre d'utiliser l'estimation du lemme 8.4.2.

**Lemme 8.5.3.** —

$$wN_{\mathfrak{a}}(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \mu(\mathfrak{b})P_{\mathfrak{b}}(B).$$

*Démonstration.* — Ceci résulte des lemmes 8.2.1 et 8.5.1. □

## 8.6. Énoncé du résultat

**Théorème 8.6.1.** — *Soit  $V$  la variété torique obtenue en éclatant successivement pour  $m$  variant de  $n$  à 2 les relevés stricts des sous-espaces de  $\mathbf{P}_k^n$  définis par les équations  $X_i = 0$  pour  $i \in I$  où  $I$  décrit les parties de cardinal  $m$  de  $\{0, \dots, n\}$ . Soit  $U$  le*

complémentaire dans  $V$  des sous-variétés accumulatrices alors

$$n_U(B) \sim C_H(V) B \log^{t-1} B \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

où  $t = \text{rg Pic } V = 2^{n+1} - n - 2$ .

*Démonstration.* — Sur un corps de nombres quelconque on a

$$n_U(B) = \sum_{\bar{\mathfrak{a}} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k)} N_{\bar{\mathfrak{a}}}(B) = \frac{1}{w} \sum_{\substack{\bar{\mathfrak{a}} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{P}(\mathcal{O}_k) \\ \mathfrak{b} \in \mathcal{B}}} \mu(\mathfrak{b}) P_{\mathfrak{b}}^{\bar{\mathfrak{a}}}(B).$$

Dans le cas où  $k = \mathbf{Q}$ , on a posé  $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$  et, d'après le lemme 8.4.2, on a l'équivalence

$$P_{\mathfrak{b}}(B) \sim C'' B \log^{t-1} B \beta(\mathfrak{b})$$

où

$$C'' = \alpha_c(V) \frac{w}{\sqrt{d}^n h} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t \zeta_{\mathbf{Q}}^t(s) \omega_{\mathbf{R}}(V(\mathbf{R}))$$

et la majoration

$$P_{\mathfrak{b}}(B) \leq \text{Vol } \mathcal{D}_1 B (\log B + C_4)^{t-1} \beta(\mathfrak{b}).$$

Soit  $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ , soit  $I \subset \mathcal{B}$  fini tel que

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}-I} |\beta(\mathfrak{b}) \mu(\mathfrak{b})| \leq \frac{\varepsilon}{2(1/2C'' + \text{Vol } \mathcal{D}_1)}.$$

Soit  $B_0$  tel que  $B \geq B_0$  implique

$$\forall \mathfrak{b} \in I, \quad |P_{\mathfrak{b}}(B) - C'' B \log^{t-1} B \beta(\mathfrak{b})| < \frac{\varepsilon}{2\#I} B \log^{t-1} B$$

et

$$B(\log B + C_4)^{t-1} \leq 2B \log^{t-1} B.$$

Alors  $B \geq B_0$  implique

$$\begin{aligned} & \left| n_U(B) - \frac{h}{w} C'' B \log^{t-1} B \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \beta(\mathfrak{b}) \mu(\mathfrak{b}) \right| \\ & \leq \left( \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}-I} \left( \frac{2}{2} \text{Vol } \mathcal{D}_1 + \frac{h}{w} C'' \right) |\beta(\mathfrak{b}) \mu(\mathfrak{b})| + \sum_{\mathfrak{b} \in I} \frac{\varepsilon}{2\#I} \right) B \log^{t-1} B \\ & \leq \varepsilon B \log^{t-1} B. \end{aligned}$$

Donc

$$n_U(B) \sim C' B \log^{t-1} B$$

où

$$\begin{aligned} C' &= \frac{h}{w} \alpha_c(V) \frac{w}{\sqrt{d}^n h} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^t \zeta_{\mathbf{Q}}^t(s) \omega_{\mathbf{R}}(V(\mathbf{R})) \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} (\omega_{\mathfrak{p}}(V(\mathbf{Q}_{\mathfrak{p}}))) \\ &= C_H(V). \quad \square \end{aligned}$$

Dans le cas d'un corps de nombres quelconque, la constante obtenue serait également, d'après la remarque suivant le lemme 8.4.2, la constante  $C_H(V)$ .

### 9. Cas de l'éclatement en un point rationnel

Comme dans le cas précédant, les démonstrations sont faites dans la mesure du possible sur un corps de nombres quelconque. En outre les démonstrations étant similaires, nous n'en indiquerons que les points clefs.

**9.1. Construction de la hauteur.** — La lettre  $V$  désigne ici la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant le point

$$P = (0 : 0 : 1)$$

sur  $\mathbf{P}_k^2$ . On note  $L$  le diviseur au-dessus de  $P$ . En ce cas, le complémentaire des sous-variétés accumulatrices est l'ouvert  $U = V - L$  et on peut prendre  $-K = 3\Lambda - L$ . La hauteur peut être prise de la forme

$$H((x_1 : x_2 : x_3)) = \prod_{\nu \in M_k} \sup(|x_1|_{\nu}^3, |x_2|_{\nu}^3, |x_1 x_3|_{\nu}^2, |x_2 x_3|_{\nu}^2).$$

**9.2. Réécriture de la hauteur.** — On fixe un idéal  $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$ . On utilise le domaine fondamental  $\Delta_H$  défini dans la partie 7.1 et on se ramène à calculer le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$  des éléments  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3$  vérifiant les conditions suivantes

$$(9.2.1) \quad (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a}$$

$$(9.2.2) \quad H((x_1 : x_2 : x_3)) \leq B$$

$$(9.2.3) \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

$$(9.2.4) \quad j(x) \in \Delta_H.$$

En outre comme la contribution des droites  $x_i = 0$  sont des  $O(B)$  et donc négligeables devant  $B \log B$ , on peut remplacer la condition (3) par la condition

$$((9.2.3')) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 3.$$

Par ailleurs la hauteur peut se mettre sous la forme

$$H((x_1 : x_2 : x_3)) = \frac{H_\infty(x_1, x_2, x_3)}{N(\mathfrak{a})^2 N((x_1, x_2))}.$$

On note également

$$\mathcal{H}_\mathfrak{a} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \text{ et } x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 3\}$$

et  $\mathcal{H}'$  l'ensemble des quadruplets  $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_3)$  tels que pour tout  $\mathfrak{p} \in M_f$ , on ait

$$((C_p)) \quad \begin{cases} \inf(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_3), v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_3)) = 0 \\ \inf(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_1), v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_2)) = 0 \end{cases}$$

et on définit  $\rho : \mathcal{H}_\mathfrak{a} \rightarrow \mathcal{H}'$  par  $\rho(x_1, x_2, x_3) = (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_3)$  avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_3 &= (x_1, x_2) \mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_1 &= x_1 \mathfrak{d}_3^{-1} \mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_2 &= x_2 \mathfrak{d}_3^{-1} \mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_3 &= x_3 \mathfrak{a}^{-1}. \end{aligned}$$

