POINTS DE HAUTEUR BORNÉE SUR UNE SURFACE DE DEL PEZZO

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Soit V la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant trois points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. L'objet de ce texte est de donner une évaluation du nombre de points de V qui ne sont pas situés sur les diviseurs exceptionnels et dont la hauteur est bornée par un nombre réel B. Comme le laissait prévoir un résultat obtenu par Manin, on obtient que ce nombre est équivalent à $CB\ln^3 B$ où C est une constante. Celle-ci peut s'exprimer en termes des densités locales de V, de la fonction L du groupe de Picard de V et du volume d'un domaine fondamental. Les méthodes utilisées donnent également des indications pour obtenir un résultat analogue sur un corps de nombres quelconque.

Abstract. — Let V be the Del Pezzo surface obtained by blowing up three points in general position on $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. The aim of this text is to estimate the number of points on V of bounded height which do not lie on exceptional divisors. Manin had proven that this number should be equivalent to $CB\ln^3 B$ for a constant C. Here we give an expression for C in terms of local densities of V, of the L-function of the Picard group of V and the volume of some fundamental domain. Parts of the proof generalize to an arbitrary number field.

Table des matières

1. Une conjecture de Manin et le théorème de Schanuel

***Notation*. —** Pour tout corps F, on note $\overline{F}$ une clôture algébrique de F.

Pour tout corps de nombres k, $\mathscr{O}_k$ désigne son anneau des entiers et U_k le groupe des unités de k. On notera M_k l'ensemble des places de k, $M_{f,k} \subset M_k$ l'ensemble des idéaux premiers de $\mathscr{O}_k$ et $M_{\infty,k}$ l'ensemble des places à l'infini de k. Pour tout $\mathfrak{p} \in M_k$, on note $k_\mathfrak{p}$ le corps local correspondant et $|\,.\,|_\mathfrak{p}$ la norme associée à $\mathfrak{p}$ définie par (cf. [**Se**], page 9) :

$$\forall x \in k \; |\, x \,|_\mathfrak{p} = |\, N_{k_\mathfrak{p}/\mathbf{Q}_p}(x) \,|_p$$

où $p \in M_\mathbf{Q}$ est l'unique place telle que $\mathfrak{p} \mid p$ et $|\,.\,|_p$ la norme usuelle. En particulier cette norme n'est pas invariante par extension de corps. Pour tout $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$, on désigne par $\mathbf{F}_\mathfrak{p}$ le corps résiduel. Pour tout $v \in M_{\infty,k}$, on note $N_v = [k_v : \mathbf{R}]$

$$\begin{array}{rcl} r_{1,k} & = & \#\{\mathfrak{p} \in M_{\infty,k} \mid N_v = 1\} \\ r_{2,k} & = & \#\{\mathfrak{p} \in M_{\infty,k} \mid N_v = 2\} \\ r_k & = & r_{1,k} + r_{2,k} - 1 \\ N_k & = & r_{1,k} + 2r_{2,k}. \end{array}$$

Pour tout $v \in M_{\infty,k}$ tel que $k_v \tilde{\to} \mathbf{C}$, on fixe un tel isomorphisme.

L'entier w_k désigne le nombre de racines de l'unité dans k, d_k la valeur absolue du discriminant de k et R_k le régulateur de k. On note $\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$ le monoïde des idéaux non nuls de $\mathscr{O}_k$, $\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)$ le sous-monoïde des idéaux principaux non nuls et $h_k = \#\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)$ le nombre de classes d'idéaux. Lorsque $k = \mathbf{Q}$, il nous arrivera d'identifier $\mathscr{I}(\mathscr{O}_\mathbf{Q})$ à $\mathbf{N}^+ = \mathbf{N} - \{0\}$. Si S est un sous-ensemble fini de M_k, on note $\mathscr{O}_S$, l'anneau des S-entiers.

Si V est une surface de Del Pezzo définie sur k et scindée par une extension $\mathbf{K}$ de k, si S est une partie finie de M_k contenant les places de mauvaises réductions, et en particulier les places ramifiées pour l' extension $\mathbf{K}/k$ ou qui en divisent le degré $[\mathbf{K} : k]$, alors V se relève en un schéma projectif et lisse $\mathscr{V}$ au-dessus de $\mathscr{O}_S$. Pour toute algèbre A sur $\mathscr{O}_S$, $\mathscr{V}_A = \mathscr{V} \underset{\mathrm{Spec}\mathscr{O}_S}{\times} \mathrm{Spec}A$. Pour tout $\mathfrak{p} \in M_f - S$, je note $\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}$ le morphisme de Frobenius défini sur $\mathrm{Pic}\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}_\mathfrak{p}}}$. Le terme local de la fonction L associée à $\mathrm{Pic}V = \mathrm{NS}V$ est alors défini par :

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \mathrm{Pic}V) = \frac{1}{\mathrm{Det}(1 - N(\mathfrak{p})^{-s} \mid \mathrm{Pic}\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}} \otimes \mathbf{Q})}$$

et la fonction L_S globale est donnée par le produit eulérien

$$L_S(s, \mathrm{Pic}V) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_k - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \mathrm{Pic}V)$$

qui converge absolument pour $s > 1$. Par ailleurs la densité locale en $\mathfrak{p} \in M_{f,k} - S$ est définie comme :

$$d_{\mathfrak{p}}(V) = \frac{\#V(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{N(\mathfrak{p})^{\dim(V)}}.$$

Le plus souvent nous omettrons k dans ces notations quand le corps de nombres est clairement indiqué par le contexte.

Soient k un corps de nombres, V une surface de Del Pezzo sur k et ω_V le faisceau canonique. On choisit K un diviseur canonique sur V et $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ un système de coordonnées pour $\mid -K \mid$. Comme V est de Del Pezzo, on a un plongement :

$$\Phi : V \to \mathbf{P}_k(\Gamma(V, \omega_V^{-1})).$$

Définition 1.1. — On définit alors la *hauteur* de $P \in V$ par

$$H_{-K}(P) = \prod_{v \in M_k} \sup_{1 \leqslant i \leqslant r} |y_i|_v$$

où $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ sont des coordonnées homogènes pour $\Phi(P)$.

Par la formule du produit, cette hauteur est indépendante du choix des coordonnées homogènes pour $\Phi(P)$. Elle dépend par contre du corps de base k et du système de coordonnées $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$. Soient $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ les diviseurs exceptionnels de V et $U = V - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} L_i$. On suppose que U est défini sur k. On note alors

$$N_U(B) = \#\{P \in U(k) \mid H_{-K}(P) \leqslant B\}$$

qui est un nombre fini. Manin énonce alors la conjecture suivante (cf. en particulier [**FMT**]) :

Conjecture 1. — *On a l'équivalence suivante,*

$$N_U(B) \sim CB \log^{t-1} B \text{ quand } B \to +\infty$$

où $t = \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}V$.

Le but de ce texte est de vérifier cette conjecture en donnant une valeur explicite de la constante C dans des cas simples. Il faut noter que cette valeur C dépend des choix faits lors de la construction de la hauteur. Le cas le plus simple est celui de $\mathbf{P}^2_k$. Dans ce cas, on a $\omega_V = \mathcal{O}(-3)$ et $U = V = \mathbf{P}^2_k$. Le résultat est dû à Schanuel et s'écrit, en remarquant que la hauteur utilisée ici est le cube de celle utilisée dans [**Sc**] :

Théorème 2 **(Schanuel** [**Sc**]**).** — *Pour le plan projectif, on a*

$$N_U(B) \sim CB \text{ quand } B \to +\infty$$

où C est la constante donnée par

$$C = \frac{h}{\zeta_k(3)} \left(\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}} \right)^3 3^{r_1+r_2-1} \frac{R}{w}$$

Grâce à la formule de Dirichlet, on peut réécrire C sous la forme :

$$C = \left(\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_k(s) \right) \frac{1}{\zeta_k(3)} \frac{2^{2r_1}(2\pi)^{2r_2} 3^{r_1+r_2-1}}{d}.$$

Mais, par définition de la fonction ζ_k, on a la relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_k(3)} &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^3} \right) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \right) \left(1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2} \right) \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \operatorname{Pic} V)} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la métrique à l'infini correspondant à notre choix de la hauteur est donnée de la manière suivante : pour tout $v \in M_\infty$, tout $f \in \Gamma(\mathbf{P}^2_{k_v}, \mathcal{O}(3))$ correspondant à un polynôme F homogène de degré trois et tout $P = (x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbf{P}^2_{k_v}$,

$$|f(P)|_v = \inf_{1 \leqslant i \leqslant 3} \left| \frac{F(x_1, x_2, x_3)}{x_i^3} \right|_v$$

En conséquence, le volume correspondant de $\mathbf{P}^2_{k_v}$ est, dans le cas où $k_v = \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_{H_v}(\mathbf{P}^2_{k_v}) &= \int_{\mathbf{R}^2} \inf(1, \frac{1}{|x_1|_v^3}, \frac{1}{|x_2|_v^3}) dx_1\, dx_2 \\
&= 4\left(1 + 2\int_1^{+\infty} dx_1 \int_0^{x_1} \frac{1}{x_1^3} dx_2\right) \\
&= 4\left(1 + 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x_1^2}\, dx_1\right) \\
&= 2^2 \times 3
\end{aligned}$$

et, dans le cas où $k_v = \mathbf{C}$, en remarquant que, avec nos notations, $|\,.\,|_v = |\,.\,|^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_{H_v}(\mathbf{P}^2_{k_v}) &= \int_{\substack{0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r_1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r_2}} \inf\left(1, \frac{1}{r_1^6}, \frac{1}{r_2^6}\right) r_1 r_2\, dr_1\, dr_2\, d\theta_1\, d\theta_2 \\
&= (2\pi)^2 \left(\int_0^1 \int_0^1 r_1 r_2\, dr_1\, dr_2 + 2\int_1^{+\infty} dr_1 \int_0^{r_1} \frac{r_1 r_2}{r_1^6} dr_2\right) \\
&= (2\pi)^2 \left(\frac{1}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{r_1^3} dr_1\right) \\
&= 3\pi^2.
\end{aligned}$$

De plus on a la relation :

$$\frac{\sqrt{d}}{2^{r_2}} = \mathrm{Vol}\Big(\prod_{v \in M_\infty} k_v / \mathscr{O}_k\Big)$$

où $\mathscr{O}_k$ est considéré de manière canonique comme un réseau de $\prod_{v \in M_\infty} k_v$ et où l'on prend la mesure quotient de la mesure de Lebesgues. En définitive la constante C s'écrit :

$$C = \frac{1}{3} \frac{\prod_{v \in M_\infty} \mathrm{Vol}_{H_v}(\mathbf{P}^2_{k_v})}{\mathrm{Vol}\left(\left(\prod_{v \in M_\infty} k_v\right) \Big/ \mathscr{O}_k\right)^2} \left(\lim_{s \to 1} (s-1)^t L(s, \mathrm{Pic} V)\right) \prod_{\mathfrak{p} \in M_k} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \mathrm{Pic} V)}.$$

L'utilisation de termes correctifs sous la forme de facteurs locaux de la fonction L pour faire converger le produit des densités locales est analogue à celle faite par Bloch dans [**Bl**].

Mon but est de démontrer une formule similaire dans le cas où V est obtenue en éclatant trois points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Dans ce cas particulier, Manin avait obtenu le résultat suivant :

Théorème 3 **(Manin [MT]).** — *Si $k = \mathbf{Q}$ et si U désigne le complémentaire des diviseurs exceptionnels sur V, alors*

$$N_U(B) = \exp(O(1))B\log^3 B \textit{ quand } B \to +\infty.$$

2. Enoncé du résultat

Soit V la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant les points

$$P_1 = (1:0:0), \quad P_2 = (0:1:0) \text{ et } P_3 = (0:0:1)$$

sur $\mathbf{P}^2_k$. On note $\pi : V \to \mathbf{P}^2_k$ l'application canonique. Soient L_1, L_2 et L_3 les diviseurs de V au-dessus de P_1,P_2 et P_3 respectivement. Soient $L_{1,2}$, $L_{2,3}$ et $L_{3,1}$ les diviseurs au-dessus des droites (P_1P_2), (P_2P_3) et (P_3P_1) respectivement. L_1, L_2, L_3, $L_{1,2}$, $L_{2,3}$ et $L_{3,1}$ sont les seuls diviseurs exceptionnels de V. On pose donc

$$U = V - L_1 \bigcup L_2 \bigcup L_3 \bigcup L_{1,2} \bigcup L_{2,3} \bigcup L_{3,1}.$$

Par ailleurs un diviseur canonique K peut être défini par

$$-K = 3\Lambda - L_1 - L_2 - L_3$$

où Λ est l'image réciproque par π d'un hyperplan ne contenant aucun des points P_1, P_2, P_3. Notons (X_1, X_2, X_3) le système de coordonnées homogènes sur $\mathbf{P}^2_k$. Les sections de l'opposé du faisceau canonique sont données par les polynômes homogènes de degré trois sans composante de la forme aX_i^3 pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. Autrement dit, on peut choisir comme base de $\Gamma(V, \omega_V)$ les sections associées aux monômes :

$$\begin{array}{rclrclrcl} Y_1 &=& X_1^2X_2, & Y_2 &=& X_1X_2^2, & Y_3 &=& X_2^2X_3, \\ Y_4 &=& X_2X_3^2, & Y_5 &=& X_3^2X_1, & Y_6 &=& X_3X_1^2, \\ Y_7 &=& X_1X_2X_3. &&&&&& \end{array}$$

Je pose donc

$$\begin{aligned} H_{-K}((x_1 : x_2 : x_3)) &= \prod_{\mathfrak{p}\in M_k} \sup_{1\leqslant i\leqslant 7} |\, Y_i(x_1, x_2, x_3)\,|_{\mathfrak{p}} \\ &= \prod_{\mathfrak{p}\in M_k} \sup_{1\leqslant i\leqslant 6} |\, Y_i(x_1, x_2, x_3)\,|_{\mathfrak{p}}\,. \end{aligned}$$

et comme ci-dessus on note :

$$N_U(B) = \#\{P \in U(k)/H_{-K}(P) \leqslant B\}.$$

Théorème 4. — *Si $k = \mathbf{Q}$ alors*

$$N_U(B) \sim C' B \log^3 B \text{ quand } B \to +\infty$$

où

$$C' = \frac{1}{3} \prod_{\mathfrak{p} \in M_k} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \operatorname{Pic} V)}$$

Je donne en outre au cours de la démonstration des éléments suggérant la validité de la formule suivante sur un corps de nombres quelconque :

$$C' = \frac{1}{3 \times 4!} \frac{\prod_{v \in M_\infty} \operatorname{Vol}_{H_v}(\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}_v})}{\operatorname{Vol}\left(\left(\prod_{v \in M_\infty} \mathbf{k}_v\right) \Big/ \mathscr{O}_k\right)^2} \left(\lim_{s \to 1} (s-1)^4 L(s, \operatorname{Pic} V)\right) \prod_{\mathfrak{p} \in M_k} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \operatorname{Pic} V)}.$$

Cette formule coïncide avec celle du théorème dans le cas $k = \mathbf{Q}$.

3. Domaine fondamental pour l'action des unités

La méthode utilisée ici s'inspire directement de celle utilisée dans [**Sc**].

Jusqu'à la section 8, on fixe un idéal $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$. On veut donc déterminer

$$N_{\mathfrak{a}}(B) = \# \mathscr{N}_{\mathfrak{a}}(B)$$

où $\mathscr{N}_{\mathfrak{a}}(B)$ désigne l'ensemble des triplets $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathscr{O}_k^3/U_k$ possédant un représentant (x_1, x_2, x_3) qui vérifie :

$$(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \tag{1}$$

$$H_{-K}((x_1 : x_2 : x_3)) \leqslant B \tag{2}$$

$$x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \tag{3}$$

Soit $\log_H$ l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \log_H : \left(\prod_{v \in M_\infty} k_v^*\right)^3 & \to & \mathbf{R}^{r_1 + r_2} \\ (u_{i,v})_{\substack{v \in M_\infty \\ 1 \leqslant i \leqslant 3}} & \mapsto & \left(\log\left(\sup_{1 \leqslant j \leqslant 6} \left(Y_j(|u_{1,v}|^{N_v}, |u_{2,v}|^{N_v}, |u_{3,v}|^{N_v})\right)\right)\right)_{v \in M_\infty} . \end{array}$$

Par le théorème des unités, la composée

$$U_k \to \prod_{v\in M_\infty} k_v^* \xrightarrow{\text{Diag}} \left(\prod_{v\in M_\infty} k_v^*\right)^3 \xrightarrow{\log_H} \mathbf{R}^{r_1+r_2}$$

est un homomorphisme dont le noyau est le groupe $\mu_\infty(k)$ des racines de l'unité dans k et l'image est un réseau L de rang r_1+r_2-1 dans l'hyperplan P défini par $\sum_{v\in M_\infty} y_v = 0$. Ce réseau est l'image du réseau classique par 3Id et donc $\mathrm{Det} L = 3^r R$. En outre, l'application $\log_H$ est compatible avec l'action de U_k. On projette alors $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ sur P selon le vecteur $(1_v)_{v\in M_\infty}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{pr} : \mathbf{R}^{r_1+r_2} & \to & P \\ (y_v)_{v\in M_\infty} & \mapsto & \left(y_v - \dfrac{1}{r_1+r_2}\displaystyle\sum_{v'\in M_\infty} y_{v'}\right)_{v\in M_\infty} \end{array}$$

On choisit $u_1,\dots,u_r$ une base de l'image de U_k. On note τ_j la base duale. On pose

$$F = \{y \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} \mid 0 \leqslant \tau_j(\mathrm{pr}(y)) < 1\}$$

et

$$\Delta = \log_H^{-1}(F) \subset \left(\prod_{v\in M_\infty} k_v^*\right)^3$$

***Lemme 1* (Schanuel [Sc]).** — *L'ensemble Δ vérifie :*

(i) *Δ est stable sous $\mu_\infty(k)$,*

(ii) $\forall u \in U_k - \mu_\infty(k), \quad u\Delta \bigcap \Delta = \varnothing,$

(iii) $\displaystyle\bigcup_{u\in U_k} u\Delta = \left(\prod_{v\in M_\infty} k_v^*\right)^3$

On en déduit comme dans [**Sc**] le lemme suivant :

Lemme 2. — *En notant $j : k^* \to \prod_{v\in M_\infty} k_v^*$ l'injection canonique, on a*

$$wN_{\mathfrak{a}}(B) = \#\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$$

où $\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$ désigne l'ensemble des $(x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{O}_k^3$ vérifiant les conditions (1), (2) *et* (3) *ci-dessus, ainsi que*

$$(j(x_1), j(x_2), j(x_3)) \in \Delta \tag{4}$$

4. Paramétrisation des points de l'ouvert U

Notons, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3$ et tout $\mathfrak{p} \in M_k$

$$H_{\mathfrak{p}}(x_1, x_2, x_3) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant 6} |\, Y_i(x_1, x_2, x_3)\,|_{\mathfrak{p}}$$

et

$$H_\infty(x_1, x_2, x_3) = \prod_{v \in M_\infty} H_v(x_1, x_2, x_3).$$

On a alors

$$H_{-K}((x_1 : x_2 : x_3)) = \frac{H_\infty(x_1, x_2, x_3)}{N((Y_i(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 6))}.$$

Mais l'idéal $(Y_i(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 6)$ peut également s'écrire

$$(x_1, x_2)(x_2, x_3)(x_3, x_4).$$

En résumé, l'ensemble $\mathcal{N}'_{\mathfrak{a}}$ est l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3$ qui vérifient les conditions (1),(3) et (4) ci-dessus ainsi que

$$(2') \qquad H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN((x_1, x_2))N((x_2, x_3))N((x_3, x_1))$$

Ceci nous amène à introduire la paramétrisation suivante : soit

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{a}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O}_k^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \text{ et } x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3\}$$

Soit $\mathcal{H}'_{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des sextuplets $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$ de $(\mathcal{I}(\mathcal{O}_k))^6$ tels que pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$ on ait :

$$(C_{\mathfrak{p}}) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \inf(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_i), v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_j)) & = & 0 \text{ si } i \neq j \\ \inf(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_i), v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_j)) & = & 0 \text{ si } i \neq j \\ \inf(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_i), v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_i)) & = & 0 \end{array} \right.$$

et tels que les idéaux $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j \mathfrak{b}_l \mathfrak{a}$ soient principaux pour tout triplet $\{i, j, l\}$ tel que $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

Lemme 3. — *Soit $\rho : \mathcal{H}_{\mathfrak{a}} \to \mathcal{H}'_{\mathfrak{a}}$ l'application définie de la manière suivante : pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{H}_{\mathfrak{a}}$*

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$$

avec

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{a}_i & = & (x_j, x_l)\mathfrak{a}^{-1} & \text{si } \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\} \\ \mathfrak{b}_i & = & (x_i).(\mathfrak{a}_j \cap \mathfrak{a}_l)^{-1}\mathfrak{a}^{-1} & \text{si } \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}. \end{array}$$

L'application ρ est une bijection.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que ρ est bien définie. Soient $(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{O}_k^3$ et

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3) = \rho(x_1, x_2, x_3).$$

Soient $\mathfrak{a}'_i = (x_j, x_l)$ si $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$. On a les relations :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}'_i + \mathfrak{a}'_j &= \mathfrak{a} \text{ si } i \neq j \\ \mathfrak{a}_i &= \mathfrak{a}'_i \mathfrak{a}^{-1} \\ \mathfrak{b}_i &= (x_i)(\mathfrak{a}'_j \bigcap \mathfrak{a}'_l)^{-1} \text{ si } \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Des deux premières formules, on déduit que $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = \mathscr{O}_k$ si $i \neq j$ et donc, pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, $\inf(v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_i), v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_j)) = 0$ si $i \neq j$. Soient $\mathfrak{p} \in M_f$ et i, j, l tels que $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$. Par définition, on a $\mathfrak{a}'_l = (x_i, x_j)$ et donc $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}'_l) = \inf(v_\mathfrak{p}(x_i), v_p(x_j))$. Supposons $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}_i$ et $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}_j$ alors $\mathfrak{p} \mid x_i \mathfrak{a}'^{-1}_l$ et $\mathfrak{p} \mid x_j \mathfrak{a}'^{-1}_l$ donc $v_\mathfrak{p}(x_i) \geqslant v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}'_l) + 1$ et $v_\mathfrak{p}(x_j) \geqslant v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}'_l) + 1$ ce qui est contradictoire. Supposons maintenant que $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}_i$. Alors, par définition de $\mathfrak{a}_i$, on a $\mathfrak{p} \mid x_i \mathfrak{a}^{-1}$. Par définition de $\mathfrak{b}_i$, on a $\mathfrak{p} \mid x_j \mathfrak{a}^{-1}$ et $\mathfrak{p} \mid x_l \mathfrak{a}^{-1}$. Mais cela contredit $\mathfrak{a} = (x_1, x_2, x_3)$. Donc $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$ vérifie la condition $(C_\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$. Par ailleurs, pour tout i, j, l tel que $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$, la relation

$$(\mathfrak{a}'_i \bigcap \mathfrak{a}'_j)(\mathfrak{a}'_i + \mathfrak{a}'_j) = \mathfrak{a}'_i \mathfrak{a}'_j$$

entraîne $\mathfrak{a}'_i \cap \mathfrak{a}'_j = \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j \mathfrak{a}$ et donc $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j \mathfrak{b}_l \mathfrak{a} = (x_l)$.

Montrons que l'application τ définie par :

$$\begin{aligned} \mathscr{H}'_\mathfrak{a} &\to \mathscr{H}_\mathfrak{a} \\ (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3) &\mapsto (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_3) \end{aligned}$$

est la réciproque de ρ.

Cette application τ est également bien définie. En effet, si l'élément $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3)$ de $\mathscr{H}'_\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{p} \in M_f$ vérifient

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_3$$

alors

$$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_2 \text{ et } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_3$$

ce qui contredit la condition $(C_\mathfrak{p})$. Donc

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a} \mathfrak{b}_3.$$

De plus le calcul ci-dessus montre que $\tau \circ \rho = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_\mathfrak{a}}$ On vérifie comme ci-dessus que si $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3) \in \mathscr{H}'_\mathfrak{a}$ et si $\mathfrak{p} \in M_f$ alors $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2) = 0$. On en déduit que

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_3$$

ainsi que les relations analogues obtenues par permutation de $\{1, 2, 3\}$. Par conséquent, on obtient que $\rho \circ \tau = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}'_\mathfrak{a}}$ □

En conclusion, on obtient que

$$wN_\mathfrak{a}(B) = \#\mathscr{N}''_\mathfrak{a}(B)$$

où $\mathscr{N}''_\mathfrak{a}(B)$ est l'ensemble des $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3) \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^6$ vérifiant la condition $(C_\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$ ainsi que la condition

$$(*) \qquad \exists (x_1, x_2, x_3), \begin{cases} & (x_i) = \mathfrak{a}_j\mathfrak{a}_l\mathfrak{b}_i\mathfrak{a} \text{ si } \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\} \\ (2') & H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}^3) \\ (4) & (j(x_1), j(x_2), j(x_3)) \in \Delta \end{cases}$$

5. Estimations pour le corps des rationnels

Pour déterminer ce dernier cardinal, nous allons tout d'abord chercher pour tout $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3)$ de $\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^3$ une estimation du cardinal $m_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\mathfrak{c}_3}(B)$ de l'ensemble des (x_1, x_2, x_3) appartenant à $\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{c}_3$ tels que :

$$(2'') \qquad H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant B$$

$$(3) \qquad x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3$$

$$(4) \qquad (j(x_1), j(x_2), j(x_3)) \in \Delta$$

(5)

Pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \left(\prod_{v \in M_\infty} K_v\right) \tilde{\to} \mathbf{R}^{3N}$, on pose :

$$H_\infty(x_1, x_2, x_3) = \prod_{v \in M_\infty} \sup_{1 \leqslant i \leqslant 6} (|\, Y_i(x_1, x_2, x_3)\,|_v)$$

où $|.|_v = |.|^{N_v}$ et

$$\mathscr{D}_B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^{3N} \mid (x_1, x_2, x_3) \in \Delta \text{ et } H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant B\}$$

Lemme 4. — *Dans le cas où $k = \mathbf{Q}$, on a pour tout $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{N}^{+3}$ les inégalités :*

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B)}{c_1c_2c_3} - C_1\left(\frac{1}{c_1c_2} + \frac{1}{c_2c_3} + \frac{1}{c_3c_1}\right)B^{2/3} \leqslant m_{c_1,c_2,c_3}(B) \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B)}{c_1c_2c_3}$$

où C_1 est une constante indépendante de B, c_1, c_2 et c_3.