On note  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})$  un quadruplet  $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_3)$ . On note  $n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})}(B)$  le cardinal de l'ensemble des  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{H}_\mathfrak{a}$  qui vérifient

$$(9.2.1') \quad \begin{aligned} (x_1) &= \mathfrak{a} \mathfrak{b}_1 \mathfrak{d}_3 \\ (x_2) &= \mathfrak{a} \mathfrak{b}_2 \mathfrak{d}_3 \\ (x_3) &= \mathfrak{a} \mathfrak{b}_3 \end{aligned}$$

ainsi que

$$(9.2.2') \quad H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leq BN(\mathfrak{a}^3 \mathfrak{d}_3)$$

$$(9.2.4) \quad j(x) \in \Delta_H.$$

**Lemme 9.2.1.** —

$$\mathcal{N}_\mathfrak{a}'(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{H}'} n_{\mathfrak{b}}(B).$$

**9.3. Estimations pour le corps des rationnels.** — Comme dans le cas de trois points rationnels, on commence par estimer le nombre  $m_{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3}(B)$  des  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{c}_3$  tels que  $x_i \neq 0$  et  $H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leq B$ . On note

$$\mathcal{D}_B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^{3N} \mid (x_1, x_2, x_3) \in \Delta_H \text{ et } H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leq B\}.$$

**Lemme 9.3.1.** — Si  $k = \mathbf{Q}$ , il existe une constante  $C_1$  telle que

$$\frac{\text{Vol } \mathcal{D}_B}{c_1 c_2 c_3} - C_1 \left( \frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_2 c_3} + \frac{1}{c_3 c_1} \right) B^{2/3} \leq m_{c_1, c_2, c_3}(B) \leq \frac{\text{Vol } \mathcal{D}_B}{c_1 c_2 c_3}.$$

En outre  $m_{c_1, c_2, c_3}(B)$  est nul si  $\sup(c_1, c_2) > B^{1/3}$ .

*Démonstration.* — la première assertion se démontre comme dans le cas de trois points rationnels. La seconde résulte du fait que

$$H_\infty(x_1, x_2, x_3) = \sup(|x_1^3|, |x_2^3|, |x_1 x_3^2|, |x_2 x_3^2|). \quad \square$$

**9.4. Sommation sur les idéaux.** — Comme dans la partie 8.4, on pose  $\mathcal{B} = \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^4$  et on reprend la notation (b). On considère également

$$P_{\mathfrak{b}^0}(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in (\mathfrak{b}^0)} n_{\mathfrak{b}}(B).$$

On montre comme précédemment

**Lemme 9.4.1.** —

$$P_{\mathfrak{b}^0, \mathfrak{d}^0}(B) = \sum_{\mathfrak{d}_3 \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)} m_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1^0 \mathfrak{d}_3^0 \mathfrak{d}_3, \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2^0 \mathfrak{d}_3^0 \mathfrak{d}_3, \mathfrak{a}\mathfrak{b}_3^0}(BN(\mathfrak{a}^3 \mathfrak{d}_3^0 \mathfrak{d}_3)).$$

Sur  $\mathbf{Q}$ , on obtient les résultats suivants

**Lemme 9.4.2.** —

$$P_{b,d}(B) \sim C'' \frac{B \log B}{d_3 b_1 b_2 b_3} \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

où  $C'' = 3\alpha_c(V) \text{Vol } \mathcal{D}_1 \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_{\mathbf{Q}}(s)$  et il existe une constante  $C_2$  telle que

$$P_{b,d}(B) \leq \text{Vol } \mathcal{D}_1 \frac{B(\log B + C_2)}{d_3 b_1 b_2 b_3}.$$

*Démonstration.* — Dans ce cas  $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$ . Posons  $B_0 = B d_3^0$ ,  $c_1^0 = d_3^0 b_1^0$ ,  $c_2^0 = d_3^0 b_2^0$  et  $c_3^0 = b_3^0$ ,  $C_3 = \sup(c_1^0, c_2^0)$  et

$$A = \sum_{d_3 \geq 1} m_{c_1^0 d_3, c_2^0 d_3, c_3^0}(B_0 d_3).$$

Alors  $A = A_1 + A_2$  avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Vol } \mathcal{D}_1 \frac{B_0}{c_1^0 c_2^0 c_3^0} \sum_{1 \leq d_3 \leq \frac{B_0^{1/2}}{C_3^{3/2}}} \frac{1}{d_3} \\ &\sim \frac{1}{2} \text{Vol } \mathcal{D}_1 \frac{B \log B}{d_3^0 b_1^0 b_2^0 b_3^0} \end{aligned}$$

et  $\frac{1}{2} = 3\alpha_c(V)$ . Par ailleurs  $A_2$  est négatif et

$$\begin{aligned} -A_2 &< B_1'(c^0) \sum_{1 \leq d_3 \leq B_0^{1/2}} \left( \frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{d_3} \right) B^{2/3} d_3^{2/3} \\ &= O(B) \end{aligned}$$

où  $B_1'(c^0)$  est indépendant de  $d_3$ . La majoration uniforme s'obtient comme dans le cas de trois points rationnels.  $\square$

**9.5. Formule d'inversion.** — Si  $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ , on note

$$\beta(\mathfrak{b}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^4 N(\mathfrak{b}_i)}.$$

**Lemme 9.5.1.** — *Il existe une unique fonction  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Z}$  telle que*

$$(a) \quad \chi_{\mathcal{H}'} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \mu(\mathfrak{b}) \chi(\mathfrak{b}).$$

*Cette fonction vérifie en outre les conditions suivantes*

$$(b) \quad \mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) \text{ pour tout } \mathfrak{b} \in \mathcal{B},$$

$$(c) \quad \sum_{n \in \mathbf{N}^6} \mu(\mathfrak{p}^n) \beta(\mathfrak{p}^n) = \left( 1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \right)^2 \left( 1 + \frac{2}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} \right) = \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \overline{V})},$$

$$(d) \quad \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} |\mu(\mathfrak{b}) \beta(\mathfrak{b})| < +\infty.$$

La démonstration est la même que dans la partie 8.5.



**9.6. Énoncé du résultat.** — Tous les éléments sont donc réunis pour reproduire la fin de la démonstration du cas précédent et démontrer la formule 2.2.1 dans ce cas.

**Théorème 9.6.1.** — *Soit  $V$  est la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant un point rationnel sur  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ . Soit  $U$  le complémentaire dans  $V$  du diviseur exceptionnel. Alors*

$$n_U(B) \sim C_H(V) \log^{t-1} B$$

où  $t = \text{rg Pic } V = 2$ .