Remarque 5.1. — la difficulté pour généraliser le résultat principal aux autres corps de nombres réside dans la démonstration de ce lemme ainsi que dans celle du lemme suivant. Il faudrait en particulier pouvoir majorer de manière suffisamment fine

$$\left| m_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\mathfrak{c}_3}(B) - \frac{\mathrm{Vol}\mathscr{D}_B}{\mathrm{Det}(\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{c}_3)} \right|$$

où $\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{c}_3$ est considéré comme un réseau de $\prod_{v \in M_\infty} k_v$ et donc

$$\mathrm{Det}(\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{c}_3) = \frac{N(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3)\sqrt{d}^3}{2^{3r_2}}$$

Démonstration. — Fixons $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{N}^{+3}$. Majorons tout d'abord $m_{c_1,c_2,c_3}(B)$:

$$\begin{aligned}
m_{c_1,c_2,c_3}(B) &= 8\#\left\{(x_1,x_2,x_3) \in (c_1)\times(c_2)\times(c_2) \;\middle|\; \left\{\begin{array}{l} x_i > 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathscr{D}_B \end{array}\right.\right\} \\
&= 8\#\{(n_1,n_2,n_3) \in \mathbf{N}^{+3} \mid H_\infty(c_1n_1, c_2n_2, c_3n_3) \leqslant B\} \\
&= \frac{8}{c_1c_2c_3}\mathrm{Vol}\left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^{+3} \;\middle|\; \left(c_iE\left(\frac{x_i}{c_i}\right) + c_i\right)_{1\leqslant i\leqslant 3} \in \mathscr{D}_B\right\}
\end{aligned}$$

Or $H_\infty(x_1, x_2, x_3)$ est croissante en les variable x_1, x_2 et x_3. Donc

$$\left(c_iE\left(\frac{x_i}{c_i}\right) + c_i\right)_{1\leqslant i\leqslant 3} \in \mathscr{D}_B \Rightarrow (x_i)_{1\leqslant i\leqslant 3} \in \mathscr{D}_B$$

Par conséquent on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
m_{c_1,c_2,c_3}(B) &\leqslant \frac{8}{c_1c_2c_3}\mathrm{Vol}\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^{+3} \mid (x_1,x_2,x_3) \in \mathscr{D}_B\} \\
&\leqslant \frac{1}{c_1c_2c_3}\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B).
\end{aligned}$$

Minorons maintenant $\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B) &= 8\,\mathrm{Vol}\{(x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^{+3} \mid (x_1,x_2,x_3)\in \mathscr{D}_B\}\\
&\leqslant 8\,\mathrm{Vol}\left\{(x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^{+3} \;\middle|\; \begin{cases} \left(c_i E\left(\frac{x_i}{c_i}\right)\right)_{1\leqslant i\leqslant 3} \in \mathscr{D}_B \\ E\left(\frac{x_i}{c_i}\right)\geqslant 1 \end{cases}\right\}\\
&\qquad +8\,\mathrm{Vol}\left\{(x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^{+3} \;\middle|\; \begin{cases} \exists i\in\{1,2,3\}/0\leqslant x_i\leqslant c_i \\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathscr{D}_B \end{cases}\right\}\\
&\leqslant c_1c_2c_3 m_{c_1,c_2,c_3}(B)\\
&\qquad +8(c_1+c_2+c_3)\mathrm{Vol}\{(x_2,x_3)\in\mathbf{R}^{+2} \mid \sup(x_2^2x_3, x_3^2x_2)\leqslant B\}.
\end{aligned}$$

Un calcul donne alors

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Vol}\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^{+2} \mid \sup(x_1^2x_2, x_2^2x_1)\leqslant B\}\\
&\qquad\qquad = 2B^{2/3}\mathrm{Vol}\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^{+2} \mid x_1^2x_2\leqslant 1 \text{ et } x_2<x_1\}\\
&\qquad\qquad = 3B^{2/3}. \quad \square
\end{aligned}$$

Lemme 5. — *Si $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbf{N}^{+3}$ vérifie $c_1\geqslant B^{1/3}$, alors*

$$m_{c_1,c_2,c_3}(B)\leqslant C_2\frac{B^2}{c_1^4c_2c_3}$$

où C_2 est indépendante de c_1, c_2, c_3 et B.

Démonstration. — Le cardinal $m_{c_1,c_2,c_3}(B)$ est nul si $c_1 > \sqrt{B}$. Dans le cas contraire, on a :

$$\begin{aligned}
&m_{c_1,c_2,c_3}(B)\\
&= 8\#\left\{(x_1,x_2,x_3)\in(c_1)\times(c_2)\times(c_3) \;\middle|\; \begin{cases} x_i>0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3\\ H_\infty(x_1,x_2,x_3)\leqslant B\end{cases}\right\}\\
&\leqslant \frac{16}{c_1c_2c_3}\mathrm{Vol}\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x_1\geqslant c_1\\ x_2\geqslant x_3\geqslant 0\\ x_1^2x_2\leqslant B\end{cases}\right\}\\
&\quad +\frac{16}{c_2c_3}\mathrm{Vol}\left\{(x_2,x_3)\in\mathbf{R}^{+2} \;\middle|\; \begin{cases} x_2\geqslant x_3\geqslant 0\\ c_1^2x_2\leqslant B\end{cases}\right\}
\end{aligned}$$

Et le calcul des volumes donne :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Vol}\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, \left\{\begin{array}{l} x_1\geqslant c_1\\ x_2\geqslant x_3\geqslant 0\\ x_1^2x_2\leqslant B\end{array}\right.\right\}\\
&=\int_{c_1}^{+\infty}dx_1\int_0^{\frac{B}{x_1^2}}x_2\,dx_2\\
&=\frac{1}{2}\int_{c_1}^{+\infty}\frac{B^2}{x_1^4}dx_1\\
&=\frac{1}{6}\frac{B^2}{c_1^3}.
\end{aligned}$$

De même on calcule que :

$$\mathrm{Vol}\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^{+2}\mid x_2\geqslant x_3, c_1^2x_2\leqslant B\}=\frac{1}{2}\frac{B^2}{c_1^4}.\quad\square$$

6. Volume du domaine fondamental

Nous allons déterminer, dans le cas général le volume de $\mathscr{D}_B$. Or $(x_1,x_2,x_3)\in\Delta$, $t\in\mathbf{R}^*$ implique $(tx_1,tx_2,tx_3)\in\Delta$, puisque la projection pr se fait suivant $(1_v)_{v\in M_\infty}$ ([**Sc**], page 438) et

$$H_\infty(tx_1,tx_2,tx_3)=t^{3N}H_\infty(x_1,x_2,x_3).$$

Par conséquent, $\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_B)=B\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)$

Lemme 6. — *Avec les notations qui précèdent,*

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)=\frac{1}{3}6^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2}R$$

Démonstration. — Cette démonstration suit le calcul fait dans [**Sc**]. En utilisant des coordonnées polaires, on obtient :

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)=2^{3r_1}\int_{\mathscr{V}_1}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ \{v\mid N_v=2\}}}\rho_{i,v}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ v\in M_\infty}}d\rho_{i,v}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ \{v\mid N_v=2\}}}d\theta_{i,v}$$

où $\mathscr{V}_1$ est l'ensemble des

$$((\rho_{i,v})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ v\in M\infty}},(\theta_{i,v})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ \{v\mid N_v=2\}}})\in\mathbf{R}^{r_1+r_2}\times\mathbf{R}^{r_2}$$

vérifiant les conditions :

$$\rho_{i,v} \geqslant 0 \tag{6}$$

$$0 \leqslant \theta_{i,v} \leqslant 2\pi \tag{7}$$

$$\prod_{v \in M_\infty} \sup_{1 \leqslant i \leqslant 6} \left(Y_i(\rho_{1,v}^{N_v}, \rho_{2,v}^{N_v}, \rho_{3,v}^{N_v})\right) \leqslant 1 \tag{8}$$

$$\left(\sup_{1 \leqslant i \leqslant 6} (\log Y_i((\rho_{j,v})_{1 \leqslant j \leqslant 3}))\right)_{v \in M_\infty} \in F \tag{9}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) = 2^{3r_1}(2\pi)^{3r_2} \int_{\mathscr{V}_2} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ \{v \mid N_v = 2\}}} \rho_{i,v} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ v \in M_\infty}} d\rho_{i,v}$$

où $\mathscr{V}_2$ désigne l'ensemble des

$$(\rho_{i,v})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ v \in M_\infty}} \in \mathbf{R}^{r_1 + r_2}$$

tels que les conditions (6),(7) et (8) ci-dessus soient vérifiées. On découpe alors le domaine d'intégration suivant l'ordre des $\rho_{i,v}$. Par symétrie, on obtient :

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) = 6^{r_1 + r_2} 2^{3r_1}(2\pi)^{3r_2} \int_{\mathscr{V}_3} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ \{v \mid N_v = 2\}}} \rho_{i,v} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ v \in M_\infty}} d\rho_{i,v}$$

où l'on note $\mathscr{V}_3$ l'ensemble des

$$(\rho_{i,v})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ v \in M_\infty}} \in \mathbf{R}^{r_1 + r_2}$$

satisfaisant les conditions suivantes :

$$\forall v \in M_\infty,\ \rho_{1,v} \geqslant \rho_{2,v} \geqslant \rho_{3,v} \geqslant 0 \tag{6'}$$

$$\prod_{v \in M_\infty} \rho_{1,v}^{2N_v} \rho_{2,v}^{N_v} \leqslant 1 \tag{7'}$$

$$(\log \rho_{1,v}^{2N_v} \rho_{2,v}^{N_v})_{v \in M_\infty} \in F \tag{8'}$$

□

En faisant le changement de variables $t_{i,v} = \rho_{i,v}^{N_v}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) &= 6^{r_1+r_2}2^{3r_1}(2\pi)^{3r_2}\frac{1}{2^{3r_2}}\int_{\substack{t_{1,v}\geqslant t_{2,v}\geqslant t_{3,v}\geqslant 0\\ (\log t_{1,v}^2 t_{2,v})_{v\in M_\infty}\in F\\ \prod_{v\in M_\infty} t_{1,v}^2 t_{2,v}\leqslant 1}}\prod_{\substack{i\in\{1,2,3\}\\ v\in M_\infty}} dt_{i,v}\\ &= 6^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2}\int_{\substack{t_{1,v}\geqslant t_{2,v}\geqslant 0\\ (\log t_{1,v}^2 t_{2,v})_{v\in M_\infty}\in F\\ \prod_{v\in M_\infty} t_{1,v}^2 t_{2,v}\leqslant 1}}\prod_{v\in M_\infty} t_{2,v}\prod_{\substack{i\in\{1,2\}\\ v\in M_\infty}} dt_{i,v}.\end{aligned}$$

Nous faisons ensuite le changement de variable :

$$y_v = t_{2,v} \text{ et } x_v = t_{1,v}^2 t_{2,v}.$$

On a

$$dx_v\, dy_v = 2t_{1,v}t_{2,v}dt_{1,v}\, dt_{2,v} = 2\left(\frac{x_v}{y_v}\right)^{1/2} y_v dt_{1,v}\, dt_{2,v}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) &= 3^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2}\int_{\substack{\left(\frac{x_v}{y_v}\right)^{1/2}\geqslant y_v\geqslant 0\\ (\log x_v)_{v\in M_\infty}\in F\\ \prod_{v\in M_\infty} x_v\leqslant 1}}\prod_{v\in M_\infty}\frac{y_v^{1/2}}{x_v^{1/2}}\,dx_v\, dy_v\\ &= 3^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2}\left(\frac{2}{3}\right)^{r_1+r_2}\int_{\substack{(\log x_v)_{v\in M_\infty}\in F\\ \prod_{v\in M_\infty} x_v\leqslant 1}}\prod_{v\in M_\infty} dx_v.\end{aligned}$$

Enfin on fait le changement de variable

$$u = \prod_{v\in M_\infty} x_v \text{ et } v_j = \tau_j(pr((\log x_v)_{v\in M_\infty})) \text{ pour } 1\leqslant j\leqslant r.$$

Comme dans [**Sc**], page 444, on montre que le jacobien vaut $\det L$ où L est le réseau défini dans la partie 3 et on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1) &= 2^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2}3^{r_1+r_2-1}R\int_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\ 0\leqslant v_j\leqslant 1}} du\prod_{j=1}^{r_1+r_2-1}dv_j\\ &= \frac{1}{3}6^{r_1+r_2}2^{3r_1}\pi^{3r_2}R.\end{aligned}$$

7. Sommation sur les idéaux

Nous allons maintenant étudier le cardinal

$$P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0} = \#\mathscr{P}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)$$

où $\mathscr{P}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)$ désigne l'ensemble des sextuplets

$$(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_3,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^6$$

vérifiant la condition $(*)$ de la partie 4 ainsi que la condition :

$$\mathfrak{a}_i\subset\mathfrak{a}_i^0 \text{ et } \mathfrak{b}_i\subset\mathfrak{b}_i^0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3. \tag{10}$$

Comme on le verra dans la partie suivante, le cardinal de $\mathscr{N}''_{\mathfrak{a}}(B)$ s'exprime en fonction de $P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)$. Jusqu'à la fin de cette partie, on omettra $\mathfrak{a}$ dans cette notation. Pour commencer, exprimons en général ce dernier nombre en termes des nombres $m_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\mathfrak{c}_3}$ définis au début de la partie 5.

Lemme 7. — *Soient* $(\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^6$. *Posons, pour tout i,j,l tels que $\{i,j,l\}=\{1,2,3\}$,*

$$\mathfrak{c}_i^0=\mathfrak{a}_j^0\mathfrak{a}_l^0\mathfrak{b}_i^0\mathfrak{a}$$

Alors on a l'égalité :

$$P_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)=\sum_{(\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^3} m_{\mathfrak{c}_1^0\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'_3,\mathfrak{c}_2^0\mathfrak{a}'_3\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{c}_3^0\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2}(BN(\mathfrak{a}_1^0\mathfrak{a}_2^0\mathfrak{a}_3^0\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'_3))$$

Démonstration. — Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, je note $\bigsqcup_{i\in I} A_i$ leur union disjointe. Soient $\mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2^0, \mathfrak{a}_3^0, \mathfrak{b}_1^0, \mathfrak{b}_2^0, \mathfrak{b}_3^0$ des idéaux de $\mathscr{O}_k$ que l'on fixe jusqu'à la fin de la démonstration. Pour tout triplet $(\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \mathfrak{a}'_3) \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^3$, je note $\mathscr{H}_{\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3}$ l'ensemble des

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{c}_1^0\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'_3 \times \mathfrak{c}_2^0\mathfrak{a}'_3\mathfrak{a}'_1 \times \mathfrak{c}_3^0\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2$$

vérifiant :

$$H_\infty(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN(\mathfrak{a}_1^0\mathfrak{a}_2^0\mathfrak{a}_3^0\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'_3\mathfrak{a}^3) \tag{$2^{(3)}$}$$

$$(j(x_1), j(x_2), j(x_3)) \in \Delta \tag{4}$$

On définit alors des applications :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{H}_{\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3} & \to & \mathscr{P}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B) \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (\mathfrak{a}_1^0\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}_2^0\mathfrak{a}'_2, \mathfrak{a}_3^0\mathfrak{a}'_3, \mathfrak{b}_1(x_1, x_2, x_3), \mathfrak{b}_2(x_1, x_2, x_3), \mathfrak{b}_3(x_1, x_2, x_3)). \end{array}$$

où pour tout i, j, l tel que $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$

$$\mathfrak{b}_i(x_1, x_2, x_3) = (x_i)(\mathfrak{a}_j^0\mathfrak{a}_l^0\mathfrak{a}'_j\mathfrak{a}'_l\mathfrak{a})^{-1}$$

L'application induite

$$\bigsqcup_{(\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^3} \mathscr{H}_{\mathfrak{a}'_1,\mathfrak{a}'_2,\mathfrak{a}'_3} \to \mathscr{P}_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)$$

est une bijection. □

Dans la suite on désignera par $(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}')$ un sextuplet $(\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \mathfrak{a}'_3, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{b}'_2, \mathfrak{b}'_3)$ Nous allons maintenant déduire du lemme précédent une estimation de $P_{\mathfrak{a}_1^0,\mathfrak{a}_2^0,\mathfrak{a}_3^0,\mathfrak{b}_1^0,\mathfrak{b}_2^0,\mathfrak{b}_3^0}(B)$ dans le cas où $k = \mathbf{Q}$.

Lemme 8. — *Dans le cas où $k = \mathbf{Q}$, on pose $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$ et on obtient*

$$P_{a,b}(B) \sim C'' \frac{B \log^3 B}{a_1a_2a_3b_1b_2b_3} \text{ quand } B \to +\infty$$

où la constante C'' est donnée par la formule :

$$C'' = \frac{1}{24} \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 \lim_{s\to 1} (s-1)^3 \zeta_{\mathbf{Q}}^3(s) = \frac{2}{3}.$$

De plus, on a la majoration :

$$P_{a,b}(B) \leqslant \operatorname{Vol} \mathscr{D}_1 \frac{B(\log B + C_3)^3}{a_1a_2a_3b_1b_2b_3}$$

où C_3 est une constante indépendante de a et de b.

Remarque 7.1. — Ce lemme repose sur les lemmes 4 et 5 et n'est donc valable que pour **Q**. Si les lemmes 4 et 5 se généralisaient au cas du corps de nombres quelconque, alors on obtiendrait un lemme analogue avec une constante C'' de la forme :

$$\begin{aligned} C'' &= \frac{1}{24}\frac{2^{3r_2}}{\sqrt{d}^3}\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)\lim_{s\to 1}(s-1)^3\zeta_k^3(s) \\ &= \frac{1}{3\times 4!}6^{r_1+r_2}2^{3r_1}(2\pi)^{3r_2}\frac{1}{d^{3/2}}R\lim_{s\to 1}(s-1)^3\zeta_k^3(s) \\ &= \frac{1}{3\times 4!}\frac{2^{2r_2}}{d}6^{r_1+r_2}2^{2r_1}\pi^{2r_2}\frac{w}{h}\lim_{s\to 1}(s-1)^4\zeta_k^4(s) \end{aligned}$$

Démonstration. — D'après le lemme 4, on sait que :

$$m_{c_1,c_2,c_3}(B') = \mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B'}{c_1c_2c_3} + R(c_1,c_2,c_3,B')$$

avec

$$-C_1\left(\frac{1}{c_1c_2}+\frac{1}{c_2c_3}+\frac{1}{c_3c_1}\right)B'^{2/3} \leqslant R(c_1,c_2,c_3,B') \leqslant 0.$$

On fixe $(a_1^0,a_2^0,a_3^0,b_1^0,b_3^0)$ dans $\mathbf{N}^{+6}$ et B dans $\mathbf{R}$. Posons pour tout i,j,l tels que $\{i,j,l\}=\{1,2,3\}$

$$c_i^0 = a_j^0a_l^0b_i^0$$

Soit $B_0 = Ba_1^0a_2^0a_3^0$ et $h_0 = \log B_0$. On note $\mathscr{P}_B$ l'ensemble des $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbf{N}^{+3}/$ tels que

$$(**) \qquad \begin{cases} a_i \geqslant 1 \\ c_i^0a_ja_l \leqslant {B_0}^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3} \text{ si } \{i,j,l\}=\{1,2,3\} \end{cases}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbf{N}^{+3}} m_{c_1^0a_2a_3,c_2^0a_3a_1,c_3^0a_1a_2}(h_0a_1a_2a_3) \\ &= A_1+A_2+A_3 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B}{\prod_{i=1}^3 a_i^0 b_i^0} \sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B} \frac{1}{a_1a_2a_3} \\ A_2 &= \sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B} R(c_1^0a_2a_3, c_2^0a_3a_1, c_3^0a_1a_2, B_0a_1a_2a_3) \\ A_3 &= \sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\notin\mathscr{P}_B} m_{c_1^0a_2a_3, c_2^0a_3a_1, c_3^0a_1a_2}(B_0a_1a_2a_3) \end{aligned}$$

- Commençons par évaluer A_1. Tout d'abord calculons

$$W(B) = \int_{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbf{R}^{+3}/(**)} \frac{1}{a_1a_2a_3}\, da_1\, da_2\, da_3$$

Posons $\lambda_i = 3\log c_i^0$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et faisons le changement de variables $x_i = \log a_i$. On trouve :

$$W(B) = \mathrm{Vol}(\mathscr{W}_B)$$

où $\mathscr{W}_B$ est l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ tels que

$$\begin{array}{l} x_i \geqslant 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 2x_i + 2x_j - x_l \leqslant h_0 - \lambda_l \text{ si } \{i,j,l\} = \{1,2,3\} \end{array}$$

Par conséquent

$$W(B) \sim h_0^3 \int_{\substack{x_i\geqslant 0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3\\ 2x_i+2x_j-x_l\leqslant 1 \text{ si } \{i,j,l\}=\{1,2,3\}}} dx_1\, dx_2\, dx_3 \text{ quand } B \to +\infty$$

Comme on a la relation

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 27,$$

cette dernière intégrale s'écrit,

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{x_i\geqslant 0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3\\ x_1+x_2+x_3\leqslant\frac{1}{2}}} dx_1\,dx_2\,dx_3+\frac{1}{27}\int_{\substack{u_1+u_2+u_3\geqslant\frac{3}{2}\\ u_i\leqslant 1 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3}} du_1\,du_2\,du_3\\
&=2\int_{\substack{x_i\geqslant 0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3\\ x_1+x_2+x_3\leqslant\frac{1}{2}}} dx_1\,dx_2\,dx_3\\
&=2\int_{\substack{x_1\geqslant 0 \text{ et } x_2\geqslant 0\\ x_1+x_2\leqslant\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2}-x_1-x_2\right)dx_1\,dx_2\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x_1\right)^2dx_1\\
&=\frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Par ailleurs on peut réécrire la somme intervenant dans A_1 sous la forme :

$$\begin{aligned}
\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B}\frac{1}{a_1a_2a_3}
&=\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B}\prod_{i=1}^{3}(\log(a_i+1)-\log a_i)\\
&\quad+\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B}\left(\prod_{i=1}^{3}(\log(a_i+1)-\log a_i)-\frac{1}{a_1a_2a_3}\right)
\end{aligned}$$

Notons $A_{1,1}$ la première somme et $A_{1,2}$ la seconde. On a la relation :

$$A_{1,1}=\mathrm{Vol}\left(\bigcup_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B}\prod_{i=1}^{3}[\log(a_i+1),\log a_i]\right)$$

et, par conséquent :

$$|A_{1,1}-W(B)|<\mathrm{Vol}\left(\bigcup\prod_{i=1}^{3}[\log(a_i+1),\log a_i]\right)$$

où la réunion est prise sur les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ tels que

$$\prod_{i=1}^{3}[\log(a_i+1),\log a_i]\bigcap \mathscr{S}_B\neq\varnothing$$

$\mathscr{S}_B$ désignant la surface du polyèdre défini par

$$\begin{array}{c} x_i\geqslant 0 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant 3\\ 2x_i+2x_j-x_l\leqslant h_0-\lambda_l \text{ si } \{i,j,l\}=\{1,2,3\}\end{array}$$

Mais le diamètre de la boîte $\prod_{i=1}^{3}[\log(a_i+1),\log a_i]$ est bornée par $\sqrt{3}$. Donc

$$\begin{array}{rcl} |A_{1,1}-W(B)| & \leqslant & \mathrm{Vol}(\{x\mid d(x,\mathscr{S}_B\leqslant\sqrt{3})\})\\ & \leqslant & C_4h_0^2 \text{ pour } B \text{ assez grand}\end{array}$$

On obtient donc

$$A_{1,1}\sim W(B)\sim\frac{1}{24}h_0^3$$

Majorons maintenant $A_{1,2}$. Pour tout $a\in\mathbf{N}^+$ on a les inégalités :

$$\frac{-1}{2a^2}\leqslant\log(a+1)-\log(a)-\frac{1}{a}\leqslant 0$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} |A_{1,2}| & \leqslant & \displaystyle\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in[1,B_0]^3}\left(\frac{1}{a_1^2a_2a_3}+\frac{1}{a_1a_2^2a_3}+\frac{1}{a_1a_2a_3^2}\right)\\ & \leqslant & 3\displaystyle\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in[1,B_0]^3}\frac{1}{a_1^2a_2a_3}\\ & \leqslant & 3\dfrac{\pi^2}{6}\log^2(B_0+1)\end{array}$$

donc

$$A_1\sim\frac{1}{24}\log^3 B$$

• Majorons maintenant A_2. On a les inégalités :

$$\begin{aligned}&|R(c_1^0a_2a_3,c_2^0a_3a_1,c_3^0a_1a_2,B_0a_1a_2a_3)|\\ &\leqslant C_1\left(\tfrac{1}{c_1^0c_2^0}+\tfrac{1}{c_2^0c_3^0}+\tfrac{1}{c_3^0c_1^0}\right)(a_1^0a_2^0a_3^0)^{2/3}B^{2/3}\left(\tfrac{1}{a_1a_2a_3^2}+\tfrac{1}{a_2a_3a_1^2}+\tfrac{1}{a_3a_1a_2^2}\right)(a_1a_2a_3)^{2/3}.\end{aligned}$$