En outre, on vérifie aisément que si  $N_v = 1$

$$\omega_v(\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2) = 16$$

et si  $N_v = 2$

$$\omega_v(\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2) = 4(2\pi)^2.$$

## 10. Cas de l'éclatement en deux points rationnels

**10.1. Construction de la hauteur.** — Dans toute cette partie,  $V$  est la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant les points

$$P_1 = (0 : 0 : 1) \text{ et } P_2 = (0 : 1 : 0)$$

sur  $\mathbf{P}_k^2$ . On note  $L_i$  les diviseurs au-dessus de  $P_i$  et  $L_{1,2}$  le diviseur au-dessus de la droite  $X_1 = 0$ . On note  $U$  l'ouvert  $V - L_1 - L_2 - L_{1,2}$ . Un diviseur canonique est donné par

$$K = L_1 + L_2 - 3\Lambda$$

et la hauteur peut être prise de la forme

$$H((x_1 : x_2 : x_3)) = \prod_{v \in M_k} \sup(|x_1|_v^3, \sup_{\substack{i \neq j \\ j \neq 1}} |x_i x_j^2|_v).$$

**10.2. Réécriture de la hauteur.** — On fixe un idéal  $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$ . Comme d'habitude, on se ramène à calculer le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$  des éléments  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3$  vérifiant les conditions

$$(10.2.1) \quad (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a}$$

$$(10.2.2) \quad H((x_1 : x_2 : x_3)) \leq B$$

$$(10.2.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq 3$$

$$(10.2.4) \quad j(x) \in \Delta_H.$$

En outre

$$H((x_1 : x_2 : x_3)) = \frac{H_\infty(x_1, x_2, x_3)}{N(\mathfrak{a})N((x_1, x_2)(x_1, x_3))}.$$

On note  $\mathcal{H}_\alpha$  l'ensemble des  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3$  vérifiant les conditions (10.2.1) et (10.2.3) ci-dessus et  $\mathcal{H}'$  l'ensemble des  $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3)$  tels que, pour tout  $\mathfrak{p} \in M_f$ , on ait

$$((C_p)) \quad \begin{cases} \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_i), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_i)) = 0 \text{ pour } i = 2, 3 \\ \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_2), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}_3)) = 0 \\ \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_2)) = 0 \\ \inf(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_1), \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_3)) = 0. \end{cases}$$

On définit  $\rho : \mathcal{H}_\alpha \rightarrow \mathcal{H}'$  par  $\rho(x_1, x_2, x_3) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{d})$  avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_3 &= (x_1, x_2)\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{d}_2 &= (x_1, x_3)\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_1 &= (x_1)\mathfrak{d}_3^{-1}\mathfrak{d}_2^{-1}\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_2 &= (x_2)\mathfrak{d}_3^{-1}\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_3 &= (x_3)\mathfrak{d}_2^{-1}\mathfrak{a}^{-1}. \end{aligned}$$

Pour tout  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}) \in \mathcal{H}'$ , on note  $n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})}(B)$  le cardinal de l'ensemble des  $x \in \mathcal{H}_\alpha$  qui vérifient

$$((10.2.1)) \quad \begin{cases} (x_1) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_3\mathfrak{d}_2 \\ (x_2) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}_3 \\ (x_3) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_3\mathfrak{d}_2 \end{cases}$$

ainsi que

$$((10.2.2')) \quad H_\infty(x) \leq BN(\mathfrak{a}^3\mathfrak{d}_3\mathfrak{d}_2)$$

$$((10.2.4)) \quad j(x) \in \Delta_H.$$

**Lemme 10.2.1.** —

$$\#\mathcal{N}'_\alpha(B) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{H}'} n_{\mathfrak{b}}(B).$$

**10.3. Estimations sur le corps des rationnels.** — On utilise des notations analogues à celles de la section 8.3.

**Lemme 10.3.1.** — Si  $k = \mathbf{Q}$ , il existe une constante  $C_1$  telle que

$$\frac{\text{Vol } \mathcal{D}_B}{c_1 c_2 c_3} - C_1 \left( \frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_2 c_3} + \frac{1}{c_3 c_1} \right) B^{2/3} \leq m_{c_1, c_2, c_3}(B) \leq \frac{\text{Vol } \mathcal{D}_B}{c_1 c_2 c_3}.$$

En outre,  $m_{c_1, c_2, c_3}(B)$  est nul si  $c_1 > B^{1/3}$ .

#### 10.4. Sommation sur les idéaux

**Lemme 10.4.1.** — Avec les notations usuelles,

$$P_{b_0, d_0}(B) = \sum_{\mathfrak{d} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)^2} m_{c_1^0 d_2 d_3, c_2^0 d_3, c_3^0 d_2}(B_0 N(\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_3))$$

où

$$\begin{aligned} B_0 &= BN(\mathfrak{a}^3 \mathfrak{d}_2^0 \mathfrak{d}_3^0) \\ c_1^0 &= \mathfrak{a} b_1^0 \mathfrak{d}_2^0 \mathfrak{d}_3^0 \\ c_2^0 &= \mathfrak{a} b_2^0 \mathfrak{d}_3^0 \\ c_3^0 &= \mathfrak{a} b_3^0 \mathfrak{d}_2^0. \end{aligned}$$

**Lemme 10.4.2.** — Sur  $\mathbf{Q}$ , on a l'équivalence

$$P_{b, d}(B) \sim C'' \frac{B \log^2 B}{b_1 b_2 b_3 d_2 d_3} \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

où

$$C'' = 3\alpha_c(V) \text{Vol } \mathcal{D}_1 \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^2 \zeta_{\mathbf{Q}}^2(s)$$

et il existe une constante  $C_2$  telle que

$$P_{b, d}(B) \leq \text{Vol } \mathcal{D}_1 \frac{B(\log B + C_2)^2}{b_1 b_2 b_3 d_2 d_3}.$$

**Remarque 10.1.** — Si le lemme 10.3.1 se généralisait à un corps de nombres quelconque, on obtiendrait un lemme analogue avec

$$C'' = \alpha_c(V) \frac{w}{h \sqrt{d}^2} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^3 \zeta_k^3(s) \prod_{\nu \in M_\infty} \omega_\nu(V_\nu).$$

*Démonstration.* — Ici  $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$ ,  $B_0 = B d_2^0 d_3^0$ ,  $c_1^0 = b_1^0 d_2^0 d_3^0$ ,  $c_2^0 = b_2^0 d_3^0$  et  $c_3^0 = b_3^0 d_2^0$ .

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(d_2, d_3) \in (\mathbf{N}^+)^2} m_{c_1^0 d_2 d_3, c_2^0 d_3, c_3^0 d_2}(B_0 d_2 d_3) \\ &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_1 &= \text{Vol } \mathcal{D}_1 \frac{B_0}{c_1^0 c_2^0 c_3^0} \sum_{\substack{(d_2, d_3) \in (\mathbf{N}^+)^2 \\ d_2 d_3 \leq \frac{B_0^{1/2}}{c_1^{3/2}}}} \frac{1}{d_2 d_3} \\
&\sim \frac{\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^2 \zeta_{\mathbf{Q}}^2(s) \text{Vol } \mathcal{D}_1 B \log^2 B}{b_1^0 b_2^0 b_3^0 d_2^0 d_3^0} \text{Vol} \{x \in \mathbf{R}^{+2} \mid x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}\} \\
&\sim \frac{3\alpha_c(V) \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^2 \zeta_{\mathbf{Q}}^2(s) \text{Vol } \mathcal{D}_1 B \log^2 B}{b_1^0 b_2^0 b_3^0 d_2^0 d_3^0}.
\end{aligned}$$

En outre,  $A_2 = O(B \log B)$ . La majoration uniforme s'obtient comme dans les cas précédents.  $\square$

**10.5. Formule d'inversion.** — Comme dans les cas précédents, on démontre le lemme suivant

**Lemme 10.5.1.** — *Il existe une unique fonction  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Z}$  telle que*

$$(a) \quad \chi_{\mathcal{H}'} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \mu(\mathfrak{b}) \chi_{(\mathfrak{b})}.$$

*Cette fonction vérifie en outre les conditions suivantes*

$$(b) \quad \mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) \text{ pour tout } \mathfrak{b} \in \mathcal{B},$$

$$(c) \quad \sum_{n \in \mathbf{N}^F} \mu(\mathfrak{p}^n) \beta(\mathfrak{p}^n) = \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \overline{V})},$$

$$(d) \quad \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} |\mu(\mathfrak{b}) \beta(\mathfrak{b})| < +\infty.$$

### 10.6. Enoncé du résultat

**Théorème 10.6.1.** — *Soit  $V$  la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant deux points distincts sur  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ . Soit  $U$  le complémentaire dans  $V$  des diviseurs exceptionnels.*

*Alors*

$$n_U(B) \sim C_H(V) B \log^{t-1} B \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

où  $t = \text{rg Pic } V = 3$ .