On pose

$$C_5=C_1\left(\frac{1}{c_1^0c_2^0}+\frac{1}{c_2^0c_3^0}+\frac{1}{c_3^0c_1^0}\right)(a_1^0a_2^0a_3^0)^{2/3}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}|A_2| &\leqslant 3C_5B^{2/3}\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}_B}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}a_3^{4/3}}\\ &\leqslant 3C_5B^{2/3}\sum_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\in\mathscr{P}'_B}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}a_3^{4/3}}\end{aligned}$$

où l'ensemble $\mathscr{P}'_B$ désigne l'ensemble des $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbf{N}^{+3})$ tels que

$$a_ia_j\leqslant {B_0}^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3} \text{ si } i\neq j.$$

On obtient donc la majoration :

$$|A_2|\leqslant 6C_5B^{2/3}(A_{2,1}+A_{2,2}+A_{2,3})$$

où

$$\begin{aligned}A_{2,1} &= \sum_{\substack{1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\\ a_2a_3\leqslant {B_0}^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3}}}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}a_3^{4/3}}\\ A_{2,2} &= \sum_{\substack{1\leqslant a_3\leqslant a_1\leqslant a_2\\ a_1a_2\leqslant {B_0}^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3}}}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}a_3^{4/3}}\\ A_{2,3} &= \sum_{\substack{1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_1\\ a_3a_1\leqslant {B_0}^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3}}}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}a_3^{4/3}}.\end{aligned}$$

Majorons $A_{2,1}$:

$$A_{2,1}\leqslant\sum_{1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant {B_0}^{1/2}a_1^{1/2}a_2^{-1}}\frac{1}{(a_1a_2)^{1/3}}\sum_{a_2\leqslant a_3\leqslant {B_0}^{1/2}a_1^{1/2}a_2^{-1}}\frac{1}{a_3^{4/3}}$$

Mais la somme intérieure est majorée par :

$$\frac{1}{a_2^{4/3}}+\frac{3}{a_2^{1/3}}\leqslant\frac{4}{a_2^{1/3}}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A_{2,1} &\leqslant 4 \sum_{1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant {B_0}^{1/4}a_1^{1/4}} \frac{1}{a_1^{1/3}a_2^{2/3}}\\
&\leqslant 4 \sum_{1\leqslant a_1\leqslant {B_0}^{1/4}a_1^{1/4}} \frac{4{B_0}^{1/12}a_1^{1/12}}{a_1^{1/3}}\\
&\leqslant 16{B_0}^{1/12} \sum_{1\leqslant a_1\leqslant {B_0}^{1/3}} \frac{1}{a_1^{1/4}}\\
&\leqslant 3.16{B_0}^{1/12}{B_0}^{1/4}\\
&\leqslant 3.16{B_0}^{1/3}
\end{aligned}$$

On peut majorer $A_{2,2}$ de la manière suivante :

$$A_{2,2} \leqslant \sum_{1\leqslant a_3\leqslant a_1\leqslant {B_0}^{1/2}a_3^{1/2}a_1^{-1}} \frac{1}{a_1^{1/3}a_3^{4/3}} \sum_{a_1\leqslant a_2\leqslant {B_0}^{1/2}a_3^{1/2}a_1^{-1}} \frac{1}{a_2^{1/3}}$$

La somme intérieure étant majorée par :

$$\frac{1}{a_1^{1/3}} + 3{B_0}^{1/3}a_3^{1/3}a_1^{-2/3} \leqslant 4{B_0}^{1/3}a_3^{1/3}a_1^{-2/3}$$

on obtient que :

$$\begin{aligned}
A_{2,2} &\leqslant 4{B_0}^{1/3} \sum_{1\leqslant a_3\leqslant a_1\leqslant {B_0}^{1/4}a_3^{1/4}} \frac{1}{a_1a_3}\\
&\leqslant 4{B_0}^{1/3} \sum_{1\leqslant a_3\leqslant {B_0}^{1/4}a_3^{1/4}} \left(\frac{1}{a_3^2} + \left(\frac{1}{4}\log B_0 + \frac{1}{4}\log a_3\right)\frac{1}{a_3}\right)\\
&\leqslant 4{B_0}^{1/3}\left(\frac{6}{\pi^2} + \frac{2}{4.3}\log^2 B_0 + \frac{2}{4}\log B_0\right)
\end{aligned}$$

Majorons maintenant $A_{2,3}$:

$$A_{2,3} \leqslant \sum_{1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant {B_0}^{1/2}a_2^{1/2}a_3^{-1}} \frac{1}{a_2^{1/3}a_3^{4/3}} \sum_{a_3\leqslant a_1\leqslant {B_0}^{1/2}a_2^{1/2}a_3^{-1}} \frac{1}{a_1^{1/3}}.$$

La somme intérieure étant majorée par $4{B_0}^{1/3}a_2^{1/3}{a_3}^{-2/3}$, on obtient les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} A_{2,3} &\leqslant 4{B_0}^{1/3} \sum_{1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant {B_0}^{1/4}a_2^{1/4}} \frac{1}{a_3^2} \\ &\leqslant 8{B_0}^{1/3} \sum_{1\leqslant a_2\leqslant {B_0}^{1/4}a_2^{1/4}} \frac{1}{a_2} \\ &\leqslant 8{B_0}^{1/3}(\frac{1}{3}\log B_0 + 1) \end{aligned}$$

En conclusion

$$A_2 = O(B\log^2 B)$$

- Majorons A_3 : d'après le lemme 5, si $a_2a_3c_1^0 \geqslant B_0^{1/3}(a_1a_2a_3)^{1/3}$, on a :

$$\begin{aligned} &|m_{a_2a_3c_1^0,a_3a_1c_2^0,a_1a_2c_3^0}(B_0a_1a_2a_3)| \\ &\leqslant C_2\frac{B_0^2}{a_2^3a_3^3{c_1^0}^4c_2^0c_3^0} \\ &\leqslant C_6\frac{B_0^2}{a_2^3a_3^3} \end{aligned}$$

où

$$C_6 = \sup_{\{i,j,l\}=\{1,2,3\}} \frac{C_2}{{c_i^0}^4c_j^0c_l^0}.$$

En outre, s' il existe $i \in \{1,2,3\}$ tel que $a_i \geqslant B\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)$ alors

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B}{\prod_{i=1}^3 a_i^0b_i^0a_i} < 1$$

et par conséquent

$$m_{a_2a_3c_1^0,a_3a_1c_2^0,a_1a_2c_3^0}(B_0a_1a_2a_3) = 0.$$

On a des résultats similaires en permutant 1, 2 et 3. Donc, si $B_0' = \inf_{1\leqslant i\leqslant 3} B_0/c_i^{0\,1/3}$, on obtient les majorations

$$\begin{aligned}
A_3 &\leqslant 3C_6B_0^2 \sum_{\substack{1\leqslant a_1\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0\\ 1\leqslant a_2\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0\\ a_2a_3\geqslant B_0'^{\,1/2}a_1^{1/2}}} \frac{1}{a_2^3a_3^3}\\
&\leqslant 3C_6B_0^2 \sum_{\substack{a_1\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0\\ a_2\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0}} \frac{2}{2}\frac{1}{a_2^3B_0'a_1a_2^{-2}}\\
&\leqslant 3C_6\frac{B_0^2}{B_0'} \sum_{\substack{a_1\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0\\ a_2\leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0}} \frac{1}{a_1a_2}\\
&\leqslant 3C_6\frac{B_0^2}{B_0'}(\log(\mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B_0)+1)^2.
\end{aligned}$$

On obtient également :

$$A_3 = O(B\log^2 B).$$

• Majorons maintenant $N_{a,b}$ de manière uniforme. S' il existe $i\in\{1,2,3\}$ tel que $a_i\geqslant B\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)$ alors

$$m_{a_2a_3c_1^0,a_3a_1c_2^0,a_1a_2c_3^0}(B_0a_1a_2a_3)=0$$

donc

$$\begin{aligned}
N_{a^0,b^0} &\leqslant \mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)\frac{B}{a_1^0a_2^0a_3^0b_1^0b_2^0b_3^0}\sum_{1\leqslant a_i\leqslant B\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)}\frac{1}{a_1a_2a_3}\\
&\leqslant \frac{B(\log B+\log\mathrm{Vol}(\mathscr{D}_1)+1)^3}{a_1^0a_2^0a_3^0b_1^0b_2^0b_3^0}.
\end{aligned}$$

□

8. Formule d'inversion

Mon but est maintenant de construire l'analogue de la formule d'inversion de Möbius. On considère $\mathscr{B}=\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)^6$. L'ensemble $\mathscr{B}$ est un monoïde pour la multiplication terme à terme des idéaux. Si $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$, on note :

$$\alpha(\mathfrak{b}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{6} N(\mathfrak{b}_i)},$$

$$(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{c} \in \mathscr{B} \mid \mathfrak{c}_i \subset \mathfrak{b}_i \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 6\},$$

et pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$,

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) = (\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}_i))_{1 \leqslant i \leqslant 6}$$

Pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on pose également : si $n = (n_i)_{1 \leqslant i \leqslant 6} \in \mathbf{N}^6$, $\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{p}^{n_1}, \ldots, \mathfrak{p}^{n_6})$ et si $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})}$. Si B est un sous-ensemble de $\mathscr{B}$, sa fonction caractéristique est notée χ_B. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$ vérifiant la condition $(C_{\mathfrak{p}})$, définie dans la partie 4, pour tout $\mathfrak{p} \in M_f$.

Lemme 9. — *Il existe une unique fonction $\mu : \mathscr{B} \to \mathbf{Z}$ telle que :*

(a) $\chi_{\mathscr{A}} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B}} \mu(\mathfrak{b}) \chi_{(\mathfrak{b})}$

Cette fonction vérifie en outre les conditions suivantes :

(b) $\mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})$ *pour tout* $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$

(c) $\sum_{n \in \mathbf{N}^6} \mu(\mathfrak{p}^n) \alpha(\mathfrak{p}^n) = \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^4 \left(1 + \frac{4}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right)$

(d) $\sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B}} |\mu(\mathfrak{b}) \alpha(\mathfrak{b})| \leqslant +\infty$

Démonstration. — • Si $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathscr{B}$, on note : $\mathfrak{b} | \mathfrak{b}'$ si et seulement si $\mathfrak{b}' \in (\mathfrak{b})$. Une fonction μ vérifie (a) si et seulement si

$$\forall \mathfrak{b} \in \mathscr{B}, \chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{b}' | \mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{b}')$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \mathfrak{b} \in \mathscr{B}, \mu(\mathfrak{b}) = \chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{b}) - \sum_{\substack{\mathfrak{b}' | \mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' \neq \mathfrak{b}}} \mu(\mathfrak{b}')$$

ce qui montre l'existence et l'unicité de μ

• Montrons (b) par récurrence sur $\#\{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}\}$ On remarque tout d'abord que pour tout $\mathfrak{b}\in\mathscr{B}$,

$$\chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{b})=\prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{b}_\mathfrak{p})$$

Par hypothèse de récurrence, pour tout $\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b}'\neq\mathfrak{b}$, on a

$$\mu(\mathfrak{b}')=\prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\mu(\mathfrak{b}'_\mathfrak{p})$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mu(\mathfrak{b}) &= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{b}_\mathfrak{p})-\sum_{\substack{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}\\ \mathfrak{b}'\neq\mathfrak{b}}}\prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\mu(\mathfrak{b}'_\mathfrak{p})\\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\mu(\mathfrak{b}_\mathfrak{p})+\prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\sum_{n\leqslant v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b})}\mu(\mathfrak{p}^n)-\sum_{\mathfrak{b}'|\mathfrak{b}}\prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\mu(\mathfrak{b}'_\mathfrak{p})\\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\mu(\mathfrak{b}_\mathfrak{p})
\end{aligned}$$

• Démontrons (c). Soit $p_i:\mathbf{N}^6\to\mathbf{N}$ la i-ème projection canonique pour $1\leqslant i\leqslant 6$. Soit $n\in\mathbf{N}^6$ Montrons tout d'abord par récurrence sur $|n|=\sum_{i=1}^6 p_i(n)$ que s'il existe $i\in\{1,\dots,6\}$ tel que $p_i(n)\geqslant 2$ alors $\mu(\mathfrak{p}^n)=0$. Soit $n'=n-(0,\dots,1,\dots,0)$ où le 1 se trouve à la i-ème position. Alors on a

$$\chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{p}^n)=\chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{p}^{n'})$$

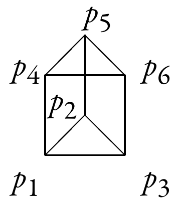
et

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{p}^n) &= \mu(\mathfrak{p}^n)+\sum_{\substack{\mathfrak{b}|\mathfrak{p}^n\\ \mathfrak{b}\neq\mathfrak{p}^n}}\mu(\mathfrak{b})\\
&= \mu(\mathfrak{p}^n)+\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{p}^{n'}}\mu(\mathfrak{b})+\sum_{\substack{\mathfrak{p}^k|\mathfrak{p}^n\\ k\neq n\\ p_i(k)=p_i(n)}}\mu(\mathfrak{p}^k)
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence $\mu(\mathfrak{p}^k)=0$ si $\mathfrak{p}^k|\mathfrak{p}^n$, $k\neq n$ et $k_i=n_i>1$. Donc $\mu(\mathfrak{p}^n)=0$.

• Considérons maintenant le graphe $\mathscr{G}$ dont les sommets sont les applications p_i pour i variant de 1 à 6 et dont les sommets suivants sont adjacents :

$$\begin{matrix} (p_1, p_2) & (p_2, p_3) & (p_3, p_1) \\ (p_4, p_5) & (p_5, p_6) & (p_6, p_4) \\ (p_1, p_4) & (p_2, p_5) & (p_3, p_6) \end{matrix}$$



A tout élément n de $\{0, 1\}^6 \subset \mathbf{N}^6$, on associe le sous-graphe $\mathscr{G}_n$ de $\mathscr{G}$ dont les sommets sont les p_i tels que $p_i(n) \neq 0$ avec la structure de graphe induite. Par définition de $\mathscr{A}$, on a $\chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{p}^n) = 1$ si et seulement si $\mathscr{G}_n$ est formé de points disjoints. Par conséquent, $\chi_{\mathscr{A}}$ ne dépend que du sous-graphe correspondant. Il en est donc de même de μ. On note

$$\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{G}_n) = \chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{p}^n) \text{ et } \mu(\mathscr{G}_n) = \mu(\mathfrak{p}^n)$$

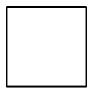
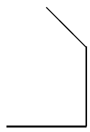
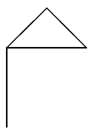
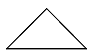
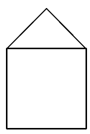
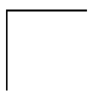
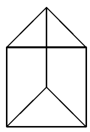
Si $\mathscr{G}_n$ est la rénion de disjoite de deux graphes $\mathscr{G}_{m_1}$ et $\mathscr{G}_{m_2}$, alors

$$\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{G}_n) = \chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{G}_{m_1})\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{G}_{m_2}).$$

On en déduit alors comme dans la démonstration de (b) que

$$\mu(\mathscr{G}_n) = \mu(\mathscr{G}_{m_1})\mu(\mathscr{G}_{m_2}).$$

Il suffit donc de calculer les valeurs de μ pour les graphes connexes. On obtient :

$\mathscr{G}$	$\mu(\mathscr{G})$	$\mathscr{G}$	$\mu(\mathscr{G})$
$\varnothing$	1		-1
.	0		0
	-1		-1
	2		0
	1		1

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbf{N}^6} \mu(\mathfrak{p}^n)\alpha(\mathfrak{p}^n) &= \sum_{n\in\{0,1\}^6} \mu(\mathfrak{p}^n)\alpha(\mathfrak{p}^n)\\
&= 1-\frac{9}{N(\mathfrak{p})^2}+\frac{16}{N(\mathfrak{p})^3}-\frac{9}{N(\mathfrak{p})^4}+\frac{1}{N(\mathfrak{p})^6}\\
&= \left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^4\left(1+\frac{4}{N(\mathfrak{p})}+\frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right)
\end{aligned}$$

• Nous allons maintenant démontrer (d). D'après le calcul qui précède, on a, pour tout $\mathfrak{b}_0 \in \mathscr{B}$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}\\ \mathfrak{b}|\mathfrak{b}_0}} |\mu(\mathfrak{b})\alpha(\mathfrak{b})| &= \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}\\ \mathfrak{b}|\mathfrak{b}_0}} \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} |\mu(\mathfrak{b}_\mathfrak{p})|\alpha(\mathfrak{b}_\mathfrak{p}) \\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \sum_{n\leqslant \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}_0)} |\mu(\mathfrak{p}^n)\alpha(\mathfrak{p}^n)| \\
&< \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \sum_{n\in \mathbf{N}^6} |\mu(\mathfrak{p}^n)\alpha(\mathfrak{p}^n)| \\
&< \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \left(1+\frac{35}{N(\mathfrak{p})^2}\right) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

□

Lemme 10. — *On a la relation :*

$$\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} \alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \frac{d_\mathfrak{p}(V)}{L_\mathfrak{p}(1,\operatorname{Pic} V)}.$$

Démonstration. — D'après le lemme précédant :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} \alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b}) &= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \sum_{n\in\mathbf{N}^6} \alpha(\mathfrak{p}^n)\mu(\mathfrak{p}^n) \\
&= \prod_{\mathfrak{p}\in M_f} \left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^4 \left(1+\frac{4}{N(\mathfrak{p})}+\frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right)
\end{aligned}$$

Or on a les égalités :

$$\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^4 = \frac{1}{L_\mathfrak{p}(1,\operatorname{Pic} V)}$$

puisque l'action du groupe de Galois est triviale sur le groupe de Picard, et

$$\left(1+\frac{4}{N(\mathfrak{p})}+\frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) = d_\mathfrak{p}(V).$$

□

Cette interprétation de la valeur locale m'a été indiquée par Y. Manin à qui elle a été montrée par F. Beukers.

Lemme 11. — *Avec les notations qui précèdent,*

$$wN_{\mathfrak{a}}(B) = \sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}} \mu(\mathfrak{b})P_{\mathfrak{b}}(B).$$

Démonstration. — Ceci résulte de la fin de la partie 4 ainsi que du lemme 9. $\square$

Preuve du résultat. — On a en général

$$N_U(B) = \sum_{\overline{\mathfrak{a}}\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)} N_{\mathfrak{a}}(B) = \frac{1}{w}\sum_{\substack{\overline{\mathfrak{a}}\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)/\mathscr{P}(\mathscr{O}_k)\\ \mathfrak{b}\in\mathscr{B}}} \mu(\mathfrak{b})P_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}(B)$$

Dans le cas où $k = \mathbf{Q}$, on a posé $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}$ et, d'après le lemme 8, on a l'équivalence :

$$P_{\mathfrak{b}}(B) \sim C''B\log^3 B\alpha(\mathfrak{b})$$

où $C'' = \frac{2}{3}$, et

$$P_{\mathfrak{b}}(B) \leqslant \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 B(\log B + C_3)^3\alpha(\mathfrak{b}).$$

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, soit $I \subset \mathscr{I}(\mathbf{Z})$ fini tel que :

$$\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}-I} |\alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(1/2C'' + \mathrm{Vol}\mathscr{D}_1)}.$$

Soit B_0 tel que $B \geqslant B_0$ implique

$$\forall \mathfrak{b} \in I, \quad |P_{\mathfrak{b}}(B) - C''B\log^3 B\alpha(\mathfrak{b})| < \frac{\varepsilon}{2\#I}B\log^3 B$$

et

$$B(\log B + C_3)^3 \leqslant 2B\log^3 B$$

alors $B \geqslant B_0$ implique

$$\begin{aligned}
&\left|N_U(B) - \frac{1}{2}C''B\log^3 B\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}}\alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b})\right|\\
&\leqslant \left(\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}-I}\left(\frac{2}{2}\mathrm{Vol}\mathscr{D}_1 + \frac{1}{2}C''\right)|\alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b})| + \sum_{\mathfrak{b}\in I}\frac{\varepsilon}{2\#I}\right)B\log^3 B\\
&\leqslant \varepsilon B\log^3 B.
\end{aligned}$$

Donc

$$N_U(B) \sim \frac{1}{2}C'B\log^3 B$$

$\square$

La constante C' qu'on obtiendrait dans le cas d'un corps de nombre quelconque s'écrirait donc, d'après la remarque suivant le lemme 8,

$$\begin{aligned} C' &= \frac{h}{w}\frac{1}{3\times 4!}\frac{2^{2r_2}}{d}6^{r_1+r_2}2^{2r_1}\pi^{2r_2}\frac{w}{h}\lim_{s\to 1}(s-1)^4\zeta_k^4(s)\sum_{\mathfrak{b}\in\mathscr{B}}\alpha(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b}) \\ &= \frac{1}{3\times 4!}\frac{2^{2r_2}}{d}6^{r_1+r_2}2^{2r_1}\pi^{2r_2}\lim_{s\to 1}(s-1)^4\zeta_k^4(s)\prod_{\mathfrak{p}\in M_f}\frac{d_{\mathfrak{p}}}{L_{\mathfrak{p}}(1,\operatorname{Pic} V)} \end{aligned}$$

Calculons maintenant les volumes de $\mathbf{P}^2_{k_v}$ correspondant aux métriques à l'infini. Dans le cas où $N_v = 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}_{H_v}(\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}) &= 4\int_{\substack{0\leqslant r_1\\ 0\leqslant r_2}} \inf_{1\leqslant i\leqslant 6}\left(\frac{1}{Y_i(r_1,r_2,1)}\right)dr_1\,dr_2 \\ &= 8\left(\int_{1\leqslant r_2\leqslant r_1}\frac{1}{r_1^2 r_2}dr_1\,dr_2 \right.\\ &\qquad + \int_{0\leqslant r_2\leqslant 1\leqslant r_1}\frac{1}{r_1^2}dr_1\,dr_2 \\ &\qquad \left. + \int_{0\leqslant r_2\leqslant r_1\leqslant 1}\frac{1}{r_1}dr_1\,dr_2\right) \\ &= 8.3 \end{aligned}$$

et lorsque $N_v = 2$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}) &= (2\pi)^2\int_{\substack{0\leqslant r_1\\ 0\leqslant r_2}} \inf_{1\leqslant i\leqslant 6}\frac{r_1 r_2}{Y_i(r_1,r_2,1)^2}dr_1\,dr_2 \\ &= (2\pi)^2 2\left(\int_{1\leqslant r_2\leqslant r_1}\frac{r_1 r_2}{r_1^4 r_2^2}dr_1\,dr_2 \right.\\ &\qquad + \int_{0\leqslant r_2\leqslant 1\leqslant r_1}\frac{r_1 r_2}{r_1^4}dr_1\,dr_2 \\ &\qquad \left. + \int_{0\leqslant r_2\leqslant r_1\leqslant 1}\frac{r_1 r_2}{r_1^2}dr_1\,dr_2\right) \\ &= \pi^2.6. \end{aligned}$$

Donc si on pouvait obtenir l'équivalent des lemmes 4 et 5, on obtiendrait une constante C' de la forme :

$$C' = \frac{1}{3.t!} \frac{\prod_{v \in M_\infty} \mathrm{Vol}_{H_v}(\mathbf{P}^2_{k_v})}{\mathrm{Vol}\left(\left(\prod_{v\in M_\infty} k_v\right) \Big/ \mathcal{O}_k\right)^2} \left(\lim_{s\to 1}(s-1)^t L(s, \mathrm{Pic} V)\right) \prod_{\mathfrak{p}\in M_k} \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(1, \mathrm{Pic} V)}$$

où $t = 4$ est le rang du groupe de Picard de V.

9. Formule d'inversion dans un autre cas

On se place dans la situation suivante : V est la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant un diviseur rationnel D de $\mathbf{P}_2$ où D s'écrit comme somme de trois points en position générale sur $\overline{\mathbf{Q}}$, clôture algébrique de k. On fixe une extension galoisienne $\mathbf{K}$ de k sur laquelle $D = P_1 + P_2 + P_3$. Soit $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}/k)$. G agit sur $\{P_1, P_2, P_3\}$ ce qui définit un morphime $\lambda : G \to \mathfrak{S}_3$. Quitte à remplacer $\mathbf{K}$ par $\mathbf{K}^{\mathrm{Ker}\lambda}$, on peut supposer que λ est une injection. Nous nous restreignons au cas où G est cyclique d'ordre trois et où $\mu_3 \subset k$. On a alors $\mathbf{K} = k(\alpha)$ pour α une racine cubique d'un élément $a \in k^* - k^{*3}$. On note j une racine cubique primitive de l'unité et $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{K}/k)$ l'automorphisme de $\mathbf{K}$ au-dessus de k défini par $\sigma(\alpha) = j\alpha$. On pose $S = \{3\} \bigcup \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}|(a)\}$. En outre, on peut se ramener à $a \in \mathcal{O}_k$ et

$$P_1 = (1 : \alpha : \alpha^2), P_2 = (1 : j\alpha : j^2\alpha), P_3 = (1 : j^2\alpha : j\alpha^2)$$

on définit $L_1, L_2, L_3, L_{1,2}, L_{2,3}, L_{3,1}$ sur $\mathbf{K}$ comme ci-dessus

$$U = V - L_1 \bigcap L_2 \bigcap L_3 \bigcap L_{1,2} \bigcap L_{2,3} \bigcap L_{3,1}$$

est défini sur k et on peut poser

$$-K = 3\Lambda - L_1 - L_2 - L_3.$$

Une base de $\Gamma(V_{\mathbf{K}}, \omega_{V_{\mathbf{K}}})$est donnée par le polynomes

$$\begin{array}{rclrclrcl} Y'_1 &=& Z_1^2 Z_2, & Y'_2 &=& Z_2^2 Z_1, & Y'_3 &=& Z_2^2 Z_3 \\ Y'_4 &=& Z_3^2 Z_2, & Y'_5 &=& Z_3^2 Z_1, & Y'_6 &=& Z_1^2 Z_3 \\ Y'_7 &=& Z_1 Z_2 Z_3 & & & & & & \end{array}$$

où
$$\begin{aligned} Z_1 &= \alpha^2 X_1 + \alpha X_2 + X_3 \\ Z_2 &= j^2\alpha^2 X_1 + j\alpha X_2 + X_3 \\ Z_3 &= j\alpha^2 X_1 + j^2\alpha X_2 + X_3 \end{aligned}$$
Une base de $\Gamma(V, \omega_V)$ sur k est donc donnée par
$$\begin{array}{rclrcl} Y_1 &=& X_1(aX_1^2 - X_2X_3), & Y_2 &=& X_2(aX_1^2 - X_2X_3), \\ Y_3 &=& X_3(aX_1^2 - X_2X_3), & Y_4 &=& X_1(X_2^2 - X_3X_1), \\ Y_5 &=& X_2(X_2^2 - X_3X_1), & Y_6 &=& X_3(X_2^2 - X_3X_1), \\ Y_7 &=& X_3(X_3^2 - aX_1X_2). & & & \end{array}$$
La hauteur correspondante est donc donnée par :
$$H_{-K}((x_1 : x_2 : x_3)) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_k} \inf_{1 \leqslant i \leqslant 7} |Y_i(x_1, x_2, x_3)|_{\mathfrak{p}}$$