La fin de la démonstration est identique à celle du théorème 8.6.1.

## 11. Cas de l'éclatement en deux points conjugués

**11.1. Construction de la hauteur.** — On note  $V$  la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant un zéro-cycle  $D$  de  $\mathbf{P}_k^2$  tel que  $D$  s'écrive comme somme de deux points sur  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ . Il existe donc un élément  $a \in \mathcal{O}_k$  tel que  $D = P_1 + P_2$  sur  $K = k(\sqrt{a})$ . On suppose que  $a \notin k^{*2}$  et on note  $\bar{\cdot}$  le générateur de  $\text{Gal}(K/k)$  et  $\alpha$  une racine carrée de  $a$  dans  $K$ . On peut se ramener à

$$P_1 = (0 : 1 : \alpha) \text{ et } P_2 = (0 : 1 : -\alpha).$$

Dans la suite, on fera les hypothèses suivantes

- $(a, 2) = \mathcal{O}_k$ ,
- $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_k[\alpha]$ ,
- $\forall \mathfrak{p} \in M_f, \mathfrak{p} | 2a \Rightarrow a \notin k_{\mathfrak{p}}^2$ ,
- si  $\mathfrak{p} | 2$  alors  $k_{\mathfrak{p}}/\mathbf{Q}_2$  est non ramifiée.

On note  $S$  l'ensemble des places ramifiées par l'extension  $K/k$  et

$$S_K = \{\mathfrak{B} \in M_K \mid \mathfrak{B} | \mathfrak{p}\}.$$

Soit  $L$  le diviseur de  $V$  au-dessus de  $D$ ,  $L'$  le diviseur au-dessus de la droite  $D'$  définie par  $X_0 = 0$  et  $U$  leur complémentaire que l'on identifie avec son image dans  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ . Un diviseur canonique est défini par

$$-K = 3\Lambda - L.$$

Sur le corps  $K$ , on note

$$Z_0 = X_0, Z_1 = X_2 - \alpha X_1 \text{ et } Z_2 = X_2 + \alpha X_1.$$

Une base de  $\Gamma(V_K, \omega_{V_K}^{-1})$  est donc donnée par les monômes en  $Z_0, Z_1, Z_2$  distincts de  $Z_1^3$  et de  $Z_2^3$ . La famille  $(s'_i)_{1 \leq i \leq 12}$  définie par les polynômes

$$\begin{aligned} Y'_1 &= X_0^3, & Y'_2 &= X_0^2 Z_1, & Y'_3 &= X_0^2 Z_2, & Y'_4 &= X_0^2 X_1, \\ Y'_5 &= X_0^2 X_2, & Y'_6 &= X_0 Z_1 Z_2, & Y'_7 &= X_0 Z_1 X_1, & Y'_8 &= X_0 Z_1 X_2, \\ Y'_9 &= X_0 Z_2 X_1, & Y'_{10} &= X_0 Z_2 X_2, & Y'_{11} &= X_1 Z_1 Z_2, & Y'_{12} &= X_2 Z_1 Z_2 \end{aligned}$$

est donc une famille génératrice de  $\Gamma(V_K, \omega_{V_K}^{-1})$ . Par ailleurs une base de  $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$  est donnée par les polynômes

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_0^3, & Y_2 &= X_0^2 X_1, & Y_3 &= X_1^2 X_0, & Y_4 &= X_2^2 X_0, \\ Y_5 &= X_0^2 X_2, & Y_6 &= X_1(X_2^2 - \alpha X_1^2), & Y_7 &= X_2(X_2^2 - \alpha X_1^2), & Y_8 &= X_0 X_1 X_2. \end{aligned}$$

Pour tout  $v \in M_k$ , on définit une métrique  $\|\cdot\|_v$  sur  $\omega_V^{-1}$  de la manière suivante pour tout  $x \in V(k_v)$  et tout  $s \in \Gamma(V_v, \omega_V^{-1})$  tel que  $s(x) \neq 0$ ,

$$\|s(x)\|_v = \begin{cases} \left( \prod_{\substack{v' \in M_K \\ v'|v}} \sup_{1 \leq i \leq 12} \sqrt{\left| \frac{s'_i(x)}{s(x)} \right|_{v'}} \right)^{-1} & \text{si } v \in M_{f,k} \\ \prod_{\substack{v' \in M_K \\ v'|v}} \left( \sum_{1 \leq i \leq 12} \left| \frac{s'_i(x)}{s(x)} \right|_{v'}^{\frac{2}{[k_{v'}:k_v]}} \right)^{-\frac{[k_{v'}:k_v]}{4}} & \text{si } k_v \rightarrow \mathbf{R} \\ \prod_{\substack{v' \in M_K \\ v'|v}} \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq 12} \left| \frac{s'_i(x)}{s(x)} \right|_{v'}}^{-1} & \text{si } k_v \rightarrow \mathbf{C}. \end{cases}$$

Cela définit bien une métrique adélique. En effet, comme  $\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}|2a\} \subset S$ , pour tout  $(x_0 : x_1 : x_2) \in U$ , on a l'égalité

$$(Y'_i(x_0, x_1, x_2), 1 \leq i \leq 12)_{\mathcal{O}_{S_K}} = (Y_i(x_0, x_1, x_2), 1 \leq i \leq 8)_{\mathcal{O}_{S_K}}.$$

En dehors de  $S$  la métrique  $\|\cdot\|_v$  est donc la métrique associée à la base définie par les polynômes  $Y_i$ . La hauteur correspondante est alors donnée par

$$\forall P \in V(k), H(P) = \prod_{v \in M_k} \|s(x)\|_v^{-1}$$

où  $s$  est une section de  $\omega_V^{-1}$  non nulle en  $x$ .