On fixe $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$. Comme ci-dessus, on veut déterminer le cardinal de $\mathscr{N}_{\mathfrak{a}}(B)$ ensemble des triplets $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathscr{O}_k^3/U_k$ possédant un représentant $(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{O}_k^3$ vérifiant :

(1) $$(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a}$$

(2) $$H_{-K}((x_1 : x_2 : x_3)) \leqslant B$$

(3) $$x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3$$

Comme dans le paragraphe 3, on définit une application
$$\log_H : \left(\prod_{v \in M_{\infty,k}} k_v^* \right)^3 \to \mathbf{R}^{r_1 + r_2}.$$
L'application composée
$$U_k \to \prod_{v \in M_{\infty,k}} k_v^* \xrightarrow{\text{Diag}} \left(\prod_{v \in M_{\infty,k}} k_v^* \right)^3$$
définit une action de U_k sur $\left(\prod_{v \in M_{\infty,k}} k_v^* \right)^3$. De même le morphisme canonique
$$U_k \to \mathbf{R}^{r_1 + r_2}$$
définit une action de U_k sur $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ et l'application $\log_H$ est compatible avec ces actions. De plus si des éléments x et y de $\left(\prod_{v \in M_{\infty,k}} k_v^* \right)^3$ vérifient $x = uy$ pour

$u \in U_k$ et si x et y ont même images par $\log_H$, alors d'après un lemme de Schanuel ([**Sc**], lemme 2) $u^3 \in \mu_\infty(k)$ et donc $u \in \mu_\infty(k)$. On pose $\Delta = \log_H^{-1}(F)$. Comme dans la partie 3, on a

(i) Δ est stable sous l'action de $\mu_\infty(k)$,
(ii) $\forall u \in U_k - \mu_\infty(k), u\Delta \bigcap \Delta = \varnothing$,
(iii) $\displaystyle\bigcup_{u \in U_k} u\Delta = \prod_{v \in M_{\infty,k}} k_v^*$.

Par conséquent, le cardinal recherché est $\frac{1}{w}\#\mathscr{N}_{\mathfrak{a}}(B)$ où $\mathscr{N}_{\mathfrak{a}}(B)$ désigne l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{O}_k^3$ vérifiant (1),(2) et (3) ci-dessus, ainsi que

$$(j(x_1), j(x_2), j(x_3)) \in \Delta \tag{4}$$

Notons pour tout $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$ et tout $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$, $N_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})})$ On reprend les notations $H_{\mathfrak{p}}$ et H_∞. On a alors pour tout $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$

$$H_{\mathfrak{p}}(x_1, x_2, x_3) = N_{\mathfrak{p}}((Y_i(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 7))$$

et

$$H_{-K}(x_1, x_2, x_3) = \frac{H_\infty(x_1, x_2, x_3)}{N((Y_i(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 7))}$$

Notons

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ j^2\alpha^2 & j\alpha & 1 \\ j\alpha^2 & j^2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$\mathrm{Det} M = 3(1 - j)ja$$

Donc comme $S_{\mathbf{K}} = \{\mathfrak{P} \in M_{f,\mathbf{K}} \mid \exists \mathfrak{P} \in S, \mathfrak{P}|\mathfrak{p}\}$ contient $\{\mathfrak{P} \in M_{f,\mathbf{K}} \mid \mathfrak{P}|3a\}$, M est inversible sur $\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}$. On obtient alors :

$$(Y_i(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 7)\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}} = (Y_i'(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 6)\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}$$

et on a

$$(Y_i'(x_1, x_2, x_3), 1 \leqslant i \leqslant 6) = (z_1, z_2)(z_2, z_3)(z_3, z_1)$$

où $z_i = Z_i(x_1, x_2, x_3)$. L'objectif est donc de paramétriser les points de l'ouvert U par l'idéal $\mathfrak{d} = (z_1, z_2)$.

On considère l'ensemble

$$\mathscr{H}_{\mathfrak{a}} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{O}_k^3 \;\middle|\; \begin{cases} (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{a} \\ x_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \end{cases} \right\}$$

On note $\mathscr{I}'_S$ le sous-monoïde $\mathscr{I}(\mathscr{O}_k)$ engendré par S et $\mathscr{H}'_{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des sextuplets

$$(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_{S,1},\mathfrak{c}_{S,2},\mathfrak{c}_{S,3})\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})^3\times\mathscr{I}'^{\,4}_S$$

vérifiant les conditions suivantes : pour tout $\mathfrak{P}\in M_{f,\mathbf{K}}-S_{\mathbf{K}}$

$$(\mathrm{C}_{\mathfrak{P}})\qquad\left\{\begin{array}{l}\inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}),v_{\mathfrak{P}^\sigma}(\mathfrak{d}))=0\\ \inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}),v_{\mathfrak{P}^\sigma}(\mathfrak{b}))=0\\ \inf(v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}),v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}))=0\end{array}\right.$$

pour tout $\mathfrak{p}\in S$

$$(\mathrm{C}_{\mathfrak{p}})\qquad\inf_{1\leqslant i\leqslant 3}(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}_{S,i}))=0$$

ainsi que la condition $(\circ)$: $\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{d}^{\sigma^2}\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}$ est principal, engendré par un élément

$$z_1=x_3+\alpha x_2+\alpha^2x_1$$

où les éléments x_1,x_2 et x_3 de k peuvent être choisis de sorte que, pour tout $\mathfrak{p}$ de S, on ait

$$\begin{array}{l}v_{\mathfrak{p}}(x_i)=v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}_{S,i})+v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})\\ v_{\mathfrak{p}}((ax_1^2-x_2x_3,x_2^2-x_3x_1,x_3^2-ax_1x_2))=v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{e}_S)+2v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}).\end{array}$$

On note également $(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)$ un élément $(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_{S,1},\mathfrak{c}_{S,2},\mathfrak{c}_{S,3})$ de $\mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})^2\times\mathscr{I}'^{\,4}_S$.

Lemme 12. — *Soit $\rho:\mathscr{H}_{\mathfrak{a}}\to\mathscr{H}'_{\mathfrak{a}}$ l'application qui à tout $(x_1,x_2,x_3)\in\mathscr{H}_{\mathfrak{a}}$ associe*

$$\rho(x_1,x_2,x_3)=(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)$$

où

$$\begin{array}{rcl}\mathfrak{d}&=&(Z_3(x_1,x_2,x_3),Z_2(x_1,x_2,x_3))\mathfrak{a}^{-1}\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}\\ \mathfrak{b}&=&(Z_1(x_1,x_2,x_3))(\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{d}^{\sigma^2}\mathfrak{a})^{-1}\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}\\ \mathfrak{e}_S&=&\displaystyle\prod_{\mathfrak{p}\in S}(ax_1^2-x_2x_3,x_2^2-x_3x_1,x_3^2-ax_1x_2)_{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-2}\\ \mathfrak{c}_{S,i}&=&\displaystyle\prod_{\mathfrak{p}\in S}\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(x_i)-v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}.\end{array}$$

L'application ρ est bijective.

Démonstration. — On montre comme dans la partie 4 que cette application est bien définie et bijective de réciproque l'application $\tau : \mathscr{H}'_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{H}_{\mathfrak{a}}$ qui à tout $(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}_S) \in \mathscr{H}'_{\mathfrak{a}}$ associe

$$\tau(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}_S) = (x_1, x_2, x_3)$$

où $Z_1(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{d}^{\sigma}\mathfrak{d}^{\sigma^2}\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}$ et pour tout $\mathfrak{p} \in S$, tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$v_{\mathfrak{p}}(x_i) = v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}_i^S) + v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}). \quad \square$$

Notons

$$M_S(x_1, x_2, x_3) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} N_{\mathfrak{p}}(ax_1^2 - x_2x_3, x_2^2 - x_3x_1, x_3^2 - ax_1x_2)$$

On dira que $(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}^S) \in \mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})^2 \times \mathscr{I}'^{\,4}_S$ vérifie la condition $(*)$ si il vérifie la condition $(\circ)$ ci-dessus pour un triplet (x_1, x_2, x_3) tel qu'on ait également

(2′) $$H_{\infty}(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN(\mathfrak{d})N(\mathfrak{a})^3 N(\mathfrak{e}_S)$$

(4) $$(j(x_1), j(x_2), j(x_3)) \in \Delta$$

(11)

On note $\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{H}'_{\mathfrak{a}}$ vérifiant la condition $(*)$.

$$\#\mathscr{N}_{\mathfrak{a}}(B) = \#\mathscr{N}'_{\mathfrak{a}}(B)$$

En effet un élément (x_1, x_2, x_3) de $\mathscr{H}_{\mathfrak{a}}$ d'image $(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}^S)$ vérifie

$$H_{-K}(x_1, x_2, x_3) \leqslant B$$

si et seulement si

$$H_{\infty}(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN((z_1, z_2)(z_2, z_3)(z_3, z_1)\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}))^{1/3} M_S(x_1, x_2, x_3)$$

où $z_i = Z_i(x_1, x_2, x_3)$ et donc si et seulement si

$$H_{\infty}(x_1, x_2, x_3) \leqslant BN(\mathfrak{d}\mathfrak{d}^{\sigma}\mathfrak{d}^{\sigma^2})^{1/3} N(\mathfrak{a}\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}) N(\mathfrak{e}_S) \prod_{\mathfrak{p} \in S} N(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})^3$$

Pour tout $(\mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}_S) \in \mathscr{I}'^{\,4}_S$ et tout $\mathfrak{p} \in S$, on considère dans le produit d'idéaux $\prod_{i=1}^{3} ((\mathfrak{c}_{S,i} + \mathfrak{e}_S)_{\mathfrak{p}} / (\mathfrak{e}_S)_{\mathfrak{p}})$, l'ensemble $F(\mathfrak{e}_S, \mathfrak{c}_S)$ défini par le système d'équations :

$$\begin{aligned} ax_1^2 - x_2x_3 &= 0, \\ x_2^2 - x_3x_1 &= 0, \\ x_3^2 - ax_1x_2 &= 0. \end{aligned}$$

On note alors
$$d_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)=\frac{\#F(\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)}{\#\prod_{i=1}^{3}((\mathfrak{c}_{S,i}+\mathfrak{e}_S)_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{e}_S)_{\mathfrak{p}})}.$$

Pour tout $(\mathfrak{c},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})\times{\mathscr{I}'_S}^4$, on note $m_{\mathfrak{c},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S}(B)$ le cardinal de l'ensemble des $(x_1,x_2,x_3)\in\mathscr{O}_k^3$ tels que

(4) $$(j(x_1),j(x_2),j(x_3))\in\Delta$$

(2") $$H_\infty(x_1,x_2,x_3)\leqslant B$$

(10) $$Z_1(x_1,x_2,x_3)\in\mathfrak{c}$$

(11) $$\forall\mathfrak{p}\in S,\forall i\in\{1,2,3\},v_{\mathfrak{p}}(x_i)\geqslant v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}_{S,i})$$

(12) $$\forall\mathfrak{p}\in S,v_{\mathfrak{p}}(ax_1^2-x_2x_3,x_2^2-x_2x_3,x_3^2-ax_1x_2)\geqslant v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{e}_S).$$

L'ensemble des $(x_1,x_2,x_3)\in\mathscr{O}_k^3$ vérifiant les conditions (10) et (11) forment un sous-$\mathscr{O}_k$-module de $\mathscr{O}_k^3$. On notera M le réseau qui est l'image de ce module par l'application $\mathscr{O}_k^3\to(\prod_{v\in M_\infty}k_v)^3$. On note également
$$\mathscr{D}_B=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^{+3N}\,\middle|\,\left\{\begin{array}{l}(x_1,x_2,x_3)\in\Delta\\ H_\infty(x_1,x_2,x_3)\leqslant B\end{array}\right.\right\}.$$

L'équivalent de lemme 4 consisterait à majorer
$$\left|m_{\mathfrak{c},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S}(B)-\frac{\prod_{\mathfrak{p}\in S}d_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)\mathrm{Vol}\mathscr{D}_B}{\mathrm{Det}(M)}\right|$$

avec les relations :
$$\mathrm{Det}(M)=\frac{N(\mathfrak{c})N(\mathfrak{c}_{S,1}\mathfrak{c}_{S,2}\mathfrak{c}_{S,3})\sqrt{d}^3}{2^{3r_2}}$$

et $\mathrm{Vol}\mathscr{D}_B=B\mathrm{Vol}\mathscr{D}_1$.