**11.2. Réécriture de la hauteur.** — Jusqu'à la section 11.5, on fixe un idéal  $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k)$ . On se ramène à estimer le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$  des  $x \in \mathcal{O}_k^3$  tels que

$$(11.2.1) \quad (x_0, x_1, x_2) = \mathfrak{a},$$

$$(11.2.2) \quad H(x) \leq B,$$

$$(11.2.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq 2,$$

$$(11.2.4) \quad j(x) \in \Delta_H.$$

Pour tout  $(x_0 : x_1 : x_2) \in U$ , on a la relation

$$H(x_0 : x_1 : x_2) = \frac{H_\infty(x_0, x_1, x_2)}{N((Y'_i(x_0, x_1, x_2), 1 \leq i \leq 12))^{1/2}}$$

avec

$$H_\infty(x_0, x_1, x_2) = \prod_{v \in M_\infty} H_v(x_0, x_1, x_2)$$

où  $H_v(x_0, x_1, x_2)$  est défini par

$$\begin{cases} \sqrt{(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)(x_0^2 + |x_2 + \alpha x_1|^2)(x_0^2 + |x_2 - \alpha x_1|^2)} & \text{si } k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} \\ (|x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2)(|x_0|^2 + |x_2 + \alpha x_1|^2)(|x_0|^2 + |x_2 - \alpha x_1|^2) & \text{si } k_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}. \end{cases}$$

De plus

$$(Y'_i(x_0, x_1, x_2)_{1 \leq i \leq 12}) = (x_0, x_1, x_2)(x_0, x_2 - \alpha x_1)(x_0, x_2 + \alpha x_1).$$

Nous allons donc faire jouer à l'idéal  $\mathfrak{d} = (x_0, x_2 - \alpha x_1)$  le rôle tenu par  $\mathfrak{d}_1$  dans la partie 10. On considère l'ensemble

$$\mathcal{H}_a = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3 \mid \begin{cases} (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \\ x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 3 \end{cases} \right\}$$

et  $\mathcal{H}'$  l'ensemble des triplets  $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k) \times \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)^2$  vérifiant pour tout  $\mathfrak{P}$  dans  $M_{f,K} - S_K$  la condition suivante

$$((C_{\mathfrak{P}})) \quad \begin{cases} \inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}), v_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{d})) = 0 \\ \inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_0 \mathcal{O}_K)) = 0 \\ \inf(v_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{b}_1), v_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{b}_0 \mathcal{O}_K)) = 0 \\ \inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d})) = 0 \\ \inf(v_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{b}_1), v_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{d})) = 0 \end{cases}$$

et pour tout  $\mathfrak{P} \in S_K$ ,

$$((C_{\mathfrak{P}})) \quad \begin{cases} v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}) \leq 1 \\ \inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_0 \mathcal{O}_K)) = 0 \\ \inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}), v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1)) = 0. \end{cases}$$

On note  $\mathcal{B}$  le monoïde  $\mathcal{I}(\mathcal{O}_k) \times \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)^2$  et  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})$  un élément  $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d})$  de  $\mathcal{B}$ . Pour tout  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}) \in \mathcal{B}$ , on note  $n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})}(\mathcal{B})$  le cardinal de l'ensemble des

$$(x_0, x_1, x_2) \in (\mathcal{O}_k - \{0\})^3$$

tels que

$$(11.2.1') \quad \begin{cases} (x_0) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d}) \\ (x_2 + \alpha x_1) = \mathfrak{a}\mathcal{O}_K \mathfrak{b}_1 \bar{\mathfrak{d}} \end{cases}$$

$$(11.2.2') \quad H_\infty(x_0, x_1, x_2) \leq BN(\mathfrak{a})^3 N(\mathfrak{d})$$

$$(11.2.3) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq 2$$

$$(11.2.4) \quad j(x) \in \Delta_H.$$

$$(11.2.5)$$

**Lemme 11.2.1.** —

$$w\#\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(B) = \sum_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}) \in \mathcal{H}' } n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})}(B).$$

*Démonstration.* — On considère l'application

$$\bar{\rho} : \mathcal{H}_{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{O}_k) \times \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)^2$$

définie par  $\rho(x) = (\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d})$  avec

$$\begin{cases} \mathfrak{d} = (x_0, x_2 - \alpha x_1)(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K)^{-1} \\ \mathfrak{b}_0 = (x_0)N_{K/k}(\mathfrak{d})^{-1}\mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_1 = (x_2 + \alpha x_1)\bar{\mathfrak{d}}^{-1}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K)^{-1}. \end{cases}$$

Soit  $x \in \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$ . Comme dans les cas précédents on montre que si  $\mathfrak{P} \in M_{f,K} - S_K$  alors  $\bar{\rho}(x)$  vérifie  $(C_{\mathfrak{P}})$ . Soit  $\mathfrak{P} \in S_K$  et  $\mathfrak{p}$  la place induite sur  $k$ . Comme par hypothèse  $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_k[\alpha]$  et  $\alpha$  est premier à 2, deux cas sont possibles soit  $\mathfrak{p}|\alpha$  et alors  $v_{\mathfrak{p}}(\alpha) = 1$  ou bien  $\mathfrak{p} \nmid 2$  et alors une uniformisante pour  $K_{\mathfrak{P}}$  est donnée par  $\pi = \alpha + u$  avec  $u \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^*$ .

Supposons que  $v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}) \geq 2$ . Alors  $v_{\mathfrak{P}}(x_0) \geq v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K) + 1$ . En outre,

$$v_{\mathfrak{P}}(x_2 + \alpha x_1) = v_{\mathfrak{P}}(x_2 - \alpha x_1) \geq v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K) + 2.$$

Si  $\mathfrak{P}|\alpha$  alors on obtient que  $v_{\mathfrak{P}}(x_2) \geq v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K) + 2$ , donc

$$v_{\mathfrak{P}}(x_1) = v_{\mathfrak{P}}(\alpha x_1) - 1 \geq v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_K) + 1$$

Ceci implique que  $\inf(v_{\mathfrak{p}}(x_1), v_{\mathfrak{p}}(x_2), v_{\mathfrak{p}}(x_3)) \geq v_{\mathfrak{p}}(\alpha) + 1$  ce qui est en contradiction avec  $x \in \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$ . Si  $\mathfrak{p} \nmid 2$ , nous posons  $x'_0 = x_0$ ,  $x'_1 = x_1$  et  $x'_2 = x_2 + ux_1$  où  $u \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}$  est défini comme ci-dessus. Alors

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{P}}(x'_2 + \pi x'_1) &= v_{\mathfrak{P}}(x'_2 - \pi x'_1), \\ v_{\mathfrak{P}}(x_2 - \alpha x_1) &= v_{\mathfrak{P}}(x'_2 - \pi x'_1) \end{aligned}$$



et

$$v_p(\mathfrak{a}) = \inf(v_p(x'_0), v_p(x'_1), v_p(x'_2)).$$

Un raisonnement analogue fournit donc la contradiction recherchée. Le fait que

$$\inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_0 \mathcal{O}_K)) = 0$$

est immédiat. Si  $\inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}_1), v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d})) \geq 1$  alors

$$v_{\mathfrak{P}}(x_2 + \alpha x_1) \geq v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a} \mathcal{O}_K) + 2$$

et

$$v_p(x_0) \geq v_p(\mathfrak{a}) + 1.$$

Ceci contredit également  $x \in \mathcal{H}_a$ . On note  $\rho : \mathcal{H}_a \rightarrow \mathcal{H}'$  l'application induite.

Par définition de  $\rho$ , si  $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) = \rho(x)$  alors  $x$  vérifie (11.2.1'). Il reste à vérifier que si  $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) \in \mathcal{H}'$  et si  $x$  vérifie (11.2.1') alors  $x \in \mathcal{H}_a$  et  $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) = \rho(x)$ . Les conditions  $(C_{\mathfrak{P}})$  impliquent que

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}} & \not\mid \mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d}) \mathcal{O}_K + \mathfrak{b}_1 \overline{\mathfrak{d}} \quad \text{si } \mathfrak{p} \text{ est sordé dans } K/k, \\ \mathfrak{P} & \not\mid \mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d}) \mathcal{O}_K + \mathfrak{b}_1 \overline{\mathfrak{d}} \quad \text{si } [K_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{P}}] = 2 \text{ et } \mathfrak{p} \notin S_K, \\ \mathfrak{P}^2 & \not\mid \mathfrak{b}_0 N_{K/k}(\mathfrak{d}) \mathcal{O}_K + \mathfrak{b}_1 \overline{\mathfrak{d}} \quad \text{si } \mathfrak{P} \in S_K \end{array}$$

Par conséquent pour tout  $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$ ,  $\inf_{1 \leq i \leq 3} v_p(x_i) \leq v_p(\mathfrak{a})$ . L'égalité se montre comme dans les cas précédents lorsque  $\mathfrak{p} \notin S$ . Soit maintenant  $\mathfrak{p} \in S$  et  $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ . Si  $\mathfrak{p}^k \mid \mathfrak{a}$  alors  $\mathfrak{p}^k \mid x_0$  et  $\mathfrak{P}^{2k} \mid x_2 + \alpha x_1$ . Donc, dans le cas où  $\mathfrak{p} \mid a$

$$\mathfrak{P}^{2k} \mid x_2 \text{ et } \mathfrak{P}^{2k-1} \mid x_1$$

Donc  $\mathfrak{p}^k \mid x_2$  et  $\mathfrak{p}^k \mid x_1$ . On raisonne de façon similaire avec  $x_0, x_1$  et  $x_1 + ux_2$  si  $\mathfrak{p} \mid 2$ . Enfin les conditions  $(C_{\mathfrak{P}})$  impliquent directement l'égalité  $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{d}) = \rho(x)$ .

On a donc démontré  $n_{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})}(B) = \#\rho^{-1}(\{(\mathfrak{b}, \mathfrak{d})\})$ .  $\square$

**11.3. Estimations dans un cas particulier.** — Etant donné  $\mathfrak{c} = (\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1) \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_k) \times \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)$ , on veut estimer le nombre  $m_{\mathfrak{c}}(B)$  des points  $(x_0, x_2 + \alpha x_1) \in$

$\mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_1$  tels que

$$((11.2.2')) \quad H_\infty(x) \leq B$$

$$((11.2.3)) \quad x_i \neq 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq 2$$

$$((11.2.4)) \quad j(x) \in \Delta_H.$$

On note

$$\mathcal{D}_B = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{R}^{3N} \mid (x_0, x_1, x_2) \in \Delta_h \text{ et } H_\infty(x_0, x_1, x_2) \leq B\}.$$

**Lemme 11.3.1.** — Si  $k = \mathbf{Q}$  et  $a = -1$  alors pour tout  $c_0 \in \mathbf{N}^+$  et tout  $c_1 \in \mathbf{Z}[i] - \{0\}$ , on a

$$\frac{B \text{Vol } \mathcal{D}_1}{c_0 N((c_1))} - C_2 B^{2/3} \left( \frac{1}{|c_1| c_0} + \frac{1}{N((c_1))} \right) \leq m_{c_0, c_1}(B) \leq \frac{B \text{Vol } \mathcal{D}_1}{c_0 N((c_1))} + C_2 \frac{B^{2/3}}{|c_1| c_0}$$

et  $m_{c_0, c_1}(B)$  est nul si  $c_0 > B^{1/3}$  ou  $N(c_1) > B^{2/3}$ .

**Remarque 11.1.** — Dans le cas général, il faudrait pouvoir majorer

$$\left| m_{(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1)}(B) - \frac{B \text{Vol } \mathcal{D}_1}{\text{Det}(M)} \right|$$

où  $M$  est l'image de  $\mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_1$  dans  $\prod_{v \in M_\infty} k_v^3$  par l'application induite par l'isomorphisme de groupes  $\mathcal{O}_k \times \mathcal{O}_k[\alpha] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_k^3$  et

$$\text{Det}(M) = \frac{N(\mathfrak{c}_0) \times N(\mathfrak{c}_1) \sqrt{d}^3}{2^{3r_2}}.$$

*Démonstration.* — Dans ce cas particulier, notre choix de la norme pour la place réelle donne

$$H_\infty(x_0, x_1, x_2) = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)^{3/2}$$

ce qui implique la deuxième assertion.

On note  $H_\infty(x_0, x_2 + ix_1) = H_\infty(x_0, x_1, x_2)$ . On a alors les majorations

$$\begin{aligned}
& m_{(c_0, c_1)}(B) \\
&= 8\# \left\{ (n_0, n_1, n_2) \in \mathbf{N}^3 \left| \begin{array}{l} H_\infty(n_0 c_0, n_2 c_1 + i n_1 c_1) \leq B \\ n_0 \neq 0 \\ n_2 \neq 0 \end{array} \right. \right\} \\
&\leq \frac{8}{c_0 N((c_1))} \text{Vol} \left\{ x \in \mathbf{R}^{+3} \left| H_\infty \left( c_0 E \left( \frac{x_0}{c_0} \right) + c_0, c_1 E \left( \frac{x_2}{|c_1|} \right) + i c_1 E \left( \frac{x_1}{|c_1|} \right) + (1+i)c_1 \right) \leq B \right. \right\} \\
&\quad + 8\# \{ (n_0, n_1) \in \mathbf{N}^{+2} \mid H_\infty(n_0 c_0, n_1 c_1) \leq B \} \\
&\leq \frac{\text{Vol } \mathcal{D}_B}{c_0 N((c_1))} + C_2 \frac{B^{2/3}}{|c_1| c_0}.
\end{aligned}$$

La minoration se montre comme dans les cas précédents.  $\square$

**11.4. Sommation sur les idéaux.** — Comme précédemment, on définit (b) et  $P_b^a(B)$ .

**Lemme 11.4.1.** — Soit  $(b_0^0, b_1^0, \mathfrak{d}^0) \in \mathcal{B}$ , soient  $\mathfrak{c}_0^0 = \text{ab}_0^0 N_{K/k}(\mathfrak{d}^0)$  et  $\mathfrak{c}_1^0 = \text{ab}_1^0 \overline{\mathfrak{d}^0}$ .

$$P_{(b^0, \mathfrak{d}^0)}(B) = \sum_{\mathfrak{d} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_K)} m_{(\mathfrak{c}_0^0 N_{K/k}(\mathfrak{d}), \mathfrak{c}_1^0 \overline{\mathfrak{d}})}(BN(\mathfrak{a}^3)N(\mathfrak{d}^0 \mathfrak{d})).$$

**Lemme 11.4.2.** — Si  $k = \mathbf{Q}$  et  $a = -1$  alors on a l'équivalence

$$P_{(b^0, d^0)}(B) \sim C'' \frac{B \log B}{b_0^0 N(b_1^0) N(d^0)}$$

où

$$C'' = 3\alpha_c(V) \text{Vol } \mathcal{D}_1 \lim_{s \rightarrow 1} \zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s)(s-1)$$

et, pour  $B > 1$ , la majoration

$$P_{(b^0, d^0)}(B) \leq C_3 \frac{B(\log B + C_4)}{b_0^0 N(b_1^0) N(d^0)}$$

où  $C_3$  et  $C_4$  sont des constantes indépendantes de  $B$ , de  $b^0$  et de  $d^0$ .