Comme dans la partie 7, on fixe maintenant
$$\mathfrak{f}_0=(\mathfrak{d}_0,\mathfrak{b}_0,\mathfrak{c}_S^0)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_{\mathfrak{S}_{\mathbf{K}}})^2\times{\mathscr{I}'_S}^3$$

et on note $\mathscr{P}_{\mathfrak{f}_0}(B)$ l'ensemble des éléments $(\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{e}_S,\mathfrak{c}_S)$ de $\mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})^2\times{\mathscr{I}'_S}^4$ vérifiant la condition $(*)$ ci-dessus ainsi que
$$\mathfrak{d}\subset\mathfrak{d}_0,\ \mathfrak{b}\subset\mathfrak{b}_0\text{ et }\mathfrak{c}_i^S\subset\mathfrak{c}_{S,i}^0\text{ pour }1\leqslant i\leqslant 3.$$

On note $P_{\mathfrak{f}_0}$ le cardinal de $\mathscr{P}_{\mathfrak{f}_0}$. Comme dans la partie 7, on montre que

$$P_{\mathfrak{f}_0}(B) = \sum_{(\mathfrak{d}',\mathfrak{e}'_S)\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})\times\mathscr{I}'_S} m'_{\mathfrak{d}',\mathfrak{e}'_S}(B)$$

où $m'_{\mathfrak{d}',\mathfrak{e}'_S}(B)$ est défini de la manière suivante : on considère $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_0\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{d}^{\sigma^2}\mathfrak{b}_0\mathfrak{a}\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}}$, $\mathfrak{a}_S = \prod_{\mathfrak{p}\in S}\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{c}_S = \mathfrak{c}_S^0\mathfrak{a}_S$ et alors

$$m'_{\mathfrak{d},\mathfrak{e}'_S}(B) = \sum_{\mathfrak{e}''_S\in\mathscr{I}'_S} \mu_1(\mathfrak{e}''_S) m_{\mathfrak{c},\mathfrak{e}''_S\mathfrak{e}'_S\mathfrak{a}_S^2,\mathfrak{c}_S\mathfrak{a}_S}(BN(\mathfrak{d})N(\mathfrak{a})^3N(\mathfrak{e}'_S))$$

avec

$$\mu_1(\mathfrak{e}''_S) = \prod_{\mathfrak{p}\in S}\mu_1((e''_S)_\mathfrak{p})$$

et

$$\mu_1(\mathfrak{p}^k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k=0 \\ -1 \text{ si } k=1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Il s'agit en fait d'une formule d'inversion élémentaire permettant de passer de le condition $M_S(x_1,x_2,x_3) \geqslant k$ à la condition $M_S(x_1,x_2,x_3) = k$.

Notons

$$C_S(\mathfrak{c}_S) = \sum_{\mathfrak{e}'_S\in\mathscr{I}'_S} N(\mathfrak{e}'_S) \sum_{\mathfrak{e}''_S\in\mathscr{I}'_S} \mu_1(\mathfrak{e}''_S)\prod_{\mathfrak{p}\in S} d_\mathfrak{p}(\mathfrak{e}'_S\mathfrak{e}''_S\mathfrak{a}_S^2,\mathfrak{c}_S\mathfrak{a}_S)$$

On admettra par la suite que cette série est convergente. Le nombre réel $C_S(\mathfrak{c}_S)$ est en fait indépendant de $\mathfrak{a}$.

L'analogie avec le lemme 8 amène alors à s'intéresser à la série de Dirichlet :

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathbf{K},S_{\mathbf{K}}}(s) &= \sum_{\mathfrak{d}'\in\mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})}\frac{1}{N(\mathfrak{d})^s} \\
&= \prod_{\mathfrak{P}\in M_{f,\mathbf{K}}-S_{\mathbf{K}}}\sum_{m\in\mathbf{N}}\frac{1}{N(\mathfrak{P}^m)^s} \\
&= \prod_{\mathfrak{P}\in M_{f,\mathbf{K}}-S_{\mathbf{K}}}\frac{1}{1-\frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}}
\end{aligned}$$

Si $\mathfrak{p}$ est scindé dans l'extension $\mathbf{K}/k$, alors

$$\begin{aligned}\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}} &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^3} \\ &= L_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Pic} V, s)\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}\right)\end{aligned}$$

sinon, il existe un seul $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ et dans ce cas

$$\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}} = \frac{1}{1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{3s}}}$$

Or, dans ce cas, l'action du Frobenius sur $\mathrm{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{p}}})$ est donnée, en utilisant la base associée à Λ, L_1, L_2 et L_3, par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} L_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Pic} V, s)^{-1} &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{N(\mathfrak{p})^s} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{N(\mathfrak{p})^s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{N(\mathfrak{p})^s} \end{pmatrix} \\ &= \left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{3s}}\right) \end{aligned}$$

En définitive, on a démontré le lemme suivant :

Lemme 13. — *On a la relation*

$$\zeta_{\mathbf{K},S_{\mathbf{K}}}(s) = L_S(\mathrm{Pic} V, s)/\zeta_{k,S}(s)$$

L'analogue du lemme 8 serait donc d'obtenir une équivalence entre le cardinal $P_{\mathfrak{f}_0}(B)$ et $C''B\log^{t-1}B$ où $t = \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(V)$ et C'' une constante de la forme :

$$C'' = C_S(\mathfrak{c}_S^0)C_0 \lim_{s\to 1}(s-1)^{t-1}\frac{L_S(\mathrm{Pic} V, s)}{\zeta_{k,S}(s)}\frac{\mathrm{Vol}\mathscr{D}_1\sqrt{d}^3}{N(\mathfrak{d}_0\mathfrak{b}_0)\prod_{i=1}^3 N(\mathfrak{c}_{S,i}^0)2^{3r_2}}$$

Dans le cas de trois points rationnels sur $\mathbf{Q}$, on avait $C_0 = \frac{1}{t!}$. On peut remarquer que le théorème de Hardy, Littlewood et Karamata comprend par contre une constante $\frac{1}{(t-1)!}$.

Notons $\mathscr{B} = \mathscr{I}(\mathscr{O}_{S_{\mathbf{K}}})^2 \times \mathscr{I}'^{3}_{S}$ et $\mathscr{A}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{B}$ vérifiant les conditions $(\mathrm{C}_{\mathfrak{P}})$ pour tout $\mathfrak{P} \in M_{f,\mathbf{K}} - S_{\mathbf{K}}$ et $(\mathrm{C}_{\mathfrak{p}})$ pour tout $\mathfrak{p} \in S$. Pour tout $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathscr{B}$ et tout $\mathfrak{p} \in M_f$, on prend des notations $(\mathfrak{b})$, $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{b}|\mathfrak{b}'$ analogues à celles utilisées dans la partie 8. En outre, on pose $\alpha_S((\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}_S)) = \frac{1}{N(\mathfrak{d})N(\mathfrak{b})}$ et si $\mathfrak{p} \in M_{f,k}$

$$\mathscr{B}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{b} \in \mathscr{B} \mid v'_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) = 0 \text{ si } \mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}\}$$

Lemme 14. — *Il existe une unique fonction* $\mu : \mathscr{B} \to \mathbf{Z}$ *telle que*

(a) $\chi_{\mathscr{A}} = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B}} \mu(\mathfrak{b}) \chi_{(\mathfrak{b})}$

Cette fonction vérifie en outre :

(b) *Pour tout* $\mathfrak{b} \in \mathscr{B}$, $\mu(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f} \mu(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}})$,

(c) *Si* $\mathfrak{p} \notin S$, $\sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{B}(\mathfrak{p})} \mu(\mathfrak{b}) \alpha_S(\mathfrak{b}) = \frac{d_{\mathfrak{p}}(V)}{L_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Pic}\, \overline{V}, 1)}$.

Démonstration. — Les assertions (a) et (b) se démontrent comme dans la partie 8. Montrons (c) en distingant le cas où $\mathfrak{p}$ est scindé et le cas où il ne l'est pas. Supposons $\mathfrak{p}$ scindé, soient $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ et $\mathfrak{P}_3$ les idéaux premiers de $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Si $n \in \mathbf{N}^6$ et $\mathfrak{p} \in M_f - S$, on note

$$\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{P}_1^{n_1}\mathfrak{P}_2^{n_2}\mathfrak{P}_3^{n_3}, \mathfrak{P}_1^{n_4}\mathfrak{P}_2^{n_5}\mathfrak{P}_3^{n_6}, \mathscr{O}_k, \mathscr{O}_k, \mathscr{O}_k).$$

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^6 & \to & \mathbf{Z} \\ n & \mapsto & \chi_{\mathscr{A}}(\mathfrak{p}^n) \end{array}$ est la même que dans la partie 8 et on retrouve la même fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^6 & \to & \mathbf{Z} \\ n & \mapsto & \mu(\mathfrak{p}^n) \end{array}$ Donc (c) est démontrée dans ce cas.

Dans le cas contraire, soit $\mathfrak{P}$ l'idéal premier de $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. la condition $(C_{\mathfrak{P}})$ pour un élément $(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}_S) \in \mathscr{B}$ s'écrit

$$v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b}) = v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{d}) = 0.$$

Si $n \in \mathbf{N}^2$, on note $\mathfrak{p}^n = (\mathfrak{P}^{n_1}, \mathfrak{P}^{n_2}, \mathscr{O}_k, \mathscr{O}_k, \mathscr{O}_k) \in \mathscr{B}$ Comme ci-dessus $\mu(\mathfrak{p}^n)$ ne dépend que de n, on note $\mu(n)$ cette valeur. L'entier $\mu(n)$ est nul si un des $n_i \geqslant 2$

pour un $i \in \{1,2,3\}$. De plus

$$\begin{array}{ll} \mu((0,0)) = 1 & \mu((0,1)) = -1 \\ \mu((1,0)) = -1 & \mu((1,1)) = 1 \end{array}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbf{N}^2} \mu(\mathfrak{p}^n)\alpha_S(\mathfrak{p}^n) &= 1 - \frac{2}{N(\mathfrak{p})^3} + \frac{1}{N(\mathfrak{p})^6} \\ &= \left(\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^3}\right)\right)\left(1+\frac{1}{N(\mathfrak{p})}+\frac{1}{N(\mathfrak{p})^2}\right) \\ &= \frac{d_\mathfrak{p}(V)}{L_\mathfrak{p}(\operatorname{Pic} V, 1)}. \end{aligned}$$

□

La constante que l'on peut espérer obtenir dans ce cas est donc de la forme

$$C' = C_0 \lim_{s\to 1}(s-1)^{t-1} L_S(\operatorname{Pic} V, s)/\zeta_{k,S}(s) \frac{\operatorname{Vol}\mathscr{D}_1 d^{3/2}}{2^{3r_2}} \prod_{\mathfrak{p}\in S} C_\mathfrak{p} \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \frac{d_\mathfrak{p}(V)}{L_\mathfrak{p}(\operatorname{Pic} V, 1)}.$$

Il est également vraisemblable que l'on puisse écrire pour tout $\mathfrak{p} \in S$

$$C_\mathfrak{p} = \left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)\frac{\operatorname{Vol}_H(\mathscr{V}_{\mathscr{O}_{k_\mathfrak{p}}})}{N(\mathfrak{p})^2}$$

ainsi qu'une relation de la forme

$$\frac{\operatorname{Vol}\mathscr{D}_1\sqrt{d}}{2^{r_2}} = \prod_{v\in M_\infty} \operatorname{Vol}_H(V_{k_v}) \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_k(s).$$

Je tiens à remercier Y. Manin, Y. Tschinkel et J.-L. Colliot-Thélène pour les discussions et les indications qui sont à la base de ce texte.

Références

[Bl] S. Bloch, *A note on height pairings, Tamagawa numbers and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture*, Invent. Math. **58** (1980), 65–76.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[MT] Y. I. Manin and Y. Tschinkel, *Points of bounded height on del Pezzo surfaces*, Compositio Math. **85** (1993), n° 3, 315–332.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433–449.

[Se] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

1993

Emmanuel Peyre, Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582, Université de Grenoble I et CNRS, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères CEDEX, France
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`
• *E-mail :* `Emmanuel.Peyre@ujf-grenoble.fr`