**Remarque 11.2.** — Si le lemme 11.3.1 se généralisait au cas général, on obtiendrait un lemme analogue avec

$$C'' = 3\alpha_c(V) \text{Vol } \mathcal{D}_1 \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_K(s).$$

*Démonstration.* — Comme dans la partie 10.4, on décompose la somme en deux facteurs  $P_b(B) = A_1 + A_2$ .

- Nous commençons par estimer  $A_1$

$$A_1 = \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{B}{b_0^0 N(b_1^0) N(d^0)} \sum_{\substack{\mathfrak{d} \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(i)}) \\ N(\mathfrak{d}) \leq B^{1/3} N(\mathfrak{d})^{1/3}}} \frac{1}{N(\mathfrak{d})}.$$

Par le théorème d'Hardy-Littlewood-Karamata (cf. [Te, théorème II.7.8]),

$$A_1 \sim \text{Vol}(\mathcal{D}_1) \frac{B}{b_0^0 N(b_1^0) N(d^0)} \left( \frac{\log B}{2} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s) \right).$$

- Nous allons maintenant majorer  $A_2$ .

$$|A_2| \leq C_2 B^{2/3} 2 \sum_{N(\mathfrak{d}) \leq B^{1/2}} \frac{N(\mathfrak{d})^{2/3}}{N(\mathfrak{d})}.$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{N(\mathfrak{d}) \leq B^{1/2}} \frac{1}{N(\mathfrak{d})^{1/3}} &\leq 1 + \int_{r \leq B^{1/4}} \frac{1}{r^{2/3}} r dr d\theta \\ &\leq 1 + \frac{3}{2} \pi B^{1/3} \end{aligned}$$

- Majorons maintenant  $P_{(b^0, d^0)}$  de manière uniforme.

$$m_{c_0, c_1}(B) \leq (\text{Vol } \mathcal{D}_1 + C_2) \frac{B}{c_0 N(c_1)}.$$

Par conséquent,

$$P_{(b^0, d^0)}(B) \leq C_5 B \frac{1}{c_0^0 N(c_1^0)} \sum_{N(\mathfrak{d}) \leq B^{1/2}} \frac{1}{N(\mathfrak{d})}.$$

Or il existe des constantes  $C_6$  et  $C_7$  telles que

$$\sum_{N(\mathfrak{p}) \leq B^{1/2}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \leq C_6 \log B + C_7. \quad \square$$

**Lemme 11.4.3.** —

$$\zeta_{K, S_K}(s) = \frac{L_S(s, \text{Pic } \overline{V})}{\zeta_{k, S}(s)}.$$

*Démonstration.* — Si  $\mathfrak{p}$  est scindé par  $K$ , alors

$$\begin{aligned} \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^2} \\ &= L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \overline{V}) \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right). \end{aligned}$$

Sinon

$$\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^{2s}}\right)} = L_{\mathfrak{p}}(s, \text{Pic } \overline{V}) \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right). \quad \square$$

**Lemme 11.4.4.** —

$$\alpha_c(V) = \frac{1}{6}.$$

*Démonstration.* —  $\text{Pic } V$  a pour base  $[\Lambda]$ ,  $[L]$ . Le domaine

$$\left\{ x \in \text{Pic } V^{\vee} \otimes \mathbf{R} \left| \begin{cases} \forall C \text{ effectif } x([C]) > 0 \\ x(\omega_V^{-1}) = 1 \end{cases} \right. \right\}$$

a donc pour équation

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y > 0 \\ 3x - y = 1. \end{cases}$$

Par conséquent

$$\theta_{\omega_V^{-1}}(C_{\text{eff}}^{\vee}(V) \cap \mathcal{H}_{\omega_V^{-1}}(1)) = \frac{1}{6}. \quad \square$$

On obtient donc le lemme suivant

**Lemme 11.4.5.** —

$$C'' = \alpha_c(V) \frac{w}{h\sqrt{d}^2} \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}} \zeta_{k,\mathfrak{p}}(1) \prod_{\mathfrak{P} \in \mathcal{S}_K} \zeta_{K,\mathfrak{P}}(1) \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^2 L_{\mathcal{S}}(s, \text{Pic } \overline{V}) \prod_{\nu \in M_{\infty}} \omega_{\nu}(V_{\nu}).$$

**11.5. Formule d'inversion.** — On utilise des notations  $\mathfrak{b}|\mathfrak{b}'$ ,  $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$ ,  $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$  et  $\beta(\mathfrak{b})$  analogues à celles de la partie 8.5. Si  $\mathfrak{p} \in M_f$ , on note

$$\mathcal{B}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{b} \in \mathcal{B} \mid \nu_{\mathfrak{p}'}(\mathfrak{b}) = 0 \text{ si } \mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}\}.$$

**Lemme 11.5.1.** — *Il existe une unique fonction  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Z}$  telle que*

$$(a) \chi_{\mathcal{H}'} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} \mu(\mathfrak{b}) \chi(\mathfrak{b}).$$

Cette fonction vérifie en outre

$$(b) \text{ Pour tout } \mathfrak{b} \in \mathcal{B}, \mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}),$$

$$(c) \text{ Si } \mathfrak{p} \notin S, \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}(\mathfrak{p})} \mu(\mathfrak{b}) \beta(\mathfrak{b}) = \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic } \overline{V})},$$

(d) Si  $\mathfrak{p} \in S$ , on note  $\mathfrak{P} \in S_K$  l'idéal au-dessus de  $\mathfrak{p}$ ,

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}(\mathfrak{p})} \mu(\mathfrak{b}) \beta(\mathfrak{b}) \zeta_{K, \mathfrak{P}}(1) \zeta_{k, \mathfrak{p}}(1) = \omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}}),$$

$$(e) \sum_{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}} |\mu(\mathfrak{b}) \beta(\mathfrak{b})| < +\infty.$$

*Démonstration.* — • Les assertions (a) et (b) se démontrent comme dans la partie 8.5.

• Démontrons (c) en distinguant les cas où  $\mathfrak{p}$  est scindé et le cas où il ne l'est pas. Si  $\mathfrak{p}$  est scindé, soient  $\mathfrak{P}_1$  et  $\mathfrak{P}_2$  les idéaux au-dessus de  $\mathfrak{p}$ . Si  $n \in \mathbf{N}^5$ , on note

$$\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^{n_1}, \mathfrak{P}_1^{n_2} \mathfrak{P}_2^{n_3}, \mathfrak{P}_1^{n_4} \mathfrak{P}_2^{n_5})$$

la fonction  $n \mapsto \mu(\mathfrak{p}^n)$  est la même que celle qui apparaît dans le cas scindé. Dans ce cas (c) résulte donc de l'assertion (c) du lemme 10.5.1.

Dans le cas contraire, on note  $\mathfrak{P}$  l'idéal au-dessus de  $\mathfrak{p}$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}^3$

$$\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^{n_1}, \mathfrak{P}^{n_2}, \mathfrak{P}^{n_3}).$$

L'entier  $\mu(\mathfrak{p}^n)$  est nul si un des  $n_i$  est supérieur ou égal à 2. En outre

$$\begin{aligned} \mu(0, 0, 0) &= 1, & \mu(0, 0, 1) &= -1, \\ \mu(1, 1, 0) &= -1, & \mu(1, 1, 1) &= 1 \end{aligned}$$

et  $\mu$  est nul pour les autres valeurs de  $n$ . En définitive,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbf{N}^3} \beta(\mathfrak{p}^n) \mu(\mathfrak{p}^n) &= 1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^3} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^5} \\ &= \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) \left(1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) \end{aligned}$$

Mais

$$\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) = L_{\mathfrak{p}}(1, \text{Pic}(\overline{V}))^{-1}$$

et

$$\left(1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) = d_{\mathfrak{p}}(V).$$

• Démontrons l'assertion (d). Dans ce cas  $\mathfrak{p}$  est ramifié dans l'extension  $K/k$ . Soit  $\mathfrak{P}$  l'idéal au-dessus de  $\mathfrak{p}$ . On note  $\mu$  l'application  $\mathbf{N}^3 \rightarrow \mathbf{Z}$  définie par

$$\mu(n) = \mu(\mathfrak{p}^{n_1}, \mathfrak{P}^{n_2}, \mathfrak{P}^{n_3}).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mu(0, 0, 0) &= 1, & \mu(0, 0, 2) &= -1, & \mu(0, 1, 1) &= -1 \\ \mu(1, 1, 0) &= -1, & \mu(1, 1, 1) &= 1, & \mu(0, 1, 2) &= 1. \end{aligned}$$

et les autres valeurs de  $\mu$  sont nulles. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbf{N}^3} \beta(\mathfrak{p}^n) \mu(\mathfrak{p}^n) &= 1 - \frac{3}{N(\mathfrak{p})^2} + \frac{2}{N(\mathfrak{p})^3} \\ &= \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{N(\mathfrak{p})}\right) \end{aligned}$$

et le terme de gauche de l'assertion (d) vaut  $1 + \frac{2}{N(\mathfrak{p})}$ . Le terme de droite est obtenu de la manière suivante

$$\omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}}) = \int_{k_{\mathfrak{p}} \times k_{\mathfrak{p}}} N_{k_{\mathfrak{p}}}((1, x_1, x_2)) N_{K_{\mathfrak{P}}}((1, x_2 + \alpha x_1)) dx_1 dx_2.$$

Or une uniformisante pour  $K_{\mathfrak{P}}$  s'écrit  $\pi = \alpha + u$  avec  $u \in \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}^* \cup \{0\}$ . On se ramène donc à

$$\omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}}) = \int_{k_{\mathfrak{p}} \times k_{\mathfrak{p}}} N_{k_{\mathfrak{p}}}((1, x_1, x_2)) N_{K_{\mathfrak{P}}}((1, x_2 + \pi x_1)) dx_1 dx_2.$$

Soit  $P \in \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})$  et  $(\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2)$  des coordonnées homogènes pour le point  $P$ . L'entier  $N_{K_{\mathfrak{P}}}(x_0, x_2 + \pi x_1)$  est indépendant des relevés choisis dans  $k_{\mathfrak{p}}$ . On le

note  $\phi(P)$ . On obtient

$$\begin{aligned}\omega_{\mathfrak{p}}(V_{\mathfrak{p}}) &= \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} \sum_{P \in \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})} \phi(P) \\ &= \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} \sum_{\substack{P \in \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}) \\ P \neq (0:1:0)}} 1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} N(\mathfrak{p}) \\ &= 1 + \frac{2}{N(\mathfrak{p})}.\end{aligned}$$

- L'assertion (e) se démontre comme dans les cas précédants. □

**11.6. Énoncé du résultat.** — Comme dans les cas précédants, on obtient

**Théorème 11.6.1.** — *Soit  $V$  la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant les points conjugués  $(0 : 1 : i)$  et  $(0 : 1 : -i)$  sur  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^2$ . Soit  $U$  le complémentaire dans  $V$  des diviseurs exceptionnels. Alors*

$$n_U(B) \sim C_H(V) B \log^{t-1} B \text{ quand } B \rightarrow +\infty$$

où  $t = \text{rg Pic } V = 2$ .

Je tiens à remercier J.-L. Colliot-Thélène, Y. Manin, C. Soulé et Y. Tschinkel pour les discussions et les indications qui ont permis la réalisation de ce texte.

### Références

- [Art] E. Artin, *Über eine neue Art von  $L$ -Reihen*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **3** (1924), n° 1, 89–108.
- [BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.
- [Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London **265A** (1962), 245–263.
- [Bl] S. Bloch, *A note on height pairings, Tamagawa numbers and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture*, Invent. Math. **58** (1980), 65–76.
- [Bo] A. Borel, *Linear algebraic groups (Second enlarged edition)*, Graduate Texts in Math., vol. 126, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1991.
- [BoTi] A. Borel et J. Tits, *Compléments à l'article : « groupes réductifs »*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 253–276.
- [Bor] M. V. Borovoi, *On weak approximation in homogeneous spaces of simply connected algebraic groups*, Preprint 89–86, Max-Planck-Institut für Mathematik, 1989.



- [Bki] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4, 5 et 6*, Masson, Paris, 1981.
- [Car] P. Cartier, *Representations of  $\mathfrak{p}$ -adic groups : a survey*, (A. Borel and W. Casselman, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33, Part 1, AMS, Providence, 1979, pp. 111–155.
- [Cas] W. Casselman, *The unramified principal series of  $\mathfrak{p}$ -adic groups I. The spherical function*, Compositio Math. **40** (1980), n° 3, 387–406.
- [CTS] J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.
- [De] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–307.
- [FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.
- [Fu] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [SGA2] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux.*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 2, North Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968.
- [Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1977.
- [HB] D. R. Heath-Brown, *The density of zeros of forms for which weak approximation fails*, Math. Comp. **59** (1992), 613–623.
- [Lac] G. Lachaud, *Une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring*, Enseign. Math. (2) **28** (1982), 139–169.
- [Lan] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math., vol. 544, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1976.
- [Mac] I. G. Macdonald, *Spherical functions on a group of  $\mathfrak{p}$ -adic type.*, Publications of the Ramanujan Institute, vol. 2, 1971.
- [Ma] Y. I. Manin, *Notes on the arithmetic of Fano threefolds*, Compositio Math **85** (1993), 37–55.
- [Mi] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.
- [Ro] M. Rosenlicht, *Toroidal algebraic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 984–988.
- [San] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.
- [Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.
- [Se1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

- [Se2] ———, *Valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (d'après P. Deligne)*, Séminaire Bourbaki 26-ème année, 1973/74, n° 446.
- [Se3] ———, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.
- [SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting rational points on cubic surfaces*, Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992) (C. Ciliberto, E. L. Livorni, and A. J. Sommese, eds.), Contemp. Math., vol. 162, AMS, Providence, 1994, pp. 371–379.
- [Te] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Institut Elie Cartan, Vandœuvre lès Nancy, 1990.
- [Th] J. L. Thunder, *Asymptotic estimates for rational points of bounded height on flag varieties*, Compositio Math. **88** (1993), 155–186.
- [Tit] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, (A. Borel and W. Casselman, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33 Part 1, AMS, Providence, 1979, pp. 29–69.
- [We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

---

1995

EMMANUEL PEYRE, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France

Url: <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre>

- E-mail: [Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr](mailto:Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr)