# Introduction

Le but de ce cours est :

- Introduire des propriétés de base de l'intégrale de Riemann en commençant avec le cas des fonctions bornées sur un intervalle fermé borné.
- Discuter certains outils de calcul : le changement de variable, l'intégration par parties, les théorèmes de la moyenne, l'approximation par des suites de fonctions simples, etc.
- Donner quelques applications plus avancées : quelques exemples de régularisation, les séries de Fourier.
- Un premier traitement d'intégration des fonctions de plusieurs variables, y inclus le théorème de Fubini.

La plupart des matières, ainsi que leur traitement ici est classique et se trouve par exemple dans le livre [**Rudin**]. Les exceptions sont :

- Les théorèmes de convergence bornée et dominée dans le cadre des intégrales de Riemann. Le traitement présenté ici est dû à A. Dufresnoy. Même si la démonstration n'est pas simple, ce théorème a tellement d'applications pratiques qu'il est fortement conseillé que les étudiants comprennent au moins l'énoncé et sachent l'appliquer dans des situations variées.

– L’utilisation des partitions de l’unité (par des fonctions presque partout continues) pour arriver à une définition satisfaisante de l’intégrale de Riemann des fonctions sur un sous-ensemble arbitraire de $\mathbb{R}^n$. Cet approche géométrique est est une adaptation du traitement donné en [**Spivak**].

Les paragraphes un peu plus durs et qu’on pourrait ne pas utiliser pour le cours sont garnis d’un astérisque.

Pour une autre traitement, qui prépare en même temps à l’introduction efficace de l’intégrale de Lebesgue je renvoie à [**McShane**]. Dans ce livre tout est expliqué de façon détaillée, mais le traitement non-classique demande beaucoup d’attention.

Ces notes de cours ont été préparés à l’aide d’un manuscrit de A. DUFRESNOY qui je remercie chaleureusement.

# Bibliographie

[McShane] Mcshane, E.J. : Unified integration, Academic Press, Orlando ; San Diego ; San Francisco, (1983).

[Rudin] Rudin, Walter : Principles of mathematical analysis. Third edition, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo ; Auckland ; Düsseldorf (1976).

[Spivak] Spivak, Michael : Calculus on manifolds, W. A. Benjamin, New York NY ; Amsterdam (1965).

CHAPITRE 1

# Intégrale de Riemann : le cas borné

## 1. Définition

On a vu en DEUG qu'on peut intégrer les fonctions continues $f$ sur un intervalle (borné et fermé) $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Dans ce qui suit on pose :

$$\int_J f = \int_a^b f(x)dx,$$

ou même $\int f$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la domaine d'intégration.
Cet intégrale a les propriétés fondamentales suivantes :

(1) Si $f \geqslant 0$, alors $\int_J f \geqslant 0$ et l'intégrale d'une fonction continue positive s'annule si et seulement si la fonction est nulle.

(2) Si $f, g$ sont deux fonctions continues sur $J$ et $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_J (af + bg) = a\int_J f + b\int_J g.$$

C'est la propriété de *linéarité*.

(3) Si $a < c < b$, alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

C'est *la règle de Chasles* qui exprime *l'additivité* de l'intégrale.

(4) Si on pose pour tout $x \in J$ :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

alors $F$ est dérivable et $F'(x) = f(x)$. C'est la *règle fondamentale* de l'intégration.

La propriété 1) s'explique géométriquement : pour $f \geqslant 0$ on peut interpréter $\int_J f$ comme l'aire de la région en dessous du graphe de $f$.

La propriété 3) suggère comment calculer l'intégrale des fonctions continues par morceaux.

Notre but est de rappeler la définition de l'intégrale de Riemann pour une classe de fonctions sur $J$ contenant les fonctions continues par morceaux. Dans un premier temps on ne considère que des fonctions *bornées.*

L'intégrale de Riemann est souvent définie comme étant la limite de certaines *sommes de Riemann.* Pour cela on considère une subdivision

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$$

et on pose

$$\begin{array}{rcll} J_i & = & [x_{i-1}, x_i], & (i = 1, \ldots, N) \\ \Delta_i x & = & x_i - x_{i-1}, & (i = 1, \ldots, 0) \\ \mu(P) & = & \max\limits_{i=1,\ldots,N} \Delta_i x & (\text{le } \textit{pas} \text{ de } P). \end{array}$$

et on choisit des points intermédiaires :

$$\vec{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_{N-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad (i = 1, \dots, N).$$

La somme de Riemann associée est

$$s(P, \vec{\xi}, f) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta_i x.$$

On regarde ces sommes pour tout choix de subdivision $P$ et points intermédiaires $\vec{\xi}$. Si $f$ est continue, ses sommes de Riemann tendent vers une limite lorsqu'on on raffine la subdivision de plus en plus, c.à.d si le pas de la subdivision tend vers zéro. Cette limite est, par définition, l'intégrale $\int_J f$. On regardera cette approche plus en détail dans le paragraphe suivant.

Voici une autre approche plus élémentaire : on n'a pas besoin des points intermédiaires mais on compare simplement $s_i(f) := \inf_{J_i} f$ et $S_i(f) := \sup_{J_i} f$ en introduisant

$$\begin{aligned} s(P, f) &= \sum_{i=1}^{N} s_i(f)\Delta_i x \\ S(P, f) &= \sum_{i=1}^{N} S_i(f)\Delta_i x. \end{aligned}$$

Pour comprendre la définition de l'intégrale il faut d'abord montrer quelques propriétés élémentaires. Il s'agit de comprendre ce qu'il se passe quand on rajoute un nombre fini de points à une subdivision donnée. On parle d'un *raffinement* de $P$. Les propriétés suivantes sont faciles à voir :

LEMME 1.1. 1) *Pour un raffinement $P^*$ de $P$ on a*

$$s(P, f) \leqslant s(P^*, f) \leqslant S(P^*, f) \leqslant S(P, f).$$

2) *Si pour tout $x \in J$ on a $|f(x)| \leqslant M$, alors*

$$|s(P, f)| \leqslant M(b-a), \quad |S(P, f)| \leqslant M(b-a).$$

*Les deux nombres $s(P, f)$ et $S(P, f)$ restent donc dans un intervalle borné si $P$ parcourt les subdivisions de $J$ et donc (axiome de la borne supérieure) $\underline{\int} f = \sup_P s(P, f)$ et $\overline{\int} f = \inf_P S(P, f)$ existent.*

3) *On a*

$$\underline{\int} f = \sup_P s(P, f) \leqslant \inf_P S(P, f) = \overline{\int} f.$$

Vous pouvez montrer ces assertions ?

Définition 1.2. Si $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ on dit que $f$ est *intégrable (au sens de Riemann)* et on pose :

$$\begin{aligned} \int_J f &= \underline{\int} f = \sup_P s(P, f) \\ &= \overline{\int} f = \inf_P S(P, f). \end{aligned}$$

Exemple 1.3. |

– Pour $A \subset \mathbb{R}$ on définit

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $A = \mathbb{Q} \cap J$, la fonction $f = \mathbb{1}_A$ n'est pas intégrable.

Pourquoi ?

– La fonction $f(x) = x$ est intégrable.

Voici un critère important :

PROPOSITION 1.4. 1) *Si* $\int_J f = \mathbb{I}$*, pour tout* $\epsilon > 0$ *on peut trouver une subdivision* $P$ *telle que*

$$S(P, f) - \mathbb{I} < \epsilon/2, \quad \mathbb{I} - s(P, f) < \epsilon/2. \tag{1}$$

*En particulier :*

$$S(P, f) - s(P, f) < \epsilon.$$

2) *Réciproquement, si pour tout* $\epsilon > 0$ *on peut trouver une subdivision* $P$ *telle que* $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$*, alors* $f$ *est intégrable.*

DÉMONSTRATION. 1) Soit $\epsilon > 0$. On a des subdivisions $P_1$ et $P_2$ telle que

$$\begin{aligned} \int f - s(P_1, f) &< \epsilon/2 \\ S(P_2, f) - \int f &< \epsilon/2. \end{aligned}$$

Prenant le *raffinement commun* de $P_1$ et $P_2$ (c.à.d. on prend la réunion des points de $P_1$ et de $P_2$), par le Lemme 1.1 on peut supposer que $P_1 = P_2$.
2) On a

$$s(P, f) \leqslant \sup_P s(P, f) \leqslant \inf_P S(P, f) \leqslant S(P, f)$$

et donc pour tout $\epsilon > 0$ :

$$0 \leqslant \inf_P S(P, f) - \sup_P s(P, f) \leqslant S(P, f) - s(P, f) < \epsilon.$$

Donc $\inf_P S(P, f) = \sup_P s(P, f)$ et $f$ est intégrable. □

Puisque $S(P, f) \leqslant \sup_J f \cdot |J|$ et $\inf_J f \cdot |J| \leqslant s(P, f)$, le Lemme. (1.1) montre :

COROLLAIRE 1.5. *On a*

$$\inf_J f \cdot |J| \leqslant \int_J f \leqslant \sup_J f \cdot |J|$$

*et donc (puisque* $\sup_J |f| = \max(|\sup_J f|, |\inf_J f|)$*) :*

$$\boxed{\left| \int_J f \right| \leqslant \sup_J |f| \cdot |J|.}$$

APPLICATIONS 1.6. |

(1) Une fonction monotone est intégrable.

(2) Une fonction continue est intégrable.

(3) Une fonction continue sauf en un nombre fini de points est intégrable, par exemple une *fonction en escalier* $e$ : soit $\{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision et on exige $e|]x_{i-1}, x_i[= c_i$, $i = 1, \ldots, n$ ($e(x_k)$, $k = 1, \ldots, n$ est complètement arbitraire).

DÉMONSTRATION. (1) On suppose que $f$ soit croissante. Soit $\epsilon > 0$ et on choisit $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\frac{b-a}{n}\,(f(b) - f(a)) < \epsilon.$$

Soit $g = (b - a)$ et $P = \{a, a + g/n, \ldots, a + ((n-1)g)/n, a + g = b\}$. Alors

$$\begin{aligned} S(P, f) - s(P, f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \epsilon. \end{aligned}$$

(2) On se donne $\epsilon > 0$ et on choisit $\eta > 0$ telle que

$$(b-a)\eta < \epsilon. \tag{2}$$

Puisque $f$ est uniformément continue, pour chaque $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ telle que :

$$|x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \eta. \tag{3}$$

Ensuite, on choisit une subdivision $P$ dont le pas est $< \delta$. L'estimation (3) montre que sur chaque sous-intervalle $J' \subset J$ de longueur $< \delta$ la variation maximale de $f$ est moins que $\eta$ :

$$\sup_{J'} f - \inf_{J'} f \leqslant \eta, \quad \text{si } |J'| < \delta.$$

En particulier c'est vrai pour chaque intervalle de la subdivision $P$ et donc on a

$$S(P,f) - s(P,f) \leqslant \eta(b-a) < \epsilon$$

par (2).

(3) Si $f$ est continue par morceaux, il est facile d'adapter l'argument précédent.

$\square$

## 2. Propriétés de base

D'abord quelques notations. Soit $J = [a,b]$ un intervalle fermé. Soit $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} f \vee g &:= \sup(f,g) \\ f \wedge g &:= \inf(f,g). \end{aligned}$$

On pose aussi

$$
\begin{aligned}
f_+ &:= f \vee 0 \\
f_- &:= -(f \wedge 0).
\end{aligned}
$$

Donc :

$$f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-.$$

PROPRIÉTÉS 2.1. | Soit $J = [a, b]$ et soit $\mathscr{I}(J)$ l'ensemble des fonctions $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées et intégrables. Alors :

(1) L'intégration

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\int & : & \mathscr{I}(J) \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & & f \mapsto \int_J f.
\end{array}
\right.
$$

est une application linéaire qui respecte l'ordre : si $f \leqslant g$, alors $\int_J f \leqslant \int_J g$ ;

(2) Le produit des fonctions intégrables est intégrable ;

(3) Si $f$ est intégrable, alors $|f|$ l'est et l'on a

$$\boxed{\left|\int_J f\right| \leqslant \int_J |f|;}$$

(4) Si $f$ et $g$ sont intégrables, alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ le sont. En particulier $f_-$ et $f_+$ sont intégrables.

(5) L'intégration est additive : pour $c \in [a, b]$ les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ existent et on a

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.}$$

DÉMONSTRATION. (1) Pour $a \in \mathbb{R}$ on a trivialement que $\int (af) = a \int f$.

Ensuite, on utilise les inégalités valables pour tout sous-intervalle $J' \subset J$ :

$$\begin{aligned} \inf_{J'} f + \inf_{J'} g &\leqslant \inf_{J'}(f+g) \\ \sup_{J'}(f+g) &\leqslant \sup_{J'} f + \sup_{J'} g \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} s(P, f) + s(P, g) &\leqslant s(P, f+g) \\ &\leqslant S(P, f+g) \leqslant S(P, f) + S(P, g). \end{aligned} \tag{4}$$

Soit $\epsilon > 0$. On utilise le critère 1.4 pour trouver deux subdivisions $P_1$ et $P_2$ telles que

$$\begin{aligned} S(P_1, f) - s(P_1, f) &< \epsilon \\ S(P_2, g) - s(P_2, g) &< \epsilon. \end{aligned}$$

Ces inégalités persistent pour leur raffinement commun $P$. En les additionnant et utilisant (4) on trouve

$$S(P, f+g) - s(P, f+g) < 2\epsilon$$

et donc $f + g$ est intégrable (par 1.4).

Pour montrer que $\int (f+g) = \int f + \int g$ on utilise que

$$\begin{aligned} S(P,f) &< \int f + \epsilon \\ S(P,g) &< \int g + \epsilon \end{aligned}$$

a donc

$$\int (f+g) \leqslant S(P, f+g) \leqslant S(P,f) + S(P,g) < \int f + \int g + 2\epsilon.$$

Puisque c'est valable pour tout $\epsilon > 0$ l'inégalité $\int (f+g) \leqslant \int f + \int g$ s'en déduit. En remplaçant $f$ par $-f$ et $g$ par $-g$ on trouve l'inégalité opposée et donc égalité. Cela complète la démonstration de la linéarité.

Finalement on suppose $f \leqslant g$. Alors, pour tout sous-intervalle $J' \subset J$ on a $\inf_{J'} f \leqslant \inf_{J'} g$ et donc $s(P,f) \leqslant s(P,g)$ et

$$\int f = \sup_P s(P,f) \leqslant \sup_P s(P,g) = \int g.$$

(2) On a $4f \cdot g = (f+g)^2 - (f-g)^2$ et donc il suffit de montrer que $h^2$ est intégrable si $h$ l'est. Faites le ! Ici vous trouvez l'argument.

(3) On utilise $||u| - |v|| \leqslant |u - v|$ pour en déduire pour tout sous-intervalle $J' \subset J$ :

$$\sup_{J'} |f| - \inf_{J'} |f| \leqslant \sup_{J'} f - \inf_{J'} f.$$

Alors, pour $\epsilon > 0$ on a une subdivision $P$ avec $S(P,f) - s(P,f) < \epsilon$ et l'inégalité précédente montre :

$$S(P,|f|) - s(P,|f|) \leqslant S(P,f) - s(P,f) < \epsilon$$

et donc $|f|$ est intégrable. De plus, utilisant que $f = f_+ - f_- \leqslant f_+ + f_- = |f|$, on a

$$\begin{aligned}\int f &= \int (f_+ - f_-)\\ &\leqslant \int (f_+ + f_-)\\ &= \int (f_+ + f_-) = \int |f|\end{aligned}$$

et de même en utilisant $-f = f_- - f_+ \leqslant |f|$ on trouve que $-\int f \leqslant \int |f|$.

(4) On utilise $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ et $\inf(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$.

(5) Soit $P$ une subdivision de $[a,b]$. Soit $P^*$ la subdivision que l'on obtient en rajoutant le point $c$ à $P$. Puisque

$$s(P,f) \leqslant s(P^*,f) \leqslant S(P^*,f) \leqslant S(P,f),$$

on peut évaluer l'intégrale $\int_a^b f$ en n'utilisant que des subdivisions contenant le point $c$. Pour de telles subdivisions, $P$ induit une subdivision $P'$ de $[a,c]$ et $P''$ de $[c,b]$ et réciproquement à partir de $P'$ et $P''$ on obtient une subdivision $P$ de $[a,b]$ contenant $c$. On a

$$s(P,f) = s(P',f) + s(P'',f) \leqslant S(P',f) + S(P'',f) = S(P,f).$$

Puisque $\sup_P s(P,f) = \inf_P S(P,f)$ on a donc

$$\sup_{P'} s(P',f) + \sup_{P''} s(P'',f) = \inf_{P'} S(P',f) + \inf_{P''} S(P'',f)$$

et l'inégalité $\sup_{P'} s(P', f) \leqslant \inf_{P'} S(P', f)$ et l'inégalité analogue pour $P''$ impliquent alors qu'on a égalité pour les deux inégalités. Cela montre bien $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ existent et que leur somme vaut $\int_a^b f$.

$\square$

## 3. Intégrale comme limite de sommes

On reprend ici la définition “classique” de l'intégrale de Riemann utilisant des sommes de Riemann $s(P, f, \vec{\xi})$ associées à une subdivision $P$ de $J = [a, b]$ introduites dans le paragraphe 1. Ici $P = \{a = x_0, \ldots, x_N = b\}$ et

$$\vec{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{N-1}), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] = J_i, \quad (i = 0, \ldots, N-1).$$

DÉFINITION 3.1. On dit que

$$\boxed{\mathbb{I} = \lim_{\mu(P) \to 0} s(P, f, \xi)}$$

si pour tout $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ telle que pour chaque subdivision $P$ dont le pas est $< \delta$ et chaque choix $\vec{\xi}$ des points intermédiaires, on ait $\left| s(P, f, \xi) - \mathbb{I} \right| < \epsilon$.

*Remarque*. On a les inégalités

$$s(P, f) \leqslant s(P, f, \vec{\xi}) \leqslant S(P, f)$$

qui découlent du fait que

$$\begin{aligned} s(P, f) &= \inf_{\vec{\xi}} s(P, f, \vec{\xi}) \\ S(P, f) &= \sup_{\vec{\xi}} s(P, f, \vec{\xi}). \end{aligned}$$

En fait, on a le théorème de comparaison suivant :

THÉORÈME 3.2. *Une fonction $f$ bornée sur $J = [a, b]$ est intégrable avec $\mathbb{I} = \int_a^b f$ si et seulement si $\mathbb{I} = \lim_{\mu(P)\to 0} s(P, f, \xi)$ (c.à.d. la limite existe et est égale à $\mathbb{I}$).*

DÉMONSTRATION. $\Longleftarrow$ Soient $\epsilon > 0$ et $\delta$, $P$ et $\mathbb{I}$ comme dans la définition. Remplaçant $\epsilon$ par $\epsilon/2$, on trouve pour tout $\vec{\xi}$ :

$$\mathbb{I} - \epsilon/2 < s(P, f, \vec{\xi}) < \mathbb{I} + \epsilon/2. \tag{5}$$

On obtient $s(P, f)$ à partir de $s(P, f, \vec{\xi})$ si on remplace $f(\xi_i)$ par $\inf_{J_i} f$ et $f(\xi_i)$ par $\sup_{J_i} f$ pour $S(P, f)$. Par conséquent, 5 implique :

$$\mathbb{I} - \epsilon/2 \leqslant s(P, f) \leqslant S(P, f) \leqslant \mathbb{I} + \epsilon/2.$$

Donc d'une part $S(P, f) - s(P, f) \leqslant (\mathbb{I} + \epsilon/2) - (\mathbb{I} - \epsilon/2) = \epsilon$ et donc $f$ est intégrable. D'autre part on a

$$\mathbb{I} - \epsilon/2 \leqslant s(P, f) \leqslant \int f \leqslant S(P, f) \leqslant \mathbb{I} + \epsilon/2$$

et donc, en laissant $\epsilon$ tendre vers 0, on trouve $\mathbb{I} = \int f$.

$\Longrightarrow$ On suppose $f$ intégrable. Utilisant Prop. 1.4, on choisit d'abord $P^*$ telle que

$$S(P^*, f) - \mathbb{I} < \epsilon/2, \quad \mathbb{I} - s(P^*, f) < \epsilon/2. \tag{6}$$

Avec $n^*$ le nombre d'intervalles de $P^*$, et en posant

$$M = \sup |f|$$

on pose

$$\delta = \frac{\epsilon}{4Mn^*}. \tag{7}$$

Soit $P$ une subdivision telle que $\mu(P) < \delta$ et on compare $P$ et $P^*$. Il y a deux sortes d'intervalles pour $P$ : d'une part, les intervalles qui sont inclus dans un des intervalles de $P^*$ et d'autre part ceux qui sont "à cheval", c.à.d. les intervalles $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ avec $x^* \in P^*$ tel que $x^* \in ]x_{i-1}, x_i[$. Les intervalles contenus dans un intervalle de $P^*$ contribuent $< \epsilon/2$ à $S(P, f) - I$ et $I - s(P, f)$ par l'hypothèse (6). On a au plus $(n^* - 1)$ d'autres intervalles et leur contribution à $S(P, f) - \mathbb{I}$ et $\mathbb{I} - s(P, f)$ est donc

$$\begin{aligned} \leqslant (n^* - 1)M\mu(P) &< (n^* - 1)2M\delta \\ &= \frac{n^* - 1}{2n^*}\epsilon \\ &< \frac{1}{2}\epsilon. \end{aligned}$$

par (7) et donc

$$S(P, f) - \mathbb{I} < \epsilon, \quad \mathbb{I} - s(P, f) < \epsilon.$$

Si $\mu(P) < \delta$, cet estimation combinée avec l'estimation élémentaire de la remarque précédente $s(P, f) \leqslant s(P, f, \vec{\xi}) \leqslant S(P, f)$ donne le résultat souhaité :

$$\left| s(P, f, \vec{\xi}) - \mathbb{I} \right| < \epsilon.$$

□

La démonstration implique :

COROLLAIRE 3.3. *On suppose que $f$ est intégrable sur l'intervalle $J$. Si on se donne une suite de subdivisions $P_n$ de $J$ dont le pas converge vers zéro lorsque $n$ tend vers l'infini, alors, pour n'importe quel choix (relatif à $P_n$) de points intermédiaires $\vec{\xi}_n$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} s(P_n, f, \vec{\xi}_n) = \lim_{n\to\infty} s(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} S(P_n, f) = \int_J f.$$

# 4. Intégration et dérivation

THÉORÈME 4.1. *Soit* $f : J = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *intégrable. Soit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad t \in [a, b].$$

*Alors,* $F$ *est continue et si* $f$ *est continue en* $x = x_0$*, alors* $F$ *est dérivable en ce point et*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\sup |f| = M$. Soient $x, y \in [a, b]$ telle que $x < y$. On a

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f \right| \leqslant M(y - x)$$

et donc $F$ est continue car Lipschitzienne.

Pour la dérivabilité de $F$ en $x_0$ on suppose que $f$ est continue en $x_0$, c.à.d. pour $\epsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ telle que :

$$|x_0 - t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Alors, si $x_0 - \delta < s < x_0 < t < x_0 + \delta$ on a :

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t (f - f(x_0)) \right| < \epsilon,$$

et donc $F'(x_0) = f(x_0)$. □

THÉORÈME 4.2. *Soit* $f : J = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *intégrable et soit* $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable telle que* $F' = f$*, alors*

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Avant de montrer l'énoncé, il faut se souvenir du *Théorème des accroissements finis*. Donner l'énoncé. On le trouve ici

Démonstration. Soit $P = \{a = x_0, \dots, x_N = x\}$ une subdivision quelconque de $[a, x]$. On applique le théorème des accroissements finis à l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ : il y a $\xi_i \in ]x_{i-1}, x_i[$ avec

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

Donc

$$F(x) - F(a) = \sum F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum f(\xi_i)\Delta_i.$$

Prenant une suite de partions $P_n$ dont le pas tend vers zéro, par Corr. 3.3, le membre de droite tend vers $\int_a^x f$. $\square$

## Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ? :

(1) Une fonction monotone (sur un intervalle fermé) est bornée.

(2) Si les fonctions bornées $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont intégrables, alors $f/g$ est intégrable.

(3) L'intégrale $F(x) = \int_a^x f$ d'une fonction intégrable (sur un intervalle fermé contenant $[a,x]$) est continue. Elle est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

(4) L'intégrale $F(x)$ d'une fonction positive $f(x)$ est croissante.

(5) La fonction caractéristique d'un sous-ensemble dénombrable de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est intégrable.

(6) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $|f|$ est intégrable. Alors $f$ est intégrable.

Réponses

## Exercices

(1) Déterminer un polynôme réel $Q$, de degré 4, qui vérifie : $Q(0) = 0$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x+1) - Q(x) = x^3$. En déduire une expression pour $\sum_{k=1}^{n} k^3$, puis la valeur de $\int_0^1 x^3 dx$.

Réponse

(2) Évaluer pour $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$. En déduire la valeur de $\int_0^1 \cos(t)\,dt$.
Réponse

(3) Discuter les discontinuités des fonctions suivantes et mentionner si elles sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ ou pas.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \sin(x) \cdot \mathrm{frac}(\frac{1}{x}),$$

où $[x]$ est l'entier le plus grand $\leqslant x$ et $\mathrm{frac}(x) = x - [x]$.

e)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = m/n,\ x \neq 0. \end{cases}$$

où on écrit un rationnel $x = m/n$ avec $n > 0$ et $m$ et $n$ sans diviseurs en commun.

Réponse

(4) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $a \in ]0,1[$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,dt$. Fixons $b > 0$. Montrer par récurrence que pour tout $x \in [-b, b]$ on a :

$$|f(x)| \leqslant M\frac{|x|^n}{n!}, \quad M = \sup_{[-b,b]} |f|.$$

Conclure que $f = 0$. Réponse

(5) Soit $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et intégrable. Soit $U \subset \mathbb{R}$ une voisinage de 0 contenant $f(J)$ et soit $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $M > 0$.

(a) Montrer que pour chaque sous-intervalle $J' \subset J$ on a

$$\sup_{J'}(g\circ f) - \inf_{J'}(g\circ f) \leqslant M\left(\sup_{J'}(f) - \inf_{J'}(f)\right).$$

(b) Déduire que $g\circ f$ est intégrable sur $J$.

(c) Appliquer ce résultat pour montrer que $f^n$, $n \geqslant 1$ est intégrable.

(d) On suppose que $|f| \geqslant \epsilon > 0$ sur $J$. Montrer que alors $1/f$ est intégrable sur $J$. Indication : on posera $g(y) = 1/y$ si $|y| \geqslant \epsilon$ et $g(y) = y/\epsilon^2$ si $|y| < \epsilon$.

Réponse

(6) Soit $f \geqslant 0$ décroissante sur $[1, \infty)$

- Comparer pour $k \in \mathbb{N}$ : $f(k)$, $f(k+1)$ et $\int_k^{k+1} f\,dx$,
- En déduire la convergence de la suite $\left\{\sum_1^n f(k) - \int_1^n f\,dx\right\}_{n=1,2,\ldots}$ vers une limite appartenant à $[0, f(1)]$.
- En déduire :
  (a) $\exists \gamma \in [0, 1]$ tel que

$$\sum_1^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \varepsilon(n), \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

  (b) La convergence de la série $\sum \frac{1}{k^2}$.

Réponse

CHAPITRE 2

# Quelques compléments

## 1. Quelles sont les fonctions intégrables ?

Avant de donner le résultat, on a besoin d'une notion :

DÉFINITION 1.1. |

– Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est *négligeable* ou *de mesure* 0, si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver une famille dénombrable d'intervalles ouverts recouvrant $E$ et dont la somme des longueurs est $\leqslant \epsilon$.
– On dit qu'une propriété est *presque partout* vraie si elle est vraie dans le complémentaire d'un ensemble négligeable.

EXEMPLE 1.2. |

– Un intervalle (non-vide et non-réduit à un point) n'est pas négligeable : un ensemble négligeable n'a aucun point intérieur. Pourquoi ?
– Si $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ est un ensemble dénombrable, $E$ est négligeable. Pourquoi ?
– Soient $E_k \subset \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ des ensembles négligeables, alors $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ est négligeable.Pourquoi ?

DÉFINITION 1.3. Soit $f : J = [a, b] \to \mathbb{R}$.

– La *variation* de $f$ est

$$\operatorname{var}(f, V) = \text{diamètre de } f(V) = \sup_{y,z \in V} \big| f(y) - f(z) \big|.$$

– L'*oscillation* de $f$ en $x \in J$ est

$$\operatorname{osc}(f, x) := \inf_{V \ni x} \operatorname{var}(f, V), \qquad V \text{ voisinage de } x.$$

–

$$O_\alpha(f) = \big\{x \in J \mid \operatorname{osc}(f, x) \geqslant \alpha\big\}.$$

Une fonction est continue en $x$ si et seulement si son oscillation est 0 en $x$. Une fonction qui n'est pas continue en $x$ peut quand même avoir une limite à droite et à gauche et il y a un *saut* :

$$\big| \lim_{y \uparrow x} f(y) - \lim_{z \downarrow x} f(z) \big| > 0.$$

On appelle une telle discontinuité une *discontinuité de première espèce*. Les autres sont de *deuxième espèce*.
*Remarques :*|

– Les ensembles $O_\alpha(f)$ sont fermés : si $x$ est un point adhérent à $O_\alpha(f)$, alors chaque intervalle $]x - a, x + a[$, $a > 0$ rencontre $O_\alpha(f)$ et on a :

$$\operatorname{var}(f, ]x - a, x + a[) \geqslant \alpha.$$

Donc $x \in O_\alpha(f)$.

– On a

$$\{\text{Discontinuités de } \quad f\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_{1/k} f. \tag{8}$$

THÉORÈME 1.4. *Une fonction bornée sur un intervalle $J = [a, b]$ est intégrable si et seulement si $f$ est continue hors d'un ensemble négligeable*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Si l'ensemble des discontinuités n'est pas négligeable, la formule (8) montre qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, telle que $E = O_{1/k}(f)$ n'est pas négligeable. Donc il existe $c > 0$ telle que si on recouvre cet ensemble par une union finie d'intervalles, la somme des longueurs est $\geqslant c$. Soit $P = \{a = x_0, \ldots, x_N = b\}$ une subdivision de $J$. Les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ qui rencontrent $E$ recouvrent cet ensemble à un ensemble fini près. Donc la somme de leurs longueurs est $\geqslant c$. Pour un intervalle $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ contenant un point de $E = O_{1/k}(f)$ on a $\sup_{I_i} - \inf_{I_i} \geqslant 1/k$ et donc

$$S(P, f) - s(P, f) \geqslant c/k,$$

un nombre $> 0$, indépendant de $P$. Donc $f$ n'est pas intégrable.
$\Longleftarrow$ Soit $\epsilon > 0$ et on pose

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

On sait par hypothèse que $O_{\tilde{\varepsilon}}$ est négligeable, mais aussi par la remarque ci-dessus, que cet ensemble est fermé et donc compact. Cela entraîne que pour tout $\eta > 0$ on peut recouvrir cet ensemble par un nombre fini d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est $\leqslant \eta$. On choisit

$$\eta = \frac{1}{4\|f\|}\epsilon, \tag{9}$$

ce qui donne des intervalles $I_1, \ldots, I_n$ dont la réunion $V$ recouvre $O_{\tilde{\varepsilon}}$ et dont la longueur totale est $\leqslant \eta$. L'ensemble $K = J - V$ étant compact il sera recouvert par la réunion d'un nombre fini d'intervalles $J_1, \ldots, J_m$ telles que :

$$\operatorname{var}(f, J_k) < \tilde{\varepsilon}. \tag{10}$$

Soit $P$ la subdivision formée par toutes les extrémités des intervalles $I_i$ et $J_k$. La longueur totale des intervalles $I_i$ étant majorée par (9), la contribution de ces intervalles à $S(P, f) - s(P, f)$ est donc au plus

$$2\|f\|\frac{1}{4\|f\|}\epsilon = \epsilon/2.$$

Pour les intervalles $J_k$, on a $\left(\sup_{J_k} f - \inf_{J_k} f\right) < \tilde{\varepsilon}$ grâce à (10). Donc la contribution de ces intervalles à $S(P, f) - s(P, f)$ est au plus

$$\tilde{\varepsilon} \cdot \text{ (longueur totale des } J_k) \leqslant \epsilon\frac{1}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon/2.$$

Donc, en rajoutant ces deux contributions on trouve $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$.

Applications 1.5. |

(1) Puisque les discontinuités d'une fonction monotone forment au plus un ensemble dénombrable de sauts (pourquoi ?), une telle fonction est intégrable.

(2) Si $f \geqslant 0$ et bornée intégrable sur $J$, alors $\int f = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.

(3) Si $f$ est intégrable, alors il existe une suite croissante, respectivement décroissante de fonctions $e_n$, respectivement $e'_n$ en escalier telle que

$$\begin{aligned} e'_n \quad \leqslant \quad & f \quad \leqslant \quad e_n \\ f(x) \quad = \quad & \lim_{n\to\infty} e'_n(x) \\ = \quad & \lim_{n\to\infty} e_n(x) \quad \text{presque partout,} \\ \int_J f \quad = \quad & \lim_{n\to\infty}\int_J e'_n = \lim_{n\to\infty}\int_J e_n. \end{aligned}$$

Pour montrer cela, on prend une subdivision $\{x_0, \ldots, x_N\}$ équidistante de pas $(b-a)/2^n$ (donc $N = 2^n$). On définit $e'_n|[x_{i-1}, x_i[= \inf_{I_i} f$ et $e_n|[x_{i-1}, x_i[= \sup_{I_i} f$, $i =$

$1, \ldots, N$. Là où $f$ est continue (donc hors d'un ensemble négligeable), clairement $\lim e_n = \lim e'_n = f$. Les subdivisions utilisées, disons $P_n$, ayant un pas qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, par le Coroll. 3.3, la limite de la suite $s(P_n, f) = \int_J e'_n$ existe et est égal à l'intégrale de $f$. Pareil pour $S(P_n, f) = \int_J e_n$.

$\square$

## 2. Changement de variable

Supposons que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue. Il est souvent souhaitable de changer de variable : au lieu de $f(x)$ on utilise $f(x(t))$, où $x(t)$ est une fonction de $t \in [c, d]$. Si $f$ est définie sur $J$ il faut donc que $x$ applique $[c, d]$ dans $[a, b]$. On suppose de plus que $a = x(c) < x(d) = b$ et que $t \mapsto x(t)$ soit continue et $C^1$ par morceaux. Cela implique que $t \mapsto f(x(t))x'(t)$ est continue par morceaux et donc intégrable.

LEMME 2.1. *Sous ces hypothèses on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(t))x'(t)dt.$$

Pouvez-vous montrer ce lemme en utilisant *La règle de dérivation des fonctions composées ?* :

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(x(t)) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x(t)} \cdot x'(t)}$$

ou

$$(f \circ x)' = (f' \circ x) \cdot x',$$

Vois la trouvez ici

On peut étendre cette formule au cas où $f$ est intégrable et $x$ est strictement croissante (ou strictement décroissante) :

PROPOSITION 2.2. *Soit $x : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, strictement croissante, continue et $C^1$ par morceaux. Soit $a = x(c)$, $b = x(d)$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et intégrable. Alors*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(t))x'(t)dt.}$$

DÉMONSTRATION. On traite d'abord le cas d'une fonction $f$ en escalier. Donc $f \circ x$ est aussi en escalier car $x$ est strictement croissante. Par additivité, on peut même supposer que $f$ est constante et donc continue, le cas déjà traité.

Dans le cas général il faut montrer que la fonction $f \circ x \cdot x'$ est intégrable. Par (1.5, 3) on peut encadrer $f$ par deux fonctions en escalier $e'_n$ et $e_n$ qui convergent presque partout vers $f$ et dont les intégrales convergent vers $\int_a^b f$. On vient de montrer que $e'_n \circ x \cdot x'$ et $e_n \circ x \cdot x'$ sont intégrables sur $[c,d]$ et que leurs intégrales valent $\int_a^b e'_n$ et $\int_a^b e_n$ respectivement. Puisque $x$ est strictement croissante, on a aussi un encadrement

$$e'_n \circ x \cdot x' \leqslant f \circ x \cdot x' \leqslant e_n \circ x \cdot x'.$$

L'intégrabilité de $f \circ x \cdot x'$ suit alors du Lemme suivant dont la preuve est laissée au lecteur (voir ici) :

LEMME 2.3. *Soit* $f : J = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. Si pour tout* $\epsilon > 0$ *on peut trouver* $h, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornées et intégrables telles que*

$$g \quad \leqslant f \quad \leqslant h$$
$$\int_J h - \int_J g < \epsilon$$

*Alors,* $f$ *est intégrable.*

Ensuite, on doit montrer l'égalité des deux intégrales. D'abord on a l'encadrement des intégrales :

$$\int_a^b e_n' \leqslant \int_c^d f \circ x \cdot x' \leqslant \int_a^b e_n$$

et donc, en prenant les limites on trouve que $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f \circ x \cdot x'$. □

# 3. Théorèmes de la moyenne

*Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires* Soit $f$ continue sur $J = [a, b]$. Alors pour $c$ telle que $m = \min_J f \leqslant c \leqslant M = \max_J f$, il existe $\xi \in J$ tel que $f(\xi) = c$.

Puisque $m(b-a) \leqslant \int_J f \leqslant M(b-a)$ on peut appliquer ce théorème avec $c$ égal à la moyenne de $f$ sur $J$, c.à.d. $c = (\int_J f)/(b-a)$. En d'autre termes

$$\int_J f = f(\xi)(b-a).$$

On souhaite généraliser cela pour certains produits :

Théorème 3.1. (Premier théorème de la moyenne) *Soit $f$ continue et $g \geqslant 0$ intégrable sur $J = [a, b]$. Alors il existe $\xi \in [a, b]$ telle que :*

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \int_a^b g.}$$

Démonstration. On peut supposer que $\int_a^b g \neq 0$ (pourquoi ?) et on considère le nombre

$$c = \frac{\int_a^b f \cdot g}{\int_a^b g}.$$

Avec $m = \min_J f$ et $M = \max_J f$ on a :

$$m \int_a^b g \leqslant \int_a^b f \cdot g \leqslant M \int_a^b g$$

et donc $m \leqslant c \leqslant M$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $\xi \in [a, b]$ telle que $f(\xi) = c$. □

*Remarque.* La condition $g \geqslant 0$ est nécessaire : considérez $f(x) = g(x) = \sin x$ sur $[-\pi, \pi]$.

On a un théorème avec des hypothèse un peu différentes :

Théorème 3.2. (Deuxième théorème de la moyenne) *Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ et décroissante sur $[a, b]$ et soit $g$ continue sur $[a, b]$. Alors, il y a $\xi \in [a, b]$ telle que*

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g = f(a) \int_a^\xi g + f(b) \int_\xi^b g.}$$

Démonstration. On sait que $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ existe et qu'elle est dérivable avec dérivée $g$. Une intégration par parties donne

$$\int_a^b f G' = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b G f'. \tag{11}$$

Les hypothèse du premier théorème de la moyenne sont satisfaites pour $G$ et $-f'$ (pourquoi ?) Il existe donc $\xi \in [a, b]$ telle que $\int_a^b G f' = G(\xi) \int_a^b f' = G(\xi)(f(b) - f(a))$ et le résultat découle de la formule 11. □

*Remarque.* On va montrer ce théorème avec des hypothèses plus faibles. Voir le théorème 4.1.

## Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ? :

(1) La fonction caractéristique d'un sous-ensemble de $[a, b]$ dont le complémentaire est négligeable est intégrable.

(2) Soient $f$ et $g$ deux fonctions bornées sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ telles qu'elles coïncident hors d'un ensemble négligeable. Si $f$ est intégrable, aussi $g$ l'est et $\int_a^b f = \int_a^b g$.

(3) Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est presque partout continue sur chaque intervalle bornée est presque partout continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(4) La fonction $x \longrightarrow \sin(1/x)$ sur $x > 0$ peut s'étendre en 0 à une fonction n'ayant que des discontinuités de la première espèce.

(5) La limite d'une suite de fonctions en escalier sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable (si elle existe).

(6) Soient $f$ et $g$ continues sur $[a, b]$, alors il y a un $c \in [a, b]$ telle que $\int_a^b f \cdot g = f(c) \int_a^b g$.

Réponses ici.

## Problèmes

(1) Le but de cet exercice est de montrer la formule de *Taylor avec reste intégral* :

Soit $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^k$. Alors pour $t \in J$ on a

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(t) & = & f(a) + \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_k(t), \\ R_k(t) & = & \displaystyle\int_a^t \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x)dx. \end{array}}$$

(a) Montrer le résultat pour $n = 1$.

(b) Utilisant une intégration par parties, montrer que

$$R_{n-1}(t) = \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(t).$$

(c) Conclure.

Réponse

(2) Montrer le *Lemme de Lebesgue* :

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a pour tout $f$ de classe $C^1$ sur un intervalle $J = [a, b]$ :

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

Indication : intégration par parties.

(b) Montrer la même assertion pour une fonction bornée et intégrable sur $J$ en utilisant une approximation par fonctions en escalier.

Réponse

(3) Soit $f$ continue sur $[a, b]$. Montrer

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Calculer ensuite $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\,dx$.

Réponse

(4) Soit

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2)\,dt.$$

Montre que $|f(x)| < 1/x$ si $x > 0$. Indication : faites la substitution $t^2 = u$ et utiliser le deuxième théorème de la moyenne. Réponse.

(5) Soit $f$ une fonction intégrable sur $[0, \pi]$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(t) \left| \sin(nt) \right| dt.$$

(Indication : partager le segment $[0, \pi]$ et utiliser le premier théorème de la moyenne).

Réponse.

(6) Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $J = [0, 2\pi]$ telle que $f(0) = f(2\pi)$.

a) Pourquoi $|f'|$ est-elle intégrable ? Soit $V(f, x) = \int_0^x |f'|$ et $V(f) = V(f, 2\pi)$.

b) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ telle que $0 \leqslant V(f, x) < \epsilon$ pour $x \in [0, \delta]$.

c) Montrer que

$$
\begin{aligned}
n \left| \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \right| &\leqslant V(f) \\
n \left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \right| &\leqslant V(f).
\end{aligned}
$$

Réponse.

CHAPITRE 3

# Intégrales et suites de fonctions

## 1. Introduction

*Rappels* 1. Soit $f_n : J \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On dit que $f_n$ *converge uniformément* vers une fonction $f$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N$ telle que pour tout $x \in J$ et $n \geqslant N$ on ait $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
2. Si $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers $f$, alors $f$ est continue. En particulier, $f$ est intégrable. C'est un cas spécial du théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit* $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ *une suite de fonctions intégrables sur un intervalle* $J = [a, b]$. *On suppose que* $\{f_n\}$ *converge uniformément vers* $f$. *Alors* $f$ *est intégrable et*

$$\boxed{\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par convergence uniforme il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geqslant N$ et $x \in J$ on a l'inégalité

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3|J|}, \quad |J| = b - a \quad \text{(la longueur de l'intervalle).}$$

Puisque $f_N$ est intégrable, il y a une subdivision $P$ de $J$ telle que

$$S(P, f_N) - s(P, f_N) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{12}$$

Puisque $f \leqslant f_N + \dfrac{1}{3\epsilon|J|}$ on a

$$S(P, f) \leqslant S(P, f_N) + \frac{1}{3}\epsilon \tag{13}$$

et l'inégalité $f \geqslant f_N - \dfrac{\epsilon}{3|J|}$ donne

$$s(P, f) \geqslant s(P, f_N) - \frac{1}{3}\epsilon. \tag{14}$$

Combinant les trois inégalités (12)–(14), on trouve :

$$S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$$

et donc $f$ est intégrable. Alors, pour $n \geqslant N$ on a :

$$\left|\int f - \int f_n\right| = \left|\int (f - f_n)\right| \leqslant \frac{1}{3}\epsilon$$

et donc $\int f = \lim_{n\to\infty} f_n$. $\square$

Rappeler la notion de convergence d'une série.

COROLLAIRE 1.2. *Soit* $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ *une suite de fonctions bornées et intégrables sur un intervalle* $[a, b]$ *telle que la série* $\sum f_n$ *converge uniformément vers* $s$. *Alors*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

*est intégrable et*

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\right).}$$

## 2. Le théorème de la convergence monotone

On a besoin des cas où la convergence n'est plus uniforme. Le cas le plus simple est celui des fonctions en escalier :

LEMME 2.1. *Soit* $\{e_n\}$, $n = 1, \ldots$ *une suite de décroissante de fonctions positives bornées et en escalier toutes définies sur* $J = [a, b]$. *On suppose que* $\lim_{n\to\infty} e_n(x) = 0$ *presque partout. Alors* $\lim_{n\to\infty} \int e_n = 0$.

DÉMONSTRATION. Soit $E'$ l'ensemble des points de discontinuités des $e_n$ et soit $E''$ l'ensemble des points $y$ ou les $e_n(y)$ ne convergent pas vers 0. Alors $E = E' \cup E''$ est un ensemble négligeable. Soit $\epsilon > 0$. On recouvre $E$ par des intervalles ouverts dont la somme des longueurs est $\leqslant \epsilon$. Soit $V$ la réunion de ces intervalles.

En dehors de $E$ on a $\lim e_n(x) \to 0$ et il y a $N = N(x)$ telle que

$$e_n(x) < \epsilon, \quad n \geqslant N(x). \tag{15}$$

Puisque $e_n$ est une fonction en escalier et $x$ n'est pas un saut, $e_n$ est localement constant en $x$. De plus, les $e_n$ forment une suite décroissante, donc (15) reste vrai dans voisinage ouvert $U_x$ de $x$. Les $\{U_x\}_{x\in J-E}$ forment un recouvrement ouvert du compact $J - V$ et un nombre fini de tels intervalles suffisent. On peut donc trouver $N$ *indépendant* de $x$ telle que (15) est vrai pour

$x \in J - V$. Les ensembles $\bar{V}$ ainsi que $J - V$ sont des unions finis d'intervalles fermés. Donc, par le règle d'additivité $\int_J = \int_{\bar{V}} + \int_{J-V}$. On trouve pour $n \geqslant N$ :

$$0 \leqslant \int_J e_n = \int_{\bar{V}} e_n + \int_{J-V} e_n \leqslant \epsilon \|e_1\| + \epsilon(b-a).$$

□

Rappelant qu'une *suite monotone* $\{f_n\}$ de fonctions (définies sur le même intervalle) est soit une suite croissante, soit une suite décroissante, le lemme implique :

THÉORÈME 2.2. (Convergence Monotone – cas des fonctions bornées) *Soit* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions bornées intégrables sur* $J = [a, b]$. *On suppose que la suite* $\{f_n\}$ *est monotone. On suppose en plus qu'il y a une fonction bornée* $f$ *et intégrable, telle*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

*presque partout. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer que la suite des $f_n(x)$ est croissante et donc $u_n(x) = \{(f(x) - f_n(x))\}$ est une suite décroissante qui décroît vers zéro presque partout. Donc la partie négative de $u_n(x)$ est presque partout égal à zéro. Donc on peut supposer que $u_n \geqslant 0$ et il suffit de montrer le théorème pour une suite décroissante de fonctions positives $u_n$ et intégrables ayant limite 0 presque partout. Par 1.5, 3 on peut approcher $u_1$ par une fonction en escalier $e_1$ avec $0 \leqslant e_1 \leqslant u_1$ et dont l'intégrale est arbitrairement proche de $\int u_1$, disons

$$\int u_1 - \int e_1 < \epsilon$$

pour un $\epsilon > 0$ donné d'avance. Ensuite on compare $\int u_2$ et $\int u_2 \wedge e_1$. On a $u_2 = u_2 \wedge e_1 + (u_2 - e_1)_+$ et puisque $u_2 \leqslant u_1$ cela entraîne :

$$\epsilon' := (\int u_2 - \int u_2 \wedge e_1) = \int (u_2 - e_1)_+ \leqslant \int (u_1 - e_1) < \epsilon.$$

On peut donc répéter la procédure : il y a une fonction en escalier $e_2$ telle que $0 \leqslant e_2 \leqslant u_2 \wedge e_1 \leqslant e_1$ et telle que $\int u_2 \wedge e_1 - \int e_2 < \epsilon - \epsilon'$ et donc

$$\int u_2 - \int e_2 = (\int u_2 - \int u_2 \wedge e_1) + (\int u_2 \wedge e_1 - \int e_2) < \epsilon' + (\epsilon - \epsilon') = \epsilon.$$

On répète avec $u_3 \wedge e_2$ etc. On trouve une suite décroissante de fonctions positives et en escalier $e_n$ ayant limite presque partout 0. Utilisant le Lemme 2.1 on trouve $\lim_{n\to\infty} \int e_n = 0$. D'autre part

$$I_n := \int u_n < \int e_n + \epsilon. \tag{16}$$

La suite décroissante $I_n$ a une limite $I$ (car $I_n \geqslant 0$ et (16) implique que pour tout $\epsilon > 0$ on a :

$$I = \int u_n \leqslant \epsilon$$

et donc $I = 0$. □

On peut appliquer ce théorème à des séries de fonctions *positives* :

COROLLAIRE 2.3. *Soit $\{ f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions positives et intégrables sur $J = [a, b]$ telle que la série $\sum f_n$ converge presque partout vers une fonction intégrable $s$. Alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_J f_n = \int_J s = \int_J \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

## 3. Le théorème de la convergence bornée

On veut étendre le théorème de convergence 2.2. D'abord un exemple instructif (Voir : Cette figure )

EXEMPLE 3.1.

$$f_n = \begin{cases} n^2 x & 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 2n - n^2 x & 1/n \leqslant x \leqslant 2/n \\ 0 & 2/n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Les $f_n$ sont intégrables sur $[0,1]$ : leur intégrale est 1 et donc la limite des intégrales existe. D'autre part, $f_n \longrightarrow 0$ (presque partout) et donc l'intégrale de la limite $f$ (qui est 0) est différent de 1, la limite des intégrales. On remarque que max $f_n = n$ et donc les $f_n$ ne sont pas uniformément bornées. Rappelons ici qu'une suite de fonctions $\{f_n\}$ sur un intervalle $J$ est *uniformément bornée* s'il y a une constante $M$ (qui ne dépend pas de $n$) telle que pour tout $n$ on ait $|f_n| \leqslant M$.

THÉORÈME 3.2. (Convergence Bornée) *Soit $f : J = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose qu'il y a une suite de fonctions $\{f_n\}_{n=1,\ldots}$ uniformément bornées et intégrables, telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ presque partout. Alors on a :*

$$\boxed{\int_J f = \lim_{n\to\infty} \int_J f_n.}$$

La démonstration compliquée peut être étudiée plus tard et se trouve ici

## 4. Applications

Voici une autre version du deuxième théorème de la moyenne :

*THÉORÈME 4.1. (Deuxième théorème de la moyenne.) *Soit $f$ décroissante et g intégrable sur $J = [a, b]$. Alors, il y a $\xi \in [a, b]$ telle que*

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g = f(a) \int_a^\xi g + f(b) \int_\xi^b g.}$$

DÉMONSTRATION. En remplaçant $f$ par $(f - f(b))$ on se ramène au cas d'un fonction $f$ positive avec $f(b) = 0$. On peut aussi supposer que $f(a) > 0$ (sinon $f = 0$). Soit

$$G(u) = \int_a^u g(t)\,dt,$$

une fonction continue. Donc $m = \min G$ et $M = \max G$ existent. On montrera l'inégalité

$$m f(a) \leqslant \int f \cdot g \leqslant M f(a). \tag{17}$$

En effet, si cela est prouvé, le résultat se déduit immédiatement du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $G$ et la valeur

$$c = \frac{\int f \cdot g}{f(a)}.$$

Les deux inégalités se réduisant à la seconde : remplacer $g$ par $-g$. On va donc montrer la seconde inégalité.

On suppose d'abord que $f$ est une fonction en escalier définie par une subdivision $\{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ constant égale à $c_i$ sur l'intervalle $I_i = [x_{i-1}, x_i[$. Alors (utilisant que $c_n = 0$ et

$G(x_0) = 0$)

$$\begin{aligned}
\int f \cdot g &= \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{I_k} g \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k [G(x_k) - G(x_{k-1})] \\
&= c_n G(x_n) - c_1 G(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} G(x_k)(c_k - c_{k+1}) \\
&\leqslant M \left( \sum_{k=1}^{n-1} c_k - c_{k+1} \right) \\
&= M c_1 = M f(a).
\end{aligned}$$

Cela montre la seconde inégalité de (17) pour une fonction en escalier.

Ensuite, on utilise qu'une fonction intégrable est la limite d'une suite de fonctions $\{e_n\}$ en escalier (application 1.5, 3). On peut supposer $e_n(a) = f(a)$ et $e_n(b) = f(b)$. On utilise ensuite le théorème 3.2 pour déduire

$$\int_a^b f \cdot g = \lim_{n \to \infty} \int_a^b e_n \cdot g \leqslant M f(a).$$

cela montre la seconde inégalité de (17) aussi pour $f$. □

Voici une autre application :

THÉORÈME 4.2. ($\sigma$-additivité.) *Soit $f$ bornée et intégrable sur $J$ et soit*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots, \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = b$$

*une subdivision de $J$ en sous-intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Alors la série $\sum \int_{I_k} f$ converge et on a :*

$$\int_J f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} f$$

DÉMONSTRATION. On considère les sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{I_k} f = \int_a^{x_N} f = \int_a^b f \cdot \mathbb{1}_{J_N}, \quad J_N = [a, x_N].$$

Puisque $|f \cdot \mathbb{1}_{J_N}| \leqslant |f|$ est bornée sur $J$ on peut appliquer le théorème 3.2 et le résultat suit. $\square$

## Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ? :

(1) Une suite convergente de fonctions intégrables est intégrable. Indication : écrire la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ comme limite de fonctions caractéristiques d'ensembles finis.

(2) Si la limite d'une suite de fonctions intégrables existe, cette limite vaut l'intégrale de la limite.

(3) Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions intégrables sur $J = [a, b]$ telle que la série $\sum f_n$ converge presque partout vers une fonction intégrable $s$. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_J f_n = \int_J s = \int_J \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Indication : reconsidérer l'exemple 3.1 en écrivant $f_n$ comme une somme partielle.

(4) Soit $\{g_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ une collection dénombrable de fonctions intégrables. Alors $\sup_{n=1,\ldots} g_n$ est intégrable. Indication : écrire la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ comme sup de fonctions intégrables.

Réponses ici.

## Problèmes

(1) Soit

$$f_n = n^p x(1-x^2)^n, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, n = 1, 2, 3, \dots).$$

(a) Esquisser les fonctions $f_n$, $n = 1, 2, 3$ si $p = 1$.

(b) Calculer $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\lim_{n\to\infty} I_n$.

(c) Pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{R}$ a-t-on $I = \int_0^1 f(x)dx$ ?

Réponse ici.

(2) On se donne une suite $x_n \in ]a,b[$, $n = 1,2,\ldots$ de points distincts et soit $\sum |c_n|$ une série convergente. On pose $I_n = ]x_n, b[$ et soit $\mathbb{1}_{I_n}$ sa fonction caractéristique. On définit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbb{1}_{I_n}(x).$$

(a) Montrer que cette série converge uniformément.

(b) Montrer que $f$ est continue hors des points $x_n$.

(c) Donner une expression pour $\int_a^b f(x)$ en termes de $\sum c_n$ et $\sum x_n c_n$.

Réponse ici.

(3) Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{frac}(nx)}{n^2}.$$

(a) Trouver les points de discontinuité de $f$ et montrer qu'elles forment un ensemble dense de $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $f$ est intégrable sur chaque intervalle borné.

Réponse ici.

(4) Soit $x$ un réel, $x \neq \pm 1$ ; soit $n$ un entier positif.

(a) Justifier l'existence de

$$J_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{x^2 + 1 - 2x\cos t}\,dt.$$

(b) Calculer $J_n(0)$. La fonction $J_n$ est-elle paire ou impaire ?

On suppose désormais : $0 < x < 1$.

(c) Calculer $J_0(X)$ en faisant le changement de variable $t = 2\mathrm{Arctan}(u)$.

(d) Exprimer $2xJ_1(x)$ en fonction de $x$ et $J_0(x)$.

(e) Calculer $J_{n+2}(x) + J_n(x) - (x + \frac{1}{x})J_{n+1}(x)$.

(f) Expliciter $J_n(x)$.

Réponse ici.

CHAPITRE 4

# Intégrales : le cas non-borné

## 1. Le cas des intervalles bornés

Soit $J = \left|a, b\right| \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné. La notation signifie que les extrémités peuvent ou ne peuvent pas être incluses. On se restreindra au cas de fonctions $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont presque partout continues, mais pas forcément bornées. Si on étend $f$ aux extrémités de façon arbitraire, la fonction reste presque partout continue. En cas de besoin, on pourra donc travailler avec un intervalle compact $J = [a, b]$.

EXEMPLE 1.1. Une fonction comme $1/\sin(1/x)$ sur l'intervalle $\left|-1, 1\right|$ a des singularités aux points $1/k\pi i$ ou elle devient $\pm\infty$. Donc elle est presque partout continue, mais elle n'est pas bornée sur aucun sous-intervalle qui inclut 0 (on a un point d'accumulation de points où la fonction devient $\pm\infty$).

On se contente d'abord de regarder les fonctions *positives*. Dans ce cas la suite des fonctions $f_n = f \wedge n$, $n = 1, 2, ..$ converge vers $f$. On peut supposer que la fonction $f_n$ est définie sur $[a, b]$ et par nos hypothèses, elle est intégrable (pourquoi ?). Aussi, si $f$ est déjà bornée, $f = f_n$ pour tout $n$ suffisamment grand. Il est donc naturel de postuler :

Définition 1.2. Soit $J$ un intervalle borné. Soit $f : J \to \mathbb{R}_+$ presque partout continue. On dit que $f$ est *intégrable* si

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f \wedge n = \mathbb{I}$$

existe ; dans ce cas on pose :

$$\int_J f = \mathbb{I}.$$

On utilisera plusieurs fois :

Lemme 1.3. *Si $f : J \to \mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable dans ce sens et si $g$ est presque partout continue sur $J$ et telle que* $0 \leqslant g \leqslant f$ *presque partout, alors $g$ est intégrable et* $\int_J g \leqslant \int_J f$.

Démonstration. On a $0 \leqslant g \wedge n \leqslant f$ et donc $\mathbb{I}_n := \int_J g \wedge n \leqslant \int_J f$. La suite croissante $\mathbb{I}_n$ reste bornée, donc elle a une limite. □

Ce lemme permet de traiter les fonctions $f : J \to \mathbb{R}$ presque partout continues, mais pas forcément positives. Puisque $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f_- \leqslant |f|$, on a donc :

Définition 1.4. Soit $f : J \to \mathbb{R}$ presque partout continue. On dit que $f$ est *intégrable* si $|f|$ est intégrable. Dans ce cas $\int_J f_+$ et $\int_J f_-$ existent et on pose

$$\int_J f = \int_J f_+ - \int_J f_-.$$

La classe des fonctions intégrables dans ce sens sera notée par $\mathscr{I}(J)$.

*Remarque.* Dans le Chap. 1 on a vu : une fonction bornée intégrable est absolument intégrable. La réciproque n'est pas vraie. La nouvelle définition est donc plus restrictive. Mais pour la classe des fonctions presque partout continues et bornées on a trivialement que $f$ est intégrable si et seulement si $|f|$ est intégrable.

Il est souhaitable de remplacer la définition ci-dessus par une définition plus flexible. Par exemple, on souhaite remplacer $f_n = f \wedge n$ par n'importe quelle suite convergente de fonctions presque partout continues.

PROPOSITION 1.5. *Soit $f : J \to \mathbb{R}_+$ une fonction presque partout continue. On considère l'ensemble*

$$I(f,J) = \left\{ \int_J g \mid g : J \to \mathbb{R} \text{ bornée et intégrable, } 0 \leqslant g \leqslant f \text{ presque partout.} \right\}$$

*Alors $f$ est intégrable si et seulement si $I(f,J) \subset \mathbb{R}_+$ est borné. Si c'est le cas, on a*

$$\int_J f = \sup I(f,J).$$

DÉMONSTRATION. $\Longrightarrow$ Si $I(f,J)$ est bornée, $f$ est clairement intégrable et $\int_J f \leqslant \sup I(f,J)$. D'autre part, si $g$ est bornée, intégrable sur $J$ telle que $0 \leqslant g \leqslant f$, les fonctions $g_n = g \wedge n \leqslant f_n = f \wedge n$ sont intégrables et convergent vers $g$. Par convergence monotone (Thm. 2.2) $\lim \int_J g_n = \int_J g$ et donc $\lim \int f_n = \int_J f \geqslant \int_J g$. En prenant le sup on trouve $\int_J f \geqslant \sup I(f,J)$. $\Longleftarrow$ Si $f$ est intégrable, et si $g$ est intégrable et bornée et $g \leqslant f$, alors $g \leqslant f_n = f \wedge n$ si $n$ est assez grand. Donc $\int_J g \leqslant \int_J f_n \leqslant \int_J f$. L'ensemble $I(f,J)$ est alors borné. Le nombre $\lim_{n\to\infty} \int_J f \wedge n$ réalise $\sup I(f,J)$ (pourquoi ?) et donc $\int_I f = \sup I(f,J)$. $\square$

Avec cette définition équivalente on peut montrer une généralisation du théorème 2.2 :

THÉORÈME 1.6. (Convergence Monotone – suite) *Soit $J = |a,b|$ un intervalle borné et soit $f : J \to \mathbb{R}_+$ presque partout continue. On suppose qu'il y a une suite croissante de fonctions* *intégrables* $f_n : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

*presque partout. Alors*

1) *Si* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_J f_n$ *existe,* $f$ *est intégrable et*

$$\lim_{n\to\infty}\int_J f_n = \int_J f.$$

2) *Si* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_J f_n = +\infty$, *alors* $f$ *n'est pas intégrable sur* $J$.

DÉMONSTRATION. On a

$$\bigcup_n I(f_n, J) \subset I(f, J)$$

ce qui montre 2).

En ce qui concerne 1), pour tout $g \leqslant f$, $g$ intégrable et bornée, la fonction $g \wedge f_n$ est bornée et intégrable, et la suite $\{g \wedge f_n\}$ converge presque partout vers la fonction bornée et intégrable $g$. Par le théorème 2.2, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_J g \wedge f_n = \int_J g$. Puisque $g \wedge f_n \leqslant f_n$, cela implique $\displaystyle\int_J g \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_J f_n$ et donc en prenant le sup sur les $g$ :

$$\int_J f \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_J f_n.$$

Par lemme 1.3 l'inégalité $f_n \leqslant f$ donne l'inégalité opposée. $\square$

COROLLAIRE 1.7. *Soit* $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ *une fonction* positive et presque partout continue *telle que* $f|J'$ *soit intégrable pour tout* $J'$, *sous-intervalle compact de* $[a, b[$. *Supposons que pour une suite croissante* $\{b_n\}_{n=1,\dots}$ *avec limite b on ait :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f = \mathbb{I},$$

*alors* $f$ *est intégrable avec intégrale* $\int_a^b f = \mathbb{I}$.

DÉMONSTRATION. On applique Prop. 1.6 à la suite des fonctions $f \cdot \mathbb{1}_{[a,b_n]}$. □

## 2. Les propriétés de base (I)

Pour les fonctions intégrables dans le nouveau sens, on a des propriétés de base analogues à celles valables pour la classe des fonctions bornées intégrables :

PROPRIÉTÉS 2.1. Soit $J = |a, b|$ un intervalle *borné*. Alors :

(1) L'intégration

$$\begin{cases} \int & : \mathscr{I}(J) \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \int_J f. \end{cases}$$

est une application linéaire qui respecte l'ordre : si $f \leqslant g$, alors $\int_J f \leqslant \int_J g$ ;

(2) Soient $f$ et $g$ presque partout continues sur $J$, $f$ intégrable et $g$ bornée, alors $fg$ est intégrable ;

(3) $f$ et $g$ sont intégrables, alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ le sont.

(4) L'intégration est additive : pour $c \in [a, b]$ les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ existent et on a

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.}$$

(5) Soit $f \in \mathscr{I}(J)$, alors

$$\left|\int_J f\right| \leqslant \int_J |f|.$$

DÉMONSTRATION. (1) | Si $f$ est intégrable, $af$ est intégrable : par la définition de l'intégrale $\lim_{n\to\infty} \int_J |f| \wedge n = \int_J |f|$ et $|a|(|f| \wedge n)$ est une suite croissante qui converge vers $|a||f|$ et donc, par le théorème 1.6, $|af|$ est intégrable et $\displaystyle\int_J |af| = |a| \lim_{n\to\infty} \int_J |f| \wedge n = |a| \int_J |f|$. De là on déduit que $\int_J af = a \int_J f$.

| Complétons la linéarité d'abord pour les fonctions *positives*. Or, par la définition de l'intégrale $\lim_{n\to\infty} \int_J f \wedge n = \int_J f$ et $\lim_{n\to\infty} \int_J g \wedge n = g$. On considère $f \wedge n + g \wedge n$, une suite croissante qui converge vers $f + g$. Puisque $\int_J (f \wedge n + g \wedge n) = \int_J f \wedge n + \int_J g \wedge n$ converge vers $\int_J f + \int_J g$, le résultat est une conséquence du théorème 1.6. Ensuite, puisque $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, le lemme 1.3 garantit que $f+g$ est intégrable en général. Finalement, pour calculer l'intégrale, décomposons $f = f_+ - f_-$ et $g = g_+ - g_-$ ; on a une égalité entre fonctions *positives* : $(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_-$. Donc, pour leurs intégrales on a :

$$\int_J (f+g)_+ + \int_J f_- + \int_J g_- = \int_J f_+ + \int_J g_+ + \int_J (f+g)_-$$

et, par la définition même des intégrales :

$$\int_J (f+g) = \int_J f + \int_J g.$$

| On a déjà remarqué que pour des fonctions positives $f \leqslant g$ implique $\int_J f \leqslant \int_J g$. En décomposant $f = f_+ - f_-$ et $g = g_+ - g_-$ on voit que $f \leqslant g$ signifie $f_+ \leqslant g_+$ et $f_- \geqslant g_-$, d'où le résultat en général.

(2) Soient $f, g$ presque partout continues, $f$ intégrable et $|g| \leqslant M$. Alors $fg$ est presque partout continue et $|fg|$ est majorée par la fonction intégrable $M|f|$. Le lemme 1.3 implique alors que $|fg|$ (et donc $fg$) est intégrable.

(3) Utiliser $f \vee g = \frac{1}{2}[(f+g) + |f-g|]$ et $f \wedge g = \frac{1}{2}[f+g-|f-g|]$.

(4) Cela découle de l'additivité pour les fonctions $f \wedge n$, $n = 1, 2, \ldots$.

(5) Par définition $\int_J f = \int_J f_+ - \int_J f_-$ et donc

$$\left|\int_J f\right| \leqslant \int_J f_+ + \int_J f_- = \int_J (f_+ + f_-) = \int_J |f|.$$

□

L'additivité a des conséquences importantes, par exemple, si $f$ est intégrable sur un intervalle $J$, elle est intégrable sur tout sous-intervalle de $J$. Cela entraîne qu'on peut calculer une intégrale sur un intervalle $[a, b[$ comme limite d'intégrales sur des intervalles fermés ; plus généralement on a :

Proposition 2.2. *Soit $J = |a, b|$ et $f \in \mathscr{I}(J)$. Alors pour tout suite $\{b_n\}$ qui converge vers $b$ on a :*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_a^{b_n} f = \int_a^b f.}$$

Démonstration. En remplaçant $b_n$ par $c_n = \min_{m\geqslant n} b_m$, la suite $\{c_n\}$ converge de façon monotone vers $b$. Si $f$ est intégrable sur $J$, $f$ est intégrable sur tout sous-intervalle de $J$ et on a

$$\left|\int_{b_n}^b f\right| \leqslant \int_{b_n}^b |f| \leqslant \int_{c_n}^c |f|. \tag{18}$$

La suite des fonctions positives $|f|\mathbb{1}_{[a,c_n]}$ converge de façon monotone vers $|f|$ et donc, par le thm. 1.6, $\lim_{n\to\infty}\int_a^{c_n}|f| = \int_a^b |f|$. Par 18 $|\int_a^b f - \int_a^{b_n} f| = |\int_{b_n}^b f| \leqslant \int_{c_n}^b |f|$ et converge donc vers 0. □

## 3. Le cas des intervalles non-bornées

Le but est d'étendre la définition d'intégrale de Riemann à des fonctions définies sur un intervalle $J = |a,b| \subset \mathbb{R}$ quelconque, donc $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ sont possibles. L'idée est qu'on souhaite partir de la définition de la section 4.1 tout en conservant la $\sigma$-additivité de l'intégrale.

Exemple 3.1. (1) Sur $J = [1,\infty[$ on considère $x \to 1/x$. On découpe $J$ en sous-intervalles de la forme $J_n = [n, n+1]$. Les intégrales $\int_{J_n} f$ ont un sens. Si on veut que la règle de $\sigma$-additivité reste vraie, il faut postuler

$$\int_J f = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n} f = \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

et c'est une somme divergente. Donc on s'attend à ce que $1/x$ ne soit pas intégrable sur $[1,\infty[$. Voir l'exemple 7.4, 2.

(2) Sur $J = [1,\infty[$ on considère la fonction $x \to x^{-5/3}$. Si on fait le même calcul (avec la même subdivision) on trouve cette fois la somme

$$\frac{3}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} - \frac{1}{(n+1)^{2/3}}\right] = \frac{3}{2}.$$

On s'attend à ce que l'intégrale soit égale à $\frac{3}{2}$. Voir l'exemple 7.4, 2.

Ces exemples montrent qu'il est naturel découper un intervalle donné en sous-intervalles où la fonction est intégrable. En découpant l'intervalle si nécessaire, on peut réduire au cas d'un intervalle de la forme $|a,+\infty|$ ou $|-\infty,b|$. Par symétrie on peut se placer dans le premier cas.

• **Le cas des fonctions positives** :

DÉFINITION 3.2. On dit qu'une fonction $f : J = [a,+\infty[\to \mathbb{R}_+$, *presque partout continue* est *intégrable* si l'on peut trouver une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

de $J$ en sous-intervalles $J_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,3,\ldots$ tels que :

– La restriction de $f$ à $J_k$ soit intégrable (au sens du §4. 1),

– la série des intégrales de $f$ sur $J_k$, i. e. $\sum_k \int_{J_k} f$ soit convergente.

Dans ce cas on pose

$$\int_J f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} f,$$

ce que l'on appelle *l'intégrale de* $f$.

Maintenant se pose un problème naturel : qu'est-ce que ce passe si on choisit une autre subdivision ? La $\sigma$-additivité nous prescrit de considérer le raffinement commun et cela mène à une série double dans laquelle on souhaite échanger l'ordre de sommation. Voir les rappels sur la sommation Plus précisément, on y trouve le résultat suivant :

PROPOSITION 3.3. *Soient* $a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots$ *des réels ou des complexes tels que*

– *pour chaque i fixé,* $a_{ij} = 0$ *si* $j > n_i$,

– *pour chaque j fixé,* $a_{ij} = 0$ *si* $i > m_j$.

*On suppose que la série*

$$a_{11} + \cdots + a_{1n_1} + a_{21} + \cdots + a_{2n_2} + \cdots$$

*converge absolument. Posant* $A_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}$ *et* $A'_j = \sum_{i=1}^{m_j} a_{ij}$, *on a*

$$\sum_i A_i = \sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij} = \sum_j A'_j.$$

Utilisant ce résultat, on va montrer que la définition ne dépend pas de la subdivision de $J$ qu'on a utilisée. Soit

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_\ell < \cdots, \qquad J_\ell = [y_{\ell-1}, y_\ell]$$

une autre subdivision satisfaisant aux conditions de la définition. On pose $I_{k\ell} = I_k \cap J_\ell$. Alors les $I_{k\ell}$ forment une troisième subdivision de $I$, le raffinement commun des deux. Un intervalle $[c,d] \subset J$ ne rencontre qu'un nombre fini d'intervalles $J_\ell$. Donc, en particulier, la somme $\sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{I_{k\ell}} f = \int_{I_k} f$ est finie. Pareil pour la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_{k\ell}} f = \int_{J_\ell} f$. Donc, par le corollaire :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} f = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{J_\ell} f.$$

• **Le cas général** :

On utilise le Corollaire 3.3, pour définir $\int_J f$ dans le cas général : si $\sum_k \int_{J_k} |f|$ converge, aussi $\sum_k \int_{J_k} f$ converge et on arrive à la définition suivante :

DÉFINITION 3.4. On dit qu'une fonction $f : J = [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, *presque partout continue* est *intégrable* si $|f|$ est intégrable. Pour tout subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

de $J$ en sous-intervalles $J_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ tels que la restriction de $f$ à $J_k$ soit intégrable et $\sum_k \int_{J_k} |f|$ soit convergente, la série $\sum_k \int_J f$ est convergente ; la somme ne dépend pas de la subdivision et on pose

$$\boxed{\int_J f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} f,}$$

ce que l'on appelle *l'intégrale de* $f$.

*Remarque.* De ce qui précède, on voit que si on sait que $f$ est intégrable sur $J = [a, \infty[$ et sur les intervalles $J_k$ de n'importe quelle subdivision de $J$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} f = \int_J f$.

On étend la propriété d'additivité :

LEMME 3.5. *Soit* $f : J = [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *intégrable. Alors pour tout* $b \geqslant a$

$$\boxed{\int_J f = \int_a^b f + \int_b^{\infty} f.}$$

DÉMONSTRATION. Soient $\{J_k\}$ les sous-intervalles telles que $\int_J f = \sum_k \int_{J_k} f$. Pour leurs intersections avec $I_1 := [a, b]$ et $I_2 := [b, \infty[$ l'additivité dans le cas borné donne :

$$\int_{J_k} f = \int_{J_k \cap I_1} f + \int_{J_k \cap I_2} f. \tag{19}$$

Par la définition de l'intégrale on a

$$\sum_k \int_{J_k} |f| < \infty.$$

Les estimations

$$\int_{J_k \cap I_\alpha} |f| \leqslant \int_{J_k} |f|, \quad \alpha = 1, 2$$

donnent alors que

$$\sum_k \int_{J_k \cap I_\alpha} |f| < \infty, \quad \alpha = 1, 2;$$

donc les intégrales de $f$ sur $I_1$ et $I_2$ existent et par (19) leur somme vaut $\int_J f$. □

Ce lemme se généralise aux cas d'une subdivision (finie ou même dénombrable) de l'intervalle $J$ : si $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ est une suite avec limite $+\infty$, et $f$ est intégrable sur $[a, \infty[$, $f$ est intégrable sur chaque sous-intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ et, par la remarque ci-dessus, $\sum \int_{I_k} f$ est convergente avec somme $\int_J f$. Cela donne la version de la Prop. 2.2 dans le cas d'un intervalle non borné :

PROPOSITION 3.6. *Soit $f : J = [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ intégrable. Alors pour toute suite $\{b_n\}$ avec limite $+\infty$ on a :*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_a^{b_n} f = \int_a^{\infty} f\,.}$$

Démonstration. Comme dans la démonstration de la Prop. 2.2, on peut supposer que la suite $\{b_n\}$ est croissante. On peut aussi supposer que $b_1 = a$ et donc, par la définition de l'intégrale, $\int_J f = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{b_k}^{b_{k+1}} f$ est la somme d'une série absolument convergente et donc convergente. En d'autre termes, on a $\lim_{n\to\infty}\int_a^{b_n} f = \int_J f$. □

On étend le lemme 1.3 au cas d'un intervalle non-borné :

Lemme 3.7. *Soient* $f, g : |a,\infty| \to \mathbb{R}_+$ *presque partout continues telles que* $0 \leqslant g \leqslant f$ *presque partout. Si* $f$ *est intégrable, alors g est aussi intégrable et* $\int_J g \leqslant \int_J f$.

Démonstration. Soit $a = b_1, b_2, \ldots$ une suite croissante tendant vers l'infini. Par hypothèse $\mathbb{I}_n = \int_{b_n}^{b_{n+1}} f$ existe et $\mathbb{J}_n = \int_{b_n}^{b_{n+1}} g \leqslant \mathbb{I}_n$. Par hypothèse $\sum \mathbb{I}_n$ est une série convergente et donc aussi $\sum \mathbb{J}_n$ est convergente. Par définition cela veut dire que $g$ est intégrable. De plus, $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{J} = \int_J g \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{I} = \int_J f$. □

Cela peut être appliqué à $f_+$ et $f_-$, où $f$ est une fonction intégrable ; donc la définition pour le cas d'un intervalle non-borné est consistante avec celle dans le cas d'un intervalle borné :

Corollaire 3.8. *Soit* $f : J = [a,\infty[\to \mathbb{R}$ *intégrable, alors* $f_+$ *et* $f_-$ *sont intégrables et* $\int_J f = \int_J f_+ - \int_J f_-$.

## 4. Les propriétés de base (II)

On peut maintenant généraliser les propriétés 2.1 au cas général :

PROPRIÉTÉS 4.1. Soit $J = |a,b|$ un intervalle quelconque (donc $a = -\infty$ ou $b = \infty$ est possible). Soit $\mathscr{I}(J)$ la classe des fonctions intégrables.

(1) L'intégration est une fonction linéaire $\int : \mathscr{I}(J) \to \mathbb{R}$ qui respecte l'ordre : si $f \leqslant g$, alors $\int_J f \leqslant \int_J g$ ;

(2) Soient $f$ et $g$ presque partout continues sur $J$, $f$ intégrable et $g$ bornée, alors $fg$ est intégrable ;

(3) Si $f, g \in \mathscr{I}(J)$, alors $f \vee g$, $f \wedge g \in \mathscr{I}(J)$.

(4) Si $f$ est intégrable sur $J$, elle est intégrable sur chaque sous-intervalle de $J$ et

$$\int_a^b f = \int_a^c + \int_c^b f.$$

(5) Soit $f \in \mathscr{I}(J)$, alors

$$\left| \int_J f \right| \leqslant \int_J |f|.$$

DÉMONSTRATION. Les propriétés ont été montrées pour le cas d'un intervalle borné (Prop. 2.1). L'additivité a été montré pour le cas d'un intervalle du type $[a,+\infty[$ ; la même démonstration s'applique aux autres cas. Pour cette raison et par symétrie, pour montrer les autres propriétés, on peut ce restreindre au cas $[a,+\infty[$. L'additivité implique que $f$ est intégrable sur $[a,b_n]$ pour une suite $\{b_n\}$ qui converge vers $+\infty$ et on utilise Prop. 3.6 pour montrer les propriétés 1), 2) et 5) dans ce cas. Par exemple, utilisant que la somme de deux séries convergentes $\sum A_i$ et $\sum B_i$ est convergente avec somme $\sum_{i=1}^{\infty}(A_i + B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i + \sum_{i=1}^{\infty} B_i$, la Prop. 3.6 implique que si $f, g \in \mathscr{I}(J)$, alors $f+g \in \mathscr{I}(J)$ et

$$\int_a^\infty f = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} (f+g) = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f + \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} g = \int_a^\infty f + \int_a^\infty g.$$

La propriété 3) se déduit comme pour les intervalles bornés. $\square$

## 5. La formule du changement de variables

Il s'agit d'une généralisation du Thm. 2.2 :

THÉORÈME 5.1. *Soit $x : |c, d| \to |a, b|$ surjective, strictement croissante, continue et $C^1$ par morceaux. Soit $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ intégrable. Alors*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f((x(t))x'(t)\,dt.}$$

DÉMONSTRATION. Si $f \geqslant 0$, alors $(f\circ x)x' \geqslant 0$, donc $\Big((f\circ x)x'\Big)_\pm = (f_\pm\circ x)x'$ et il suffit donc de traiter le cas des fonctions positives.

On a $x(c) = a$ et $x(d) = b$ et $x$ envoi chaque sous-intervalle borné et fermé de $|c, d|$ vers un intervalle borné et fermé de $|a, b|$. Puisqu'on peut calculer les intégrales en prenant des limites sur des intégrales évaluées sur un intervalle borné (Thm. 2.2 et 3.6), il suffit de traiter le cas des intervalles bornés, fermés. Si $f$ est bornée, $f\circ x$ est aussi bornée, le cas déjà connu. Cela s'applique aux fonctions $f \wedge n$. La suite $\{f \wedge n\}$ converge de façon monotone vers $f$ et la suite $\{(f \wedge n)\circ x\}$ converge de façon monotone vers $f\circ x$. Le théorème 1.6 (convergence monotone) implique alors le résultat. $\square$

*Remarque.* Si la fonction $x(t)$ est strictement décroissante, $c = x(a) > d = x(b)$ et on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_d^c f((x(t))|x'(t)|dt.$$

## 6. Convergence dominée

Il s'agit d'une généralisation du Thm. 3.2 :

THÉORÈME 6.1. (Convergence Dominée) *Soit* $J = |a, b| \subset \mathbb{R}$ *et soient* $f_n$, $n = 1, 2, \dots$ *et* $f$ *des fonctions presque partout continues telle que* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *presque partout. Soit* $g : J \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable telle que*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \quad \textit{presque partout.}$$

*Alors les fonctions* $f_n$ *et* $f$ *sont intégrables et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| = 0.$$

*En particulier*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_J f_n = \int_J f.}$$

DÉMONSTRATION. Par le lemme 3.7 $|f|$, $|f_n|$ et donc aussi $f$ et $f_n$ sont intégrables. Il reste à montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| = 0$.

• Cas d'un intervalle borné : pour tout $M \in \mathbb{R}$ la suite $|f_n - f| \wedge M$ converge vers 0 presque partout et reste uniformément bornée. Le Thm. 3.2 (convergence bornée) implique alors que $\lim_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| \wedge M = 0$.

D'autre part, par le théorème de convergence monotone (1.6) (appliqué à la suite $g \wedge n$), pour tout $\epsilon > 0$, il y a $M$ telle que $\int_J g \leqslant \int_J g \wedge M + \epsilon/2$. Donc, utilisant l'estimation $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2g(x)$, on trouve d'abord :

$$|f_n(x) - f(x)| - |f_n(x) - f(x)| \wedge M \leqslant 2g - 2g \wedge M$$

et en intégrant :

$$\int_J |f_n - f| \leqslant \int_J |f_n - f| \wedge M + \epsilon.$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$ :

$$0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| \leqslant \epsilon$$

et par conséquent $\limsup_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| = 0$. Ceci complète la démonstration si $J$ est borné.

• Cas d'un intervalle non-borné : on complétera la démonstration dans le cas $J = [a, +\infty[$. Soit $\{b_n\}$ une suite croissante avec limite $+\infty$. On pose

$$h_n = |f - f_n|.$$

On a $h_n \leqslant 2g(x)$ presque partout, c.à.d. $(h_n - 2g(x))_+$ est presque partout nulle, donc son intégrale est nulle ; on peut donc supposer que $h_n \leqslant 2g(x)$ est vrai partout. D'après ce qui précède (le cas d'un intervalle borné) , en prenant $J' = [a, b_m]$, il y a un entier $N = N(m)$ telle que $\int_a^{b_m} h_n \leqslant \epsilon/2$ si $n \geqslant N$. L'estimation uniforme $\int_{b_m}^b h_n \leqslant \int_{b_m}^b 2g = C_m$ avec $\lim_{m\to\infty} C_m = 0$ montre que pour chaque $\epsilon > 0$ on peut trouver $m$ telle que $\int_{b_m}^b h_n < \epsilon/2$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$. Avec ce $m$ et $n \geqslant N$ on trouve :

$$\int_J h_n = \int_a^{b_m} h_n + \int_{b_m}^b h_n < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

□

Comme application on a :

COROLLAIRE 6.2. (Convergence Monotone – cas général) *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque et soit $f : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ presque partout continue et intégrable. On suppose qu'il y a une suite croissante de fonctions intégrables $f_n : J \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

*presque partout. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f_n = \int_J f.$$

## 7. Intégrales généralisées

Détaillons le lien avec la notion d'intégrale généralisée.

*Remarque*. Une fonction $f : J = |a, b| \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable est partout *localement intégrable* dans le sens que pour tout $c \in J$ on peut trouver un intervalle $I_c$ autour de $c$ sur lequel $f$ est intégrable. Si de plus $\forall c$, $f|I_c$ est bornée, on dit que $f$ est *localement bornée intégrable*. Une fonction intégrable est partout localement intégrable. Une fonction presque partout continue sur $f$ et localement bornée est localement bornée intégrable, mais pas forcément intégrable. Elle est intégrable sur tout sous-intervalle compact.

DÉFINITION 7.1. Supposons que $f : J = [a, b[\to \mathbb{R}$ presque partout continue et localement bornée. Si $\lim_{\beta\to b} \int_a^\beta f$ existe on dit $f$ est *intégrable au sens généralisé* et $\lim_{\beta\to b} \int_a^\beta f$ est appelée une *intégrale généralisée*.

Si $f$ est intégrable, $f$ est en particulier presque partout continue, donc si $f$ est aussi localement bornée, $f$ est intégrable sur tout sous-intervalle $[a, \beta]$ de $J$. Par Thm. 2.2 (si $J$ est borné) ou Thm. 3.6 (dans le cas ou $J$ est non-borné), on a $\lim_{\beta\to b} f \int_a^\beta = \int_J f$ et donc dans ce cas les notions d'intégrale et intégrale généralisée coïncident. Réciproquement on a :

LEMME 7.2. *Si $f$ est non-négative, presque partout continue sur $J = [a, b[$ et bornée sur tout intervalle $[a, \beta]$, $\beta < b$, alors si* $\lim_{\beta\to b} \int_a^\beta f$ *existe, $f$ est intégrable et*

$$\lim_{\beta\to b} \int_a^\beta f = \int_J f$$

DÉMONSTRATION. Soit $a = b_1 < b_2 < \cdots < b$ une partition dénombrable de $[a, b[$. Alors, puisque $f$ est presque partout continue sur $[b_n, b_{n+1}]$, elle est intégrable sur cet intervalle et on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f = \lim_{k\to\infty} \int_a^{b_k} f.$$

Dans le cas borné on applique Corr. 1.7. Dans le cas où $b = +\infty$, on remarque que la série de gauche est (absolument) convergente et donc $f$ est intégrable sur $[a, \infty[$ par définition. □

*Remarque*. la condition $f \geqslant 0$ est essentielle : il y a des fonctions non-intégrables dont l'intégrale généralisée existe. Voir les Exercices.

Appliquant ce Lemme à $|f|$ on déduit que l'existence de l'intégrale généralisée pour $|f|$ implique que $f$ est est intégrable et donc l'intégrale généralisée pour $f$ existe et calcule $\int_a^b f$. Donc :

Corollaire 7.3. *Soit $f : [a,b[ \to \mathbb{R}$ presque partout continue et localement bornée. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$f$ est intégrable ;*

(2) $\lim\limits_{\beta \to b} \displaystyle\int_a^\beta |f|$ *existe.*

*De plus, si $f$ est intégrable on a* $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f$.

Exemple 7.4. (1) La fonction $1/x$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$. Utilisant le Corollaire précédente, il suffit de remarquer que pour $0 < \delta$ on a

$$\int_\delta^1 \frac{1}{x} dx = -\log(\delta)$$

tandis que $\lim_{\delta \downarrow 0} \log \delta = -\infty$. Plus généralement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ existe si et seulement si $\alpha < 1$ : on calcule pour $\alpha \neq 1$

$$\int_\delta^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{-\alpha + 1}\left(1 - \delta^{-\alpha+1}\right), \quad 0 < \delta \leqslant 1$$

et on note que $\lim_{\delta \downarrow 0} \delta^{-\alpha+1} = 0$ si $\alpha < 1$

(2) L'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

existe si et seulement si $\alpha > 1$.

## Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ? :

(1) Une fonction est intégrable si et seulement si elle est absolument intégrable.

(2) Soit $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Alors

$$\lim_{\alpha \longrightarrow a} \lim_{\beta \longrightarrow b} \int_{\alpha}^{\beta} f = \int_{a}^{b} f.$$

(3) Soient $f, g$ deux fonctions positives telles que $0 \leqslant f \leqslant g$. Alors, si $g$ est intégrable, alors $f$ est intégrable. Indication : penser à la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

(4) Soient $f, g$ deux fonctions presque partout continues, telle que $f \leqslant g$. Alors, si $g$ est intégrable, alors $f$ est intégrable. Indication : penser aux fonctions négatives.

Réponses ici.

## Problèmes

(1) Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ décroissante avec $\lim_{x\to b} f(x) = 0$ et $g : [a, b[ \to \mathbb{R}$ intégrable sur tout sous-intervalle $[a, \xi] \subset [a, b[$. On suppose qu'il y a $M \in \mathbb{R}$ avec $\int_a^\xi g \leqslant M$.

- Montrer que pour $a \leqslant \xi_1 < \xi_2 < b$ on a :

$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(t)g(t)\,dt \right| \leqslant 2 f(\xi_1) M$$

- En déduire que $\lim_{\xi\to b} \int_a^\xi f(t)g(t)\,dt$ existe

Ce résultat est souvent appelé le *Critère Intégral d'Abel*. Réponse ici.

(2) Montrer que $\lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos x^2\,dx$ existe. Indication : faire le changement de variable $x^2 = u$ et appliquer le critère intégral d'Abel. Montrer ensuite que $\cos x^2$ n'est pas intégrable sur $[0,\infty[$. Cela donne une première exemple d'une fonction qui n'est pas intégrable mais dont l'intégrale généralisée existe. Réponse ici.

(3) On introduit

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \frac{\sin x}{x^\alpha} \\ I(\alpha, \xi) &= \int_1^\xi f_\alpha(x)\,dx. \end{aligned}$$

– Montrer que $f_\alpha(x)$ est intégrable sur $[1, \infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
– Montrer que $\lim_{\xi \to \infty} I(\alpha, \xi)$ existe si et seulement si $\alpha > 0$.

Réponse ici.

(4) Soit $T \subset \mathbb{R}^n$ et soit $f : T \times [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $\xi \in [a, b[$ et $\epsilon > 0$ :

- $x \longrightarrow f(t, x)$ est intégrable sur $[a, \xi]$ ;
- $t \longrightarrow f(t, x)$ est continue en $t$ pour presque chaque $x \in [a, b[$ ;
- Il y a $g_\xi : [a, \xi] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que

$$\left| f(t, x) \right| \leqslant g_\xi(x), \quad \forall (t, x) \in T \times [a, \xi].$$

- Existe $A$ telle que

$$\left| \int_\xi^\eta f(t, x)\, dx \right| \leqslant \epsilon, \quad A < \xi < \eta < b,\ t \in T.$$

Montrer que $F(t) := \lim_{\xi \to b} \int_a^\xi f(t, x)\, dx$ existe pour tout $t \in T$ et que $t \longrightarrow F(t)$ est continue sur $T$. Appliquer ce résultat pour montrer que la fonction

$$\alpha \mapsto I(\alpha) = \lim_{\xi \to \infty} \int_1^\xi \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

est continue sur $]0, \infty[$.

Réponse ici.

(5) Soit $0 = x_1 < x_2 < \cdots < 1$ , une subdivision dénombrable de $I = [0,1)$ et soit $f : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f = (-1)^n/n$, $n = 1,2,\ldots$ Montrer que $\int_0^1 f$ n'existe pas, mais $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_0^{1-\epsilon} f = \log 2$. Donner une exemple d'une telle fonction où $x_n = 1 - 1/n$.

Réponse ici.

CHAPITRE 5

# Applications

## 1. Intégrales dépendant d'un paramètre

On se donne un sous-ensemble $T \subset \mathbb{R}^m$, un “espace de paramètres”, $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et une fonction $f_t : J \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable qui dépend du paramètre $t$, i. e., on a :

$$\begin{aligned} f &: T \times J \longrightarrow \mathbb{R} \\ f_t &= f(t,-) : J \longrightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La question est de savoir comment

$$F(t) := \int_J f_t(x)dx$$

se comporte par rapport à $t$. Le cas le plus facile est :

LEMME 1.1. *On suppose $J = [a,b]$ et $f : T \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $F : T \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{t_n\}$ une suite de points de $T$ qui converge vers $t \in T$. Il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(t)$ (critère séquentiel de continuité). Or, l'ensemble $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} t_n \cup t$

et $K \times J$ étant compact, la restriction de $f$ à $K \times J$ est uniformément continue. Alors $f_{t_n}$ converge uniformément vers $f_t$ et le résultat est une conséquence du Thm. 1.1. □

On peut renforcer cela en utilisant le théorème de la convergence bornée :

PROPOSITION 1.2. *Soit $E \subset J = [a, b]$ de mesure 0 et $M \geqslant 0$ telles que*

(1) *la fonction $f$ est continue sur $T \times (J - E)$ ;*

(2) *pour tout $(t, x) \in T \times J$ on a une estimation uniforme :*

$$|f(t, x)| \leqslant M.$$

*Alors $F$ est continue sur $T$.*

DÉMONSTRATION. On reprend la démonstration précédente utilisant Thm. 3.2 au lieu de Thm. 1.1. □

On obtient une version plus forte en utilisant le Thm. 6.1 :

PROPOSITION 1.3. *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque, $E \subset J$ un ensemble de mesure 0, et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable. Soit $f : T \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

(1) *pour tout $x \in J - E$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue ;*

(2) *pour tout $t \in T$ la fonction $f_t : x \mapsto f(t, x)$ est presque partout continue sur $J$ ;*

(3) *Pour $(t, x) \in T \times J$ on a :*

$$|f(t, x)| \leqslant g(x).$$

*Alors, $F$ est continue sur $T$.*

On peut aussi se demander si $F(t)$ est dérivable :

PROPOSITION 1.4. *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque, et $g : J \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable. Soit $f : T \times J \to \mathbb{R}$ telle que :*

(1) *pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $J$ ;*

(2) *$\dfrac{\partial f}{\partial t}$ existe pour tout $(t,x) \in T \times J$ et on a :*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leqslant g(x), \quad \forall (t,x) \in T \times J;$$

(3) *pour tout $t \in T$ la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est intégrable sur $J$.*

*Alors $F(t)$ est dérivable et*

$$F'(t) = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx.$$

démonstration ici)

## 2. Convolution et Approximation

DÉFINITION 2.1. Soit $f$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et presque partout continue. La *convolution* de $f$ et $\theta$ est la fonction donnée par :

$$\boxed{f * \theta(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\theta(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Pourquoi cette intégrale existe-t-elle ? (réponse)

EXEMPLE 2.2. On utilise souvent des *fonctions $\theta_{ab}$ en cloche* On a besoin de la notion suivante :
*Rappel :* Le support d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'adhérence des points $x \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \neq 0$. Donc $f$ est à support compact si $f(x) = 0$ pour $|x|$ assez grand.

- $\theta_{ab} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est de classe $C^\infty$ ;
- $\mathrm{supp}(\theta_{ab})$ est l'intervalle $[a, b]$.
- $\int_{\mathbb{R}} \theta_{ab} = 1$.

On construit un tel exemple en partant de la fonction $C^\infty$ :

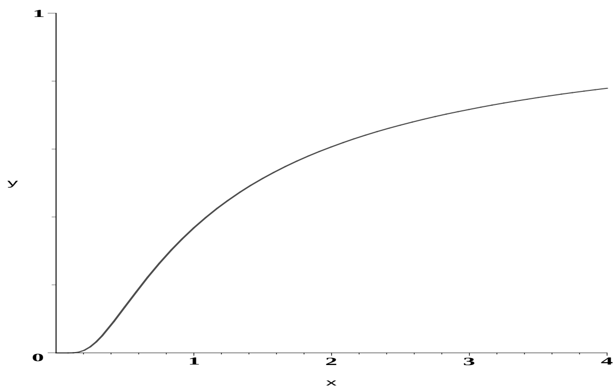


FIGURE 1. La fonction $f$

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{t}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0. \end{cases}$$

La fonction $C^\infty$ :

$$g(t) := \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

a la propriété qu'elle est nulle pour $t \leqslant 0$ et = 1 pour $t \geqslant 1$.

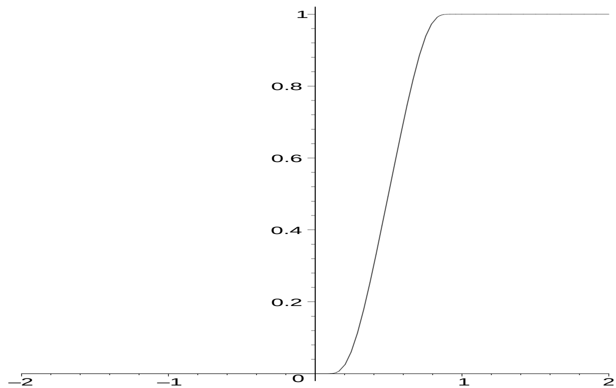


FIGURE 2. La fonction $g$

On pose alors

$$\theta_{ab}(t) = \frac{g(t-a)g(b-t)}{\int_{\mathbb{R}} g(t-a)g(b-t)dt}.$$

Une question naturelle se pose : la convolution est-elle commutative. D'abord on remarque que la convolution $h * g$ est aussi définie si par exemple $h$ et $g$ sont presque partout continues, et $h$ est à support compact et bornée. Utilisant cette remarque, on a :

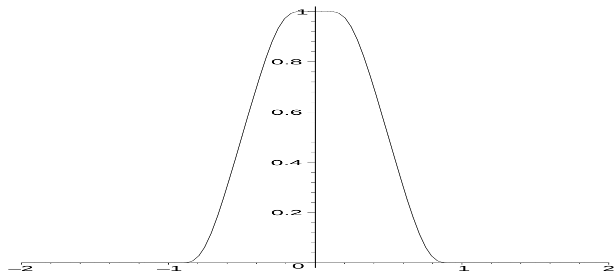


FIGURE 3. La fonction $\theta_{-11}$

LEMME 2.3. *On suppose en plus que* $\operatorname{supp}(\theta)$ *est compact. Alors* $f * \theta = \theta * f$. *De plus, si* $\theta$ *est de classe* $C^k$, $f * \theta$ *est de classe* $C^k$.

DÉMONSTRATION. Supposons que le support de $\theta$ est contenu dans $[a, b]$. Alors

$$f * \theta(x) = \int_a^b f(x-t)\theta(t)dt.$$

On fait le changement de variable $u = x - t$ :

$$f * \theta(x) = \int_{x-b}^{x-a} f(u)\theta(x-u)du = \int_{\mathbb{R}} f(u)\theta(x-u)du = \theta * f(x).$$

On regarde $x$ comme paramètre et $u$ comme variable et on applique la Prop. 1.3 on en déduit que la fonction $f * \theta$ est continue si $\theta$ est continue. Ensuite on considère les fonctions

$$F_i(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\frac{\partial^{i+1}\theta(x-u)}{\partial^{i+1}x}du, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Ces fonctions sont continues et même dérivables : regardant $x$ comme paramètre, par une application de la Prop. 1.4 on trouve $F_i'(x) = F_{i+1}(x)$. Donc, par récurrence :

$$(f * \theta)^i = F_i$$

est continue. □

Convolutant $f$ avec des fonctions de classe $C^k$ convenables on peut donc espérer approcher $f$ par des fonctions plus régulières que $f$. On donnera deux exemples de ce phénomène.

THÉORÈME 2.4. (Weierstrass) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ayant support compact $[a, b]$. Il y a une suite de polynômes $P_n$ telles que*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

*uniformément sur $[a, b]$.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $\mathrm{supp}(f) = [0, 1]$, (si $\mathrm{supp}(f) = [a, b]$, on remplace $x$ par $((x-a)/b-a))$. Introduisons pour $n = 1, 2, \ldots$ :

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= (1-x^2)^n, \\ q_n &= \textstyle\int_{-1}^1 Q_n; \\ P_n(x) &= \tfrac{1}{q_n} Q_n. \end{aligned}$$

Évidemment la convolution

$$f * Q_n(x) = Q_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) Q_n(x-t)\,dt = \int_0^1 f(t)\left(1-(x-t)^2\right)^n dt$$

est un polynôme de degré $\leqslant 2n$. On va montrer que le polynôme normalisé

$$R_n(x) = \frac{1}{q_n} \int_{\mathbb{R}} f(t) Q_n(x-t)\,dt$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

Puisque $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ pour $\epsilon > 0$ on peut choisir $\delta > 0$ telle que

$$|y - x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Puisque $f$ est continue et de support compacte, il y a $M \geqslant 0$ telle que $|f| \leqslant M$. On pose

$$g_n(x) := f * P_n(x) - f(x).$$

On a $f * P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)P_n(t)dt$ puisque $x \in [0,1]$ et le support de $f$ est contenu dans $[0,1]$. Puisque $\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = 1$ et en utilisant que $P_n(t) \geqslant 0$ sur $[-1,1]$, on a pour $x \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned}
|g_n(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} [f(x-t) - f(x)]P_n(t)dt \right| \\
&\leqslant \int_{-1}^{1} |f(x-t) - f(x)|P_n(t)dt \\
&\leqslant 2M \int_{-1}^{-\delta} P_n(t)dt + \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} P_n(t)dt + 2M \int_{\delta}^{1} P_n(t)dt \\
&\leqslant 4M \frac{1}{q_n}(1-\delta)(1-\delta^2)^n + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Ensuite, il faut estimer $q_n$ en utilisant l'estimation élémentaire

$$(1 - x^2)^n \geqslant 1 - nx^2.$$

En fait :

$$
\begin{aligned}
q_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = & \\
= 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad & \geqslant \quad 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n dx \\
& \geqslant \quad 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

On a donc $\frac{1}{q_n}(1-\delta)(1-\delta^2)^n < \sqrt{n}(1-\delta)(1-\delta^2)^n = \sqrt{n}(1-\delta)(1-\delta^2)^n := b_n$. Puisque

$$
b_{n+1}/b_n = \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)(1-\delta^2) < 1, \quad \text{si } n \gg N = N(\delta)
$$

la suite $\{b_n\}$ converge vers zéro et $|b_n| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ et par conséquent $|g_n(x))| \leqslant \epsilon$ si $n$ est suffisamment grand. □

Voici une autre exemple de “régularisation” utilisant les fonction de cloche $\theta_{ab}$ :

THÉORÈME 2.5. *Soit $f$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose*

$$
\begin{aligned}
\theta_n(x) &= n\theta_{-1,1}(nx) \\
f_n(x) &= f * \theta_n.
\end{aligned}
$$

*Alors*

(1) *$f_n$ est de classe $C^\infty$ ;*

(2) *si $f$ est continue, alors lorsque $n$ tend vers l'infini, la suite $\{f_n\}$ tend uniformément vers $f$ sur chaque intervalle borné $J$.*

DÉMONSTRATION. 1) : Clair.
2) Le support de $\theta_n$ est inclus dans $[-1/n, 1/n]$ et donc

$$f * \theta_n - f = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} [f(x-t) - f(x)]\theta_n(t)dt.$$

Sur $J$ la fonction $f$ est uniformément continue et donc pour pout $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ telle que

$$|t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x-t) - f(x)| < \epsilon.$$

Cela s'applique pour $t \in [-1/n, 1/n]$, $n \gg 0$ et donc

$$n \geqslant N = N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f * \theta_n - f| \leqslant \epsilon \int_{\mathbb{R}} \theta_n(t)dt = \epsilon.$$

□

## Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ou faut-il modifier les hypothèse ? :

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables $x$ et $y$ et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Si la fonction $f$ est continue en $x$ et en $y$ et si de plus $|f(x,y)| \leqslant g(y)$, alors $\int f(x,y)dy$ est continue en $x$.

(2) Soit $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables $x$ et $y$. On suppose que $f$ est dérivable par rapport à $x$ et que $y \mapsto f(x,y)$ ainsi que $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ sont bornées et presque partout continues. On a

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}dy.$$

(3) Soient $f$ et $g$ deux fonctions intégrables. Alors leur convolution existe.

(4) Dans le théorème de Weierstrass, la fonction $f$ est limite uniforme des polynômes $P_n$ sur tout $\mathbb{R}$.

(5) Une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de fonctions $C^\infty$.

Réponses ici.

## Problèmes

(1) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0, \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Montrer que $f = 0$. Indication : utiliser le théorème de Weierstrass pour montrer que $\int_0^1 f^2 = 0$. Réponse ici.

(2) Soit

$$f(x) = \int_1^x \frac{\log t}{t^2+1}\,dt, \qquad x > 0.$$

Étudier les variations de $f$. Comparer $f(x)$ et $f(1/x)$. Montrer que $f(x) < 1$ et donner l'allure du graphe de $f$. Réponse ici.

(3) Soit

$$j(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt \qquad x \neq 0.$$

Montrer que $j(x)$ est paire. Obtenir $\lim_{x\to\infty} j(x)$. Représenter le graphe local de $j$ au voisinage de $x = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, monter que $j$ s'annulle une fois et une seule fois dans l'intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$. Réponse ici.

(4) Justifier l'existence de

$$j = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{e^t + 1} dt.$$

Évaluer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1)t} \sin t$ pour $t \geqslant 0$. Prouver :

$$j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 1}.$$

Réponse ici.

(5) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r$ telle que $0 < r < R$. Prouver : il existe un réel $B(r)$ tel que : pour tout $n \geqslant 0$, $|a_n r^n| \leqslant B(r)$. Montrer qu'on définit une fonction $s$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$s_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Soit $\alpha$ un réel qui vérifie $\alpha > 1/R$. Justifier l'existence de

$$f(\alpha) = \int_0^{\infty} s(x) e^{-\alpha x} dx.$$

Montrer : $f(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\alpha^{n+1}}$. Réponse ici.

(6) On définit les fonctions $f$ et $g$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \exp(-t^2)\,dt \\ g(x) &= \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2 u}\right) du. \end{aligned}$$

Montrer : $f$ et $g$ sont de classe $C^1$ ; $f^2+g$ est une fonction constante. En déduire la limite de $f$ en $\infty$. Réponse ici.

(7) On définit la fonction $h$ sur $]-1,\infty[$ par :

$$h(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,dt.$$

Calculer $h'(x)$. Prouver :

$$h(x) = (\pi/8)\ln(1+x^2) + (1/2)\ln 2 \operatorname{Arctan} x - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt.$$

Calculer $h(1)$. Donner l'allure du graphe de $h$. Réponse ici.

(8) Soit

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t} \exp(-xt)\,dt, \qquad x > 0.$$

Montrer : $f$ est continue de classe $C^1$. Calculer : $f'(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $f(x)$. Réponse ici.

(9) Justifier l'existence de $k = \int_0^{\infty} \exp(-t^2)\,dt$. Montrer qu'on définit une fonction continue sur $[0, \infty[$ par :

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \exp(-xt^2)\,dt.$$

prouver : pour tout $x > 0$, $g(x) \leqslant k/\sqrt{x}$. Montrer : $g$ est dérivable sur $]0, \infty[$ ; pour tout $x > 0$, $g'(x) - g(x) = k/\sqrt{x}$. La fonction $g$ est-elle dérivable à droite en 0 ? Réponse ici.

(10) Déterminer pour quelles valeurs de $x$ la fonction $t \mapsto 1/(1+t^x)$ est Riemann-intégrable sur $]0, \infty[$. On note alors

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^x}$$

et $D$ le domaine de définition de $F$.

(a) Démontrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $D$.

(b) Démontrer que $F$ est décroissante (on pourra couper l'intégrale donnant $F'(x)$ en deux et faire un changement de variables de façon d'obtenir $F'(x) = \int_1^\infty (???)\,dt$.)

(c) Étudier $\lim_{n\to\infty} F(n)$ ; en déduire : $F$ a une limite quand $x$ tend vers $\infty$.

(d) Démontrer

$$\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^x} \geqslant \frac{1}{2(x-1)}, \quad \forall x > 1.$$

En déduire $\lim_{x\to 1} F(x) = \infty$.

(e) Donner l'allure du graphe de $F$.

Réponse ici.

(11) Soit

$$g(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}, \qquad (x \geqslant 0, t \geqslant 0).$$

(a) Montrer que la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable (sur la demi-droite $t \geqslant 0$).
Soit

$$f(x) = \int_0^\infty g(x,t)\,dt$$

son intégrale.

(b) Montrer que $f$ est continue en chaque point $x \geqslant 0$ et dérivable en chaque point $x > 0$.

(c) Montrer que $f(x) \leqslant 1/x$ si $x > 0$.

(d) Montrer que $f$ est une solution sur $]0,\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad\qquad y'' + y = \frac{1}{x}.$$

Montrer en plus que $f$ est l'unique solution de (E) ayant une limite 0 lorsque $x$ tend vers l'infini.

(e) Soit $0 < x < y$. Montrer que les limites suivantes existent et qu'elles sont finies :

$$\begin{aligned} s(x) &= \lim_{y\to\infty} \int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt \\ c(x) &= \lim_{y\to\infty} \int_x^y \frac{\cos t}{t}\,dt \end{aligned}$$

(f) Montrer que la fonction $s(x)$ est dérivable pour $x > 0$ et que $s'(x) = -\sin(x)/x$. De même $c'(x) = -\cos(x)/x$.

(g) Prouver :

$$f(x) = s(x) \cdot \cos(x) - c(x) \cdot \sin(x).$$

(h) Montrer :

$$\lim_{x \downarrow 0} \left[ (\sin x) \cdot \left( \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt \right) \right] = 0.$$

En déduire la valeur de $\lim_{x \downarrow 0} s(x)$.

Réponse ici.

(12) Soit

$$g(x,t) = \frac{2t\,e^{-xt^2}}{t^2+1}, \qquad (x \geqslant 1, t \geqslant 0).$$

(a) Montrer que la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable (sur la demi-droite $t \geqslant 0$). Soit

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(x,t)\,dt$$

son intégrale.

(b) Montrer que $f$ est continue et dérivable en chaque point $x \geqslant 1$.

(c) Montrer que $f(x) \leqslant 1/x$.

(d) Montrer que $f$ est une solution sur $[1,\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad\qquad y' - y = \frac{1}{x}.$$

Montrer en plus que $f$ est l'unique solution de (E) ayant une limite 0 lorsque $x$ tend vers l'infini.

Réponse ici.

CHAPITRE 6

# Le cas de plusieurs variables

## 1. Le cas des fonctions bornées sur des ensembles bornés

Un *pavé* de $\mathbb{R}^n$ est un produit

$$Q = J^1 \times \cdots \times J^n, \quad J^k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}.$$

Pour $n = 2$ on a un rectangle. Le *volume* est le produit des longueurs des intervalles $J^j$, $j = 1, \ldots, n$ :

$$\mathrm{Vol}(Q) = \prod_{i=1}^{n} |J^i| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Une subdivision $P = P^1 \times \cdots \times P^n$ de $Q$ est la donnée des $n$ subdivisions $P^k$ de $J^k$, $k = 1, \ldots, n$. Cela donne une subdivision de $Q$ en sous-pavés $Q_\alpha = J^1_{i_1} \times \cdots \times J^n_{i_n}$, $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$.

On considère les *fonctions bornées*

$$f : Q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q = J^1 \times \cdots J^n, \quad |f| \leqslant M.$$

On utilise les sous-pavés pour définir les sommes $S(P,f)$ et $s(P,f)$ comme dans le cas d'une variable :

$$\begin{aligned} S(P,f) &= \sum_{\alpha} \sup_{Q_\alpha} f \cdot \mathrm{Vol}(Q_\alpha) \\ s(P,f) &= \sum_{\alpha} \inf_{Q_\alpha} f \cdot \mathrm{Vol}(Q_\alpha). \end{aligned}$$

Avec cette convention, la définition d'intégrabilité reste la même :

DÉFINITION 1.1. On dit que $f$ est *intégrable* si $\sup_P s(P,f) = \inf_P S(P,f)$ et dans ce cas on pose :

$$\begin{aligned} \int_Q f &= \underline{\int} f := \sup_P s(P,f) \\ &= \overline{\int} f := \inf_P S(P,f). \end{aligned}$$

Toutes les propriétés dérivées en Chap. 1, proprement interprétées restent valables dans ce cas :

PROPRIÉTÉS 1.2. | Soit $Q \subset \mathbb{R}^n$ un pavé et soit $\mathscr{I}(Q)$ l'ensemble des fonctions $f : Q \to \mathbb{R}$ bornées et intégrables. Alors :

(1) L'intégration

$$\begin{cases} \int & : \quad \mathscr{I}(Q) \to \mathbb{R} \\ & \qquad f \mapsto \int_J f. \end{cases}$$

est une application linéaire qui respecte l'ordre : si $f \leqslant g$, alors $\int_Q f \leqslant \int_Q g$ ;

(2) Le produit des fonctions bornées et intégrables est intégrable ;

(3) Si $f$ est bornée et intégrable, alors $|f|$ l'est et l'on a

$$\boxed{\left|\int_Q f\right| \leqslant \int_Q |f|;}$$

(4) Si $f$ et $g$ sont bornées et intégrables, alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ le sont. En particulier $f_-$ et $f_+$ sont intégrables.

(5) L'intégration est additive : si $Q = Q_1 \cup Q_2$, une subdivision en 2 sous-pavés, alors

$$\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f.$$

On peut étendre cette définition au cas d'un ensemble borné quelconque :

DÉFINITION 1.3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ bornée. Soit $Q \supset A$ un pavé. On étend $f$ à $\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ et posant $\tilde{f}(x) = 0$ si $x \in Q - A$. On dit que $f$ est *intégrable sur $A$* si $\tilde{f}$ l'est (sur $Q$) et on pose

$$\int_A f := \int_Q \tilde{f}.$$

Cette définition ne dépend pas du choix de $Q$ (pourquoi ?).

## 2. Ensembles négligeables

On a besoin de la notion de mesure nulle dans le cas d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. D'abord quelques remarques. L'*hypercube standard* $I^n(0,r)$ de demi-longueur $r$ et de centre 0 est l'ensemble $[-r,r]^n \subset \mathbb{R}^n$. Son volume est $(2r)^n$. Une translation par $\vec{p}$ transforme cet hypercube dans un hypercube standard $I^n(p,r)$ de centre $p$ de même volume. Ensuite, une rotation transforme cet hypercube dans un hypercube en biais de même volume. La boule euclidienne de centre $p$ et de rayon $r$ est notée $B^n(p,r)$.

Soit $T$ une rotation de centre $p \in \mathbb{R}^n$, alors du fait qu'on a des inclusions $T(I^n(p,r)) \subset B^n(p,\sqrt{n}r) \subset I^n(p,\sqrt{n}r)$ on déduit qu'un hypercube de volume $V$ en biais est contenue dans un hypercube standard de volume $n^{\frac{1}{2}n}V$ et dans une boule de volume $< n^{\frac{1}{2}n}V$. Un pavé de $\mathbb{R}^n$ de volume $V$ peut être recouvert par un nombre fini d'hypercubes standard dont la somme des volumes est ainsi proche de $V$ que l'on veut (pourquoi ?). De même, un pavé en biais de volume $V$ peut être recouvert par un nombre fini d'hypercubes en biais dont la somme des volumes est ainsi proche de $V$ que l'on veut, disons de volume total $< 2V$, et donc, par les remarques précédentes par un nombre fini d'hypercubes standard ou des boules dont le volume total est $< 2n^{\frac{1}{2}n}V$.

DÉFINITION 2.1. On dit que $A$ est *de mesure* $0$ *ou négligeable*, si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un nombre dénombrable de pavés ouverts recouvrant $A$ et dont la somme des volumes est $\leqslant \epsilon$.

Par les remarques précédentes, on pourra utiliser des hypercubes standard ou en biais, des pavés standard ou en biais, ou des boules.

LEMME 2.2. *Soit $n > 1$ et soit $\vec{x} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe $C^1$. L'image de $\vec{x}$ est un ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\epsilon > 0$. L'application $\vec{x}'$ est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$, telle que si $|t-t_0| < \eta$, $\|\vec{x}'(t)-\vec{x}'(t_0)\| < \epsilon$. On choisit $N$ telle que $1/N < \eta$ et on divise $[0,1]$ en $N$ intervalles $J_k = [k/N,(k+1)/N]$. On pose $t_0 = k/N$. Par la formule des accroissements finis, pour tout $t \in J_k$ il existe $\xi \in ]t_0, t[$ telle que $\vec{x}(t)-\vec{x}(t_0) = (t-t_0)\vec{x}'(\xi)$ et donc, puisque

$$\vec{x}(t) - \left[\vec{x}(t_0) + \vec{x}'(t_0)(t-t_0)\right] = (t-t_0)\left(\vec{x}'(\xi) - \vec{x}'(t_0)\right)$$

$$\left\|\vec{x}(t) - \left[\vec{x}(t_0) + \vec{x}'(t_0)(t-t_0)\right]\right\| \leqslant \epsilon|t-t_0|.$$

Cela veut dire que pour $\lambda \in [0,1/N]$ l'image $\vec{x}(t_0+\lambda)$ se trouve dans une boule de centre $\vec{x}(t_0) + \lambda\vec{x}'(t_0)$ et de rayon $\lambda\epsilon$. Donc l'image du segment $[k/N,(k+1)/N]$ est contenu dans un cylindre de hauteur $\dfrac{\|\vec{x}'(t_0)\| + \epsilon}{N}$ et de base une boule de $\mathbb{R}^{n-1}$ de rayon $\epsilon/N$. Un tel cylindre est contenu dans un pavé (en biais) de volume $(2\epsilon/N)^{n-1}\dfrac{\|\vec{x}'(t_0)\| + \epsilon}{N}$ et donc l'image de la courbe entière est contenue dans une réunion de pavés (en biais) de volume total

$$\left(\frac{\|\vec{x}'\|_\infty + \epsilon}{N}\right)\frac{(2\epsilon)^{n-1}}{N^{n-2}} \leqslant \left(\|\vec{x}'\|_\infty + 1\right)2^{n-1}\epsilon,$$

au moins si $\epsilon < 1$. □

On peut remplacer $[0,1]$ par n'importe quel intervalle et même par un hypercube standard. Alors, soit $\vec{F} : I^m(0,r) \to \mathbb{R}^n$ une application dérivable. On souhaite appliquer le lemme précédent aux intervalles passant par l'origine et contenus dans l'hypercube. Pour expliquer les changements dans l'estimation ci-dessus, il faut se rappeler que la dérivée de $\vec{F}$ au point $\xi$ est d'une application linéaire

$$\vec{F}'(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

et que pour les applications linéaires $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la norme $\|A\|$ est défini par

$$\|A\| = \sup\{\|A(\xi)\| \mid \xi \in S^m\}$$

et dans notre situation on utilise cette norme pour définir :

$$\|\vec{F}'\|_\infty = \sup_\xi \|\vec{F}'(\xi)\|.$$

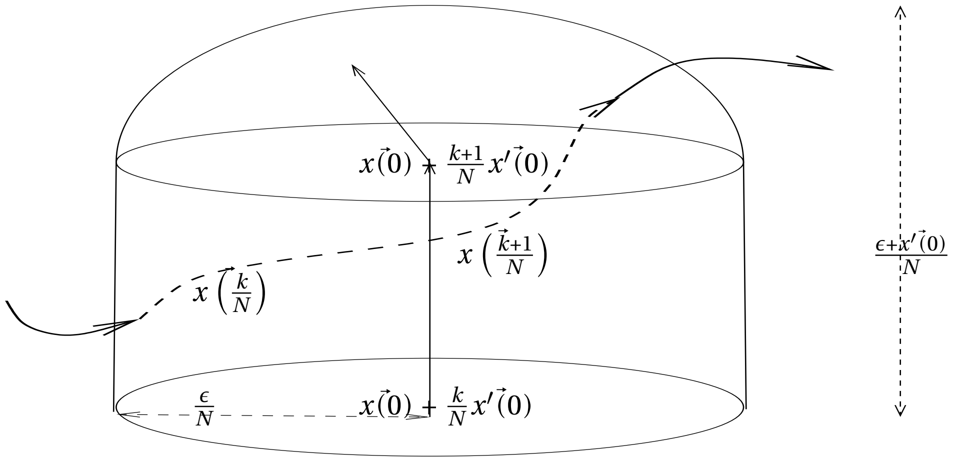


FIGURE 1. Une courbe est négligeable

En poursuivant cette méthode, on peut facilement voir que pour $\epsilon > 0$, l'image de $\vec{F}$ est contenu dans une réunion de $N^m$ cylindres de la forme $P \times B$, où $P$ est un parellépipède dans $\mathbb{R}^m$ volume $\|\vec{F}'(x_0)\|$, $B$ est une boule de $\mathbb{R}^{n-m}$ de rayon $\epsilon$ et $x_0 \in I^m(0,r)$. Cette réunion est donc recouvert par des pavés (en biais) de volume total

$$\left(\frac{\|\vec{F}'\|_\infty + \epsilon}{N^m}\right) \frac{(2\epsilon)^{n-m}}{N^{n-2m}} \leqslant \left(\|\vec{F}'\|_\infty + 1\right) 2^{n-m} \epsilon^{n-m}.$$

On en déduit :

Corollaire 2.3. *Soit $n > m$ et soit $\vec{F} : I^m(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application $C^1$. L'image de $\vec{F}$ est un ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$.*

Avant de donner des exemples on fait appel à quelques notions de la topologie.

Exemple 2.4. – Le bord d'un pavé est négligeable ;
- un sphère est négligeable ;
- la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable ;
- la réunion d'un nombre fini de courbes $C^1$ dans $\mathbb{R}^2$, est négligeable.

Théorème 2.5. *Soit $Q \subset \mathbb{R}^n$un pavé et $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et presque partout continue. Alors $f$ est intégrable.*

La preuve est analogue à celle du Thm. 1.4.

Corollaire 2.6. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ borné et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction presque partout continue et si de plus le bord de $A$ est négligeable, $f$ est intégrable.*

Démonstration. Soit $E$ l'ensemble des discontinuités de $f$ et soit $Q \supset A$ un pavé, $\tilde{f} : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ l'extension par 0 de $f$. La fonction $f|A - E$ est continue, ainsi que la fonction $\tilde{f}|Q - \bar{A}$ (qui est la fonction nulle). Donc $\tilde{f}$ est continue dans $Q - F$ et puisque l'ensemble $F = \partial A \cup E$ est négligeable la fonction $\tilde{f}$ est donc intégrable sur $Q$. Par définition $f$ est intégrable sur $A$. $\square$

## 3. Théorème de Fubini

Pour simplicité on ne regarde que le cas $n = 2$ et on suppose que $f$ est une fonction bornée intégrable sur un rectangle $Q = Q_1 \times Q_2$. On essaye de ramener le calcul d'une intégrale $\int_Q f$ à une intégrale d'une variable. On considère les fonctions :

$$\boxed{\forall y \in Q_2 \;:\; f_y : Q_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_y(x) = f(x,y).}$$

On sait que $f$ est presque partout continue, mais puisque $Q_1 \times \{y\}$ est négligeable, il se peut que $f_y$ soit discontinue partout et donc peut ne pas être intégrable. Par contre les nombres $\underline{\int} f_y$ et $\overline{\int} f_y$ existent toujours. On utilise cela :

Théorème 3.1. (Fubini) *Soit $f : Q = Q_1 \times Q_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et intégrable. Alors les fonctions $\underline{\int} f_y$ et $\overline{\int} f_y$ sont intégrables sur $Q_2$ et :*

$$\boxed{\int_Q f = \int_{Q_2} \left( \underline{\int} f_y \right) = \int_{Q_2} \left( \overline{\int} f_y \right).}$$

Démonstration. On prend une subdivision $P = P_1 \times P_2$ de $Q_1 \times Q_2$ en rectangles $R_{ij} = R_i \times R_j$. Alors

$$\begin{aligned} s(P, f) &= \sum_j \inf_{R_{ij}}(f) \mathrm{vol}(R_i) \mathrm{vol}(R_j) \\ &= \sum_j \left( \sum_i \inf_{R_{ij}}(f) \mathrm{vol}(R_i) \right) \mathrm{vol}(R_j). \end{aligned}$$

Puisque pour $\eta \in R_j$ on a $\inf_{R_{ij}} f \leqslant \inf_{R_i} f_\eta$ on en déduit :

$$\forall \eta \in R_j \Longrightarrow \sum_i \inf_{R_{ij}}(f) \mathrm{vol} R_i \leqslant \sum_i \inf_{R_i}(f_\eta) \mathrm{vol}(R_i) \leqslant \underline{\int} f_\eta.$$

En prenant le inf sur le pavé $R_j$ on a donc :

$$s(P,f) \leqslant \sum_j \left( \inf_{R_j} \underline{\int} f_y \right) |R_j| = s(P_2, \underline{\int} f_y).$$

On trouve de même

$$S(P_2, \overline{\int} f_y) \leqslant S(P,f)$$

donc

$$\begin{aligned} s(P,f) &\leqslant s(P_2, \underline{\int} f_y) \leqslant S(P_2, \underline{\int} f_y) \\ &\leqslant S(P_2, \overline{\int} f_y) \leqslant S(P,f). \end{aligned}$$

Il en suit que

$$\begin{aligned} \underline{\int} f &\leqslant \sup_{P_2} s(P_2, \underline{\int} f_y) \leqslant \inf_{P_2} S(P_2, \underline{\int} f_y) \\ &\leqslant \inf_{P_2} S(P_2, \overline{\int} f_y) \leqslant \overline{\int} f. \end{aligned}$$

Puisque $f$ est intégrable, on a égalité partout et $\underline{\int} f_\eta$ est intégrable. L'argument pour $\overline{\int} f_\eta$ est pareil en utilisant

$$\begin{aligned} s(P,f) &\leqslant s(P_2, \underline{\int} f_\eta) \leqslant s(P_2, \overline{\int} f_\eta) \\ &\leqslant S(P_2, \overline{\int} f_\eta) \leqslant S(P,f). \end{aligned}$$

□

*Remarque.* On peut échanger l'ordre d'intégration en considérant les fonctions $f_x : Q_2 \to \mathbb{R}$, donnée par $f_x(y) = f(x,y)$ et leurs sommes $\underline{\int} f_x, \overline{\int} f_x$. Elles sont intégrables sur $Q_1$ et leurs intégrales valent aussi $\int_Q f$.

EXEMPLE 3.2. Si pour tout sauf un nombre fini de points $y \in Q_2$ l'intégrale $\Phi(y) = \int f(x,y)\,dx$ existe, alors on peut toujours intégrer $\Phi(y)$ et on trouve

$$\int_Q f = \int_{Q_2} \left( \int_{Q_1} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Si $Q_1 = [a,b]$ et $Q_2 = [c,d]$, en utilisant la remarque précédente :

$$\int_Q f = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

## 4. Le cas des fonctions non-bornées sur des ensembles bornés

On reprend la même construction qu'on a donné dans le Chap. 4.1 pour des intervalles bornés :

DÉFINITION 4.1. Soit $Q$ un pavé. Soit $f : Q \to \mathbb{R}$ presque partout continue. Si $f$ est positive, on dit que $f$ est *intégrable* si

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q f \wedge n$$

existe. Si $f$ est de signe quelconque, $f$ est intégrable si $|f|$ est intégrable. Dans ce cas $f_+$ et $f_-$ sont aussi intégrables et on pose :

$$\int_Q f = \int_Q f_+ - \int_Q f_-.$$

Les propriétés de base restent valables dans ce cas avec la même démonstration :

PROPRIÉTÉS 4.2. Soit $Q$ un pavé et $\mathscr{I}(Q)$ la classe des fonctions presque partout continues et intégrables sur $Q$. Alors :

(1) L'intégration

$$\begin{cases} \int & : \quad \mathscr{I}(Q) \to \mathbb{R} \\ & \qquad f \mapsto \int_Q f. \end{cases}$$

est une application linéaire qui respecte l'ordre : si $f \leqslant g$, alors $\int_Q f \leqslant \int_Q g$ ;

(2) Le produit des fonctions intégrables est intégrable si au moins une parmi elles est bornée ;

(3) Si $f$ et $g$ sont intégrables, alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ le sont.

(4) L'intégration est additive : pour $Q = Q_1 \cup Q_2$, subdivision en 2 pavés, les intégrales $\int_{Q_1} f$ et $\int_{Q_2} f$ existent et on a

$$\boxed{\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f.}$$

(5) Soit $f \in \mathscr{I}(Q)$, alors

$$\left| \int_Q f \right| \leqslant \int_Q |f|.$$

On peut étendre cette définition au cas d'un ensemble borné à bord négligeable :

DÉFINITION 4.3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ borné avec un bord négligeable. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ presque partout continue et $Q \supset A$ un pavé. On étend $f$ à $\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ et posant $\tilde{f}(x) = 0$ si $x \in Q - A$. On dit que $f$ est *intégrable sur* $A$ si $\tilde{f}$ l'est (sur $Q$) et on pose

$$\int_A f := \int_Q \tilde{f}.$$

## 5. *Partition de l'unité

DÉFINITION 5.1. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un recouvrement ouvert de $A$. Une *partition de l'unité* subordonnée à $\mathfrak{U}$ est une collection de fonctions $\phi_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$ définies sur un ouvert qui contient $A$ et une fonction $\alpha : \mathbb{Z}_{>0} \to J$ telles que

– $\operatorname{supp}(\phi_k) \subset U_{\alpha(k)}$ est compacte ;
– $\{\operatorname{supp}(\phi_k)\}_{k=1,2,\ldots}$ est une collection localement finie, c.à.d. tout $x \in A$, il y a un voisinage de $x$ qui ne rencontre qu'un nombre fini des supports de $\phi_k$ ;

–

$$\forall x \in A : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) = 1.$$

– $\phi_k$ est presque partout continue.

EXEMPLE 5.2. Soit $J = ]a,b]$ et $A_k = ]a + (b-a)/(k+1), a + (b-a)/k]$, $k = 1, \ldots$. Alors si on pose $U_1 = A_1$, $U_k = A_k \cup \overset{\circ}{A}_{k+1}$, $k \geqslant 2$, on obtient un recouvrement ouvert de $J$ et $\mathbb{1}_{A_k}$ est presque partout continue et donne une partition de l'unité.

PROPOSITION 5.3. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un recouvrement ouvert. Alors il existe une partition de l'unité subordonnée à $\mathfrak{U}$.*

Avant de montrer cette proposition, nous avons besoin de quelques préparations :

LEMME 5.4. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $K \subset U$ compacte. Alors, il y a un compacte $L$ tel que :*
*– $K \subset \overset{\circ}{L}$ ;*
*– $L \subset U$ ;*
*– $\partial L$ est de mesure $0$.*

DÉMONSTRATION. Puisque $U$ est ouvert, pour chaque $x$ il y a une boule ouverte $B(x,r) \subset U$. L'ensemble des boules $B(x, \frac{1}{2}r)$, $x \in K$ recouvrent $K$. Un nombre fini parmi celles là recouvre déjà $K$. On prend pour $L$ la réunion des boules fermées correspondantes. □

COROLLAIRE 5.5. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact et $\mathfrak{U} = \{U_1, \ldots, U_N\}$ un recouvrement ouvert de $K$. Alors il existe $L_i \subset U_i$, $i = 1, \ldots, N$ compacte, $\partial L_i$ de mesure $0$ telle que $\{\overset{\circ}{L}_1, \ldots, \overset{\circ}{L}_N\}$ recouvre $K$.*

DÉMONSTRATION. On montre par récurrence sur $s$ :

$$\begin{cases} \exists L_1, \ldots, L_s \quad \text{telles que :} \\ L_i \subset U_i, \\ \partial L_i \quad \text{a mesure } 0 \\ \{ \overset{\circ}{L}_1, \ldots, \overset{\circ}{L}_s, U_{s+2}, \ldots, U_N \} \quad \text{recouvrent } K. \end{cases}$$

*Le cas* $s = 1$ : On applique le lemme à $K_1 = K - (U_2 \cup \cdots \cup U_N) \subset U_1$. Cela donne un compacte $L_1 \subset U_1$ dont le bord est négligeable et $K_1 \subset \overset{\circ}{L}_1$. Donc $\{ \overset{\circ}{L}_1, U_2, \ldots, U_N \}$ est un recouvrement ouvert de $K$.

$(s) \implies (s+1)$ : On applique le lemme à

$$K_{s+1} = K - ( \overset{\circ}{L}_1 \cup \cdots \cup \overset{\circ}{L}_s \cup U_{s+2} \cup \cdots \cup U_N) \subset U_{s+1}.$$

On trouve $L_{s+1} \subset U_{s+1}$ ayant un bord de mesure 0 et telle que $K_{s+1} \subset \overset{\circ}{L}_{s+1}$. Par hypothèse de récurrence, $\{ \overset{\circ}{L}_1, \ldots, \overset{\circ}{L}_s, U_{s+2}, \ldots, U_N \}$ est un recouvrement de $K$. Remplaçant $U_{s+2}$ par $K_{s+1}$, cela reste vrai par construction de $K_{s+1}$. Puisque $K_{s+1} \subset \overset{\circ}{L}_{s+1}$ on peut ensuite remplacer $K_{s+1}$ par $\overset{\circ}{L}_{s+1}$. □

Maintenant on peut donner la

*Démonstration de Prop. 5.3* :

*Première Étape : le cas $A$ compacte.* On peut supposer que $J = \{1, \ldots, N\}$, un ensemble fini et on applique la Corollaire précédente. La fonction $\mathbb{1}_{\overset{\circ}{L}_i}$ est continue hors de $\partial L_i$, un ensemble de mesure 0 et son support, $L_i$ est compacte. On définit :

$$\varphi_k = \frac{\mathbb{1}_{\overset{\circ}{L}_i}}{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\overset{\circ}{L}_i}}.$$

*Deuxième Étape : le cas général.*

En remplaçant $A$ par la réunion des ouverts $U_\alpha$ on peut supposer que $A$ est *ouvert*. Pour $k = 1, 2, \ldots$ on introduit des compactes :

$$L_k = \left\{ x \in A \mid \|x\| \leqslant k, \quad d(x, \partial A) \geqslant \frac{1}{k} \right\}.$$

Alors :

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k, \quad \overset{\circ}{L}_k \subset L_{k+1} \quad \text{et } \partial L_k \text{ négligeable.}$$

Donc $A$ est réunion des compactes $L_k - \overset{\circ}{L}_{k-1}$. Le recouvrement $\mathfrak{U}$ induit un recouvrement $\mathfrak{U}_k$ de l'ensemble ouvert $\overset{\circ}{L}_{k+1} - L_{k-2} \supset L_k - \overset{\circ}{L}_{k-1}$ et on peut appliquer la première étape à ce recouvrement. Cela donne une partition de l'unité

$$\{ f_1^{(k)}, \ldots, f_{n_k}^{(k)} \}.$$

Puisque $\operatorname{supp}(f_i^k) \subset L_{k+1} - \overset{\circ}{L}_{k-2}$, dans la double somme

$$f(x) = \sum_{\ell, j} f_j^{(\ell)}(x), \quad x \in L_k$$

seul les fonctions $f_j^{(\ell)}$ avec $\ell \leqslant k + 2$ peuvent figurer et donc cette somme est toujours une somme finie. Aussi, $f$ est continue hors d'un ensemble de mesure 0. On prend :

$$\varphi_{\ell, j}(x) = \frac{f_j^{(\ell)}(x)}{f(x)},$$

un ensemble dénombrable de fonctions.

## 6. *Fonctions sur des domaines quelconques

DÉFINITION 6.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un *ouvert*. On suppose que $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction partout localement intégrable, i.e. pour tout $x \in U$, il y a un sous-ensemble $U_x \ni x$ borné, contenu dans $U$, ayant un bord négligeable et telle que $f|U_x$ soit intégrable. Soit $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ une partition de l'unité par rapport à $\{\overset{\circ}{U}_x\}_{x\in U}$. Si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_U \varphi_k \cdot |f| < \infty$$

on dit que $f$ est *intégrable* et on pose

$$\boxed{\int_U f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \varphi_k \cdot f.}$$

Cette définition ne dépend ni de la partition de l'unité ni du recouvrement par rapport auquel on fait la partition. En fait, soit $\{\psi_j\}$, $j = 1, \ldots$ une partition de l'unité subordonnée à $\{V_x\}_{x\in U}$ un recouvrement de $U$, ayant les mêmes propriétés que dans la définition précédente. On considère d'abord la fonction $f_k = \varphi_k \cdot f$, une fonction avec support compacte $K$. Donc $K \supset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$. Puisque les supports $\mathrm{supp}(\psi_j)$ forment une famille localement finie, chaque $U_{x_k}$ ne rencontre qu'un nombre fini parmi ces supports. Donc la somme

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)\,(\varphi_k(x)\, f(x))$$

est finie. D'autre part $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) f(x) = f(x)$ et donc

$$\int_U \varphi_k \cdot f = \int_U \varphi_k \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \cdot f = \sum_j \int_U (\psi_j \cdot \varphi_k) \cdot f.$$

Puis, on prend la somme sur $k$ de l'expression de droite. On sait que cette série est absolument convergente (par définition) et donc aussi la somme

$$\sum_k \sum_j \int_U (\psi_j \cdot \varphi_k) \cdot f$$

est absolument convergente. Utilisant le Corollaire 3.3 on voit qu'on peut échanger l'ordre de la sommation, ce qui donne :

$$\sum_k \sum_j \int_U (\psi_j \cdot \varphi_k) \cdot f = \sum_j \int_U \psi_j \cdot \left( \sum_k \varphi_k \cdot f \right) = \sum_j \int_U \psi_j \cdot f.$$

*Remarque.* |

– Cette définition est comparable à la définition donnée en Chap. IV.3 pour $U = J$ un intervalle quelconque. En fait, on utilise la partition de 1 donnée en exemple 5.2 ou une variante.

## Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont ils vrais ou faut-il rajouter des hypothèses ? :

(1) Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une boule, alors $\partial B$ est de mesure 0.

(2) Soit $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ rectangle et $f : R \to \mathbb{R}$ bornée et presque partout continue. Alors pour presque tout $x \in [a,b]$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable et son intégrale $I(x)$ est intégrable sur $[a,b]$. Indication : regarder l'exercice 1

(3) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ borné et $f : U \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Alors $f$ est intégrable.

(4) La fonction caractéristique d'un ouvert borné $U \subset \mathbb{R}^n$ avec bord de mesure zéro est intégrable.

(5) Soit $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ un rectangle et $f : R \to \mathbb{R}$ presque partout continue. On suppose que les fonctions $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont intégrables, ainsi que leurs intégrales $y \mapsto \int_0^1 f(x,y)dx$ et $x \mapsto \int_0^1 f(x,y)dy$. Alors $f$ est intégrable. Indication : regarder l'exercice 7.

Réponses ici.

## Problèmes

(1) Soit $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1 - 1/q & \text{si } x = p/q,\ (p,q) = 1,\ y \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Montrer que $f$ est intégrable et montrer que $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 1$.

b) Discuter la valeur de $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ suivant les valeurs de $x$ et montrer que $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right.$
n'existe pas. Réponse ici.

(2) Soit $f : Q = [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\int_Q f = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Réponse ici.

(3) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable et $f \geqslant 0$. On définit

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}.$$

Montrer que le bord de $D_f$ a mesure 0 et l'aire de $D_f$ est égal à $\int_a^b f$. Réponse ici.

(4) Justifier l'existence de

$$\mathbb{I} = \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\sin^2 y}{y} dy.$$

Soit $a$ un réel positif et $K = [0,1] \times [0,a] \subset \mathbb{R}^2$. En considérant

$$\int_K e^{-y} \sin(2xy)\, dx dy,$$

calculer $\mathbb{I}$. Réponse ici.

(5) Soit $K$ le compact de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$x^2 + y^2 \geqslant 1, \quad x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0.$$

Représenter $K$ ; calculer son aire. Réponse ici.

(6) Soit

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

et soit

$$D_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant r^2.\}$$

a) Esquisser $D_r$ et montrer que $f$ est intégrable sur $D_r$.

b) Calculer $\int_{D_r} f\,dx dy$.

c) Montrer que $f$ n'est pas intégrable sur le quadrant $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$.

Réponse ici.

(7) On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant :

$$f(u,v) = \begin{cases} 2(u-v)/(u+v)^3 & u,v>0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(u,v)\,du\right) dv$.

b) Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(u,v)\,dv\right) du$.

c) Soit $n \geqslant 2$ entier. On regarde la région

$$R_n = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < v < u/2,\ 0 < u \leqslant 1/n\right\}.$$

Esquisser cette région. Trouver $C > 0$ telle que l'inégalité $f(u,v) \geqslant Cn^2$ est valable sur $R_n$. En déduire que $f$ n'est pas intégrable sur le rectangle $[0,1] \times [0,1]$. Réponse ici.

(8) Soit $a > 0$. Montrer que $a \int_a^\infty \frac{\cos(u)}{u^2} du$ tend vers 0 lorsque $a$ tend vers l'infini. En déduire la valeur de

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \left( \lim_{y\to\infty} \int_x^y \frac{\sin u}{u} du \right) dx.$$

Réponse ici.

CHAPITRE 7

# Séries de Fourier

## 1. Fonctions périodiques

Dans ce chapitre on considère des fonctions *complexes* définies sur $\mathbb{R}$. Une telle fonction $f$ est une *fonction périodique* de période $T$ si

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x+T) = f(x).$$

On peut normaliser la période à $2\pi$ en remplaçant la variable $x$ par $2\pi x/T$. Des exemples de telles fonctions (avec période $2\pi$) :

Définition 1.1. Une *série trigonométrique* est une série de la forme

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots ,$$

où les $a_i$, $b_i$ sont des constantes complexes et $x$ est une variable réelle.

Puisque

$$\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$$

$$\sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}),$$

les termes $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ s'écrivent $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$, où les $c_n \in \mathbb{C}$. On obtient donc des séries de la forme :

$$c_0 + (c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}) + \cdots (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) + \cdots \tag{20}$$

Un tel polynôme est réel si et seulement si pour tout $n$ on a $c_{-n} = \bar{c}_n$.

Les sommes partielles $s_n := \sum_{m=-n}^{n} c_m e^{imx}$ sont des *polynômes trigonométriques* (complexes). Utilisant les relations :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \tag{21}$$

on retrouve les coefficients de $s_n = f$ :

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx. \tag{22}$$

Cela motive la définition suivante :

DÉFINITION 1.2. Soit $f : \mathbb{R} \to C$ périodique de période $2\pi$. On suppose que $f$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ (c.à.d $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur $[-\pi, \pi]$). Les *coefficients $c_m(f)$ de Fourier* de $f$ sont données par (22) et la série trigonométrique correspondante (convergente ou pas) est appelée sa *série de Fourier*, qu'on note :

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imx}, \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

Les *sommes partielles* sont :

$$\begin{aligned} s_n(x) = \sum_{m=-n}^{n} c_m e^{imx} &= \sum_{-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-imt} dt \right) e^{imx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{m=-n}^{n} e^{im(x-t)} dt \end{aligned}$$

On a donc

(23) $$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt,$$

où

(24) $$\begin{aligned} D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} &= \frac{e^{(n+1)ix} - e^{-nix}}{e^{ix} - 1} \\ = \frac{e^{(n+\frac{1}{2})ix} - e^{-(n+\frac{1}{2})ix}}{e^{\frac{1}{2}ix} - e^{-\frac{1}{2}ix}} &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

On a aussi besoin de son intégrale totale :

(25) $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1.$$

Pour le montrer on utilise (21).

Les questions de base dans la théorie sont : la série de Fourier est-elle convergente et si oui, sa somme est-elle égale à $f$ ?

Les fonctions périodiques, bornées et intégrables sur chaque intervalle borné forment un espace vectoriel :

$$L = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ périodique de période } 2\pi, \text{ bornée et intégrable sur } [-\pi, \pi] \}$$

muni d'un produit hermitien :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g}.$$

Il faut noter que $\| f \| = \langle f, f \rangle = 0$ n'implique pas que $f = 0$, mais seulement que $f = 0$ presque partout ; donc $L$ n'est pas un vrai espace hermitien et $\| f \|$ n'est pas une vraie norme, mais l'inégalité du triangle ainsi que Pythagore reste vrai dans $L$ muni de ce produit.

La formule (21) montre que les fonctions

$$\varphi_n(x) := e^{inx}$$

définissent un système orthonormé dans $L$, c.à.d $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$. Les sommes partielles $s_n$ se trouvent dans l'espace $L_n$ de base $\varphi_j$, $j = -n, \dots, n$. En effet, si $p_n : L \to L$ est la projection orthogonale de $L$ vers $L_n$ on a :

$$p_n(f) = \sum_{m=-n}^{n} \langle f, \varphi_m \rangle \varphi_m = s_n(f).$$

La distance de $f$ à $L_n$ est égal à $d(f, p_n f)$. Alors par le théorème de Pythagore on a :

$$\| p_n(f) \|^2 = \sum_{m=-n}^{n} |c_m|^2 \leqslant \| f \|^2.$$

Cela montre :

PROPOSITION 1.3. Inégalité de Bessel *Soit $f \in L$ et soient $c_k$, $k \in \mathbb{Z}$ ses coefficients de Fourier, alors* $|c_0|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_1|^2 + |c_{-2}|^2 + |c_2|^2 + \cdots$ *converge et*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| \leqslant \|f\|.$$

*En particulier* $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$*, c.à.d.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

On utilisera cela dans la démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME 1.4. (Théorème de Localisation) *Soit $f \in L$, $f$ réelle et* $0 < \delta < \pi$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \left[ \int_{-\pi}^{-\delta} f(x-t)D_n(t) + \int_{\delta}^{\pi} f(x-t)D_n(t) \right] = 0.$$

*Donc, si la série de Fourier converge au point $x$, utilisant 23, on a :*

$$\boxed{\forall \delta \in ]0,\pi[ :\ \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\delta} f(x-t)D_n(t)\,dt.}$$

*Réciproquement, si la limite de droite existe, la série de Fourier de $f$ converge au point $x$ vers cette limite.*

DÉMONSTRATION. On fixe $x \in [-\pi,\pi]$ et on définit :

$$g(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } |t| < \delta \\ \dfrac{f(x-t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} & \text{si } \delta \leqslant |t| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Par (24) on trouve que l'intégrale de $f(x-t)D_n(t)$ sur $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ est égale à :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t/2)\sin(nt)\,dt\\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(t/2)\cos(nt)\,dt.\end{aligned}$$

On remarque que ces deux dernières intégrales donnent des coefficients de Fourier des fonctions intégrables $g(t)\cos(\frac{1}{2}t)$ et $g(t)\sin(\frac{1}{2}t)$ et donc convergent vers zéro par la remarque juste avant ce théorème. $\square$

Corollaire 1.5. *Si $f$ satisfait une condition de Lipschitz en $x$ (par exemple si $f$ est différentiable en $x$), alors la série de Fourier de $f$ converge au point $x$ vers $f(x)$.*

Démonstration. Par hypothèse pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit il existe $M > 0$ tel que :

$$|t| < \delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x-t)-f(x)| \leqslant M|t|.$$

Alors

$$\begin{aligned}|D_n(t)f(x-t)-f(x)| &\leqslant |D_n(t)\cdot t|\cdot\left|\frac{f(x-t)-f(x)}{t}\right|\\ &\leqslant \max_{|t|\leqslant\delta}|D_n(t)\cdot t|\cdot M \leqslant \tilde{M},\end{aligned}$$

avec $\tilde{M}$ un constante qui ne dépend pas de $n$, car $\lim_{t\to 0}\sin t/t = 1$ implique que

$$D_n(t)t = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\cdot t}{\sin(\frac{1}{2}t)}$$

reste bornée lorsque $t$ tend vers zéro (indépendant de $n$). En utilisant (25) on en déduit :

$$\begin{aligned} 2\pi \left|s_n(x) - f(x)\right| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)(f(x-t) - f(x))\,dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_{-\delta}^{\delta} D_n(t)(f(x-t) - f(x))\,dt\right| + R_n \\ &\leqslant 2\tilde{M}\delta + R_n, \end{aligned}$$

où $R_n$ tend vers 0 par le théorème de localisation. Donc

$$\limsup_{n\to\infty} \left|s_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\tilde{M}\delta.$$

Ensuite on laisse $\delta$ tendre vers 0. □

*Remarque.* Avec ce qu'on a développé jusqu'à maintenant on peut montrer :

- Deux fonctions continues avec même série de Fourier sont égales : voir l'exercice 4.f)).
- Une fonction continue $f \in L$ telle que $(f, e^{imx}) = 0$ pour tout $m$ est nulle : voir l'exercice 4.g).
- ([**Rudin**, Theorem 8.16]) Si $f, g \in L$ sont continues et

$$f(x) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imx},$$

$$g(x) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}} c'_m e^{imx},$$

  alors

$$(f, g) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \overline{c'_m}.$$

Voir [**Rudin**, Theorem 8.15, Cor. 2]. Cela reste vrai pour tout couple de fonctions dans $L$ (*Théorème de Parceval*). La preuve utilise la théorie d'intégration de Lebesgue ([**Rudin**, Theorem 10.40]).

## 2. Théorème de Dirichlet

Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ par morceaux sur un intervalle fermé $J$. Les discontinuités de $f$ sont de la première espèce et donc

$$f^+(x) = \lim_{t \downarrow x} f(t), \qquad f^-(x) = \lim_{t \uparrow x} f(t)$$

existent. Le saut en $x$ est la différence et $f$ est continue en $x$ si le saut est nul.

Le but est de montrer :

THÉORÈME 2.1. (Dirichlet) *Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier converge au chaque point $x \in [-\pi, \pi]$ vers*

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{2}\left(f^+(x) + f^-(x)\right).$$

DÉMONSTRATION. Les sommes partielles sont données par

$$s_n(x) = \sum_{m=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-imt}\right) e^{inx}.$$

En remplaçant $t \mapsto f(t)$ par $t \mapsto f(t) - \tilde{f}(x)$ peut supposer que $\tilde{f}(x) = 0$. Ensuite, en remplaçant $t$ par $t - x$ on peut supposer que $x = 0$. Si $f$ est une fonction impaire $s_n = 0$ et aussi $f(0) = 0$ et donc l'assertion est trivialement vraie. On peut donc supposer que $f$ est paire et dans ce cas $f$ est continue au point 0. La somme partielle est donc égale à :

$$s_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,dt.$$

Remarquons que la fonction $h(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ se prolonge de façon continue à droite (resp. à gauche) en 0 en posant $g(0+) = f'(0+)$ (resp. $g(0-) = f'(0-)$, car $f$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en 0 et donc

$$\lim_{t\downarrow 0} h(t) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{f(t)}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0+)$$

(resp. $\lim_{t\uparrow 0} h(t) = f'(0-)$. Il en suit que $h(t)$ est intégrable sur $]-\pi,\pi]$ et donc aussi la fonction

$$f(t)\frac{1}{\tan\frac{1}{2}t} = h(t)\cdot\frac{t}{\tan\frac{1}{2}t}.$$

La fonction $f(t)D_n(t)$ s'écrit comme

$$f(t)D_n(t) = f(t)\frac{1}{\tan\frac{1}{2}t}\sin(nt) + f(t)\cos(nt)$$

et donc $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,dt$ donne la somme de la partie imaginaire de la $n$-ième coefficient de Fourier de $-f(t)\dfrac{1}{\tan\frac{1}{2}t}$ et la partie réelle de la $n$-ième coefficient de Fourier de $f(t)$. Par la Prop. 1.3, si $n$ tend vers $+\infty$ ces coefficients tendent vers zéro.

$\square$

## 3. *Le phénomène de Gibbs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique, $C^1$ par morceaux telle que

$$f_+(0) = -f_-(0) =: c.$$

Alors, si on pose $f(0) = 0$, par le thm. 2.1 les sommes partielles $s_n(x)$ convergent vers $f(x)$ au voisinage de 0 mais pas uniformément. Il existe une constante $G$ telle que les valeurs de $s_n(x)$ s'accummulent dans l'intervalle $[0, cG]$ lorsque $x \downarrow 0$. Puisque $s_n(-x) = -s_n(x)$, les valeurs de $s_n(x)$ s'accummulent alors aussi dans l'intervalle $[-cG, 0]$ lorsque $x \uparrow 0$. C'est le *phénomène de Gibbs* illustré par la figure ci-dessous.

Pour l'expliquer, on commence avec l'étude de la fonction

$$\varphi_0(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\right), \quad 0 < x < 2\pi \tag{26}$$

prolongée de façon périodique. On trouve pour sa somme de Fourier partielle

$$s_n(\varphi_0)(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}.$$

Lemme 3.1. *On a :*

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right] = 0$$

Démonstration. On utilise $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \cdots$ pour en déduire que

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{6}t + \cdots$$

et donc

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{6}t + \cdots$$

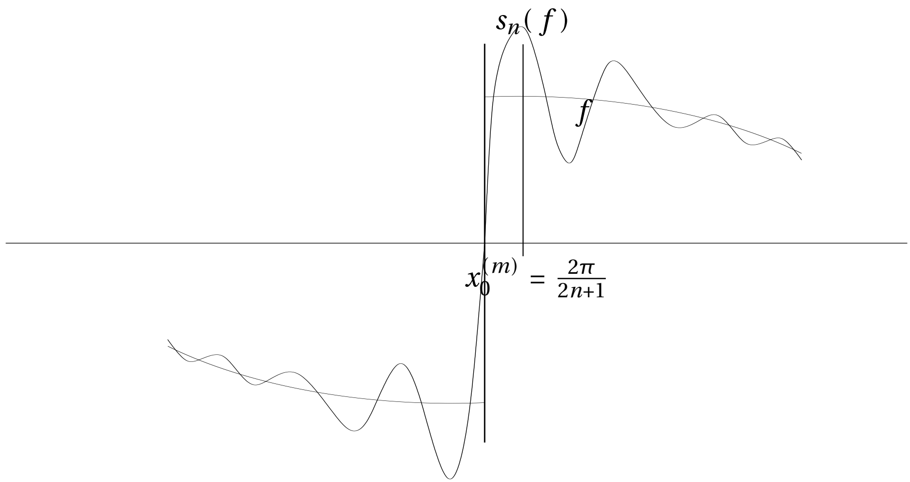


FIGURE 1. Le phénomène de Gibbs

converge vers 0 quand $t \to 0$. □

LEMME 3.2. *Il existe* $\delta > 0$ *(indépendant de x) et une fonction continue* $\eta_n$ *telle que :*

$$|x| < \delta \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t} dt + \eta_n(x), \quad \textit{avec} \, |\eta_n(x)| \leqslant |x|.$$

DÉMONSTRATION. Utilisant

$$2 \sum_{1}^{n} \cos kt = D_n(t) - 1 = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2} t} - 1$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} &= \int_0^x \left( \sum_1^n \cos kt \right) dt \\
&= \int_0^x \left( \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t} dt + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \int_0^x \left( \frac{1}{\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t/2} \right) \sin\left( (n+\frac{1}{2})t \right) \, dt \right] - \frac{1}{2}x.
\end{aligned}$$

Pour la première intégrale on fait un changement de variable : $u = (n+\frac{1}{2})t$ et on trouve

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t} dt.$$

La différence $\eta_n(x)$ est continue en $x$, somme de la deuxième intégrale et $-\frac{1}{2}x$. On utilise le Lemme 3.1 pour trouver $\delta > 0$ telle que $\left| \frac{1}{\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t/2} \right| < 1$ pour $|x| < 2\delta$ ; la deuxième intégrale est donc majorée par $\frac{1}{2}|x|$ et on trouve $|\eta_n(x)| \leqslant |x|$. $\square$

Motivé par ce lemme, utilisant $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, on pose

$$\boxed{F_n(x) := \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t} dt}$$

de sorte que $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1$. On a donc :

$$s_n(\varphi_0)(x) = F_n(x) + \frac{2}{\pi}\eta_n, \quad \text{avec } \left|\eta_n(x)\right| \leqslant |x|. \tag{27}$$

Soit

$$x_k^{(n)} := \frac{2}{2n+1}(k+1)\pi.$$

Puisque

$$F_n'(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{(n+\frac{1}{2})x},$$

la fonction $F_n$ a des minima locaux $G_{2k+1}$ aux points $x_{(2k+1)}^{(n)}$ :

$$G_{2k+1} := F_n(x_{(2k+1)}^{(n)}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt, \quad k = 0, 1, \ldots$$

et des maxima locaux $G_{2k}$ aux points $x_{2k}^{(n)}$ :

$$G_{2k} := F_n(x_{2k}^{(n)}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2k\pi} \frac{\sin t}{t} dt, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

La différence $G_{k+1} - G_{k-1} = \displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ étant $< 0$ pour $k$ paire et $> 0$ pour $k$ impaire, on a :

$$G_0 > G_2 > G_4 > \cdots > 1$$
$$G_1 < G_3 < G_5 < \cdots < 1.$$

On pose :

$$\boxed{G := G_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = 1,179\ldots.}$$

Les valeurs des extrêmes de $F_n(x)$ ne dépendent pas de $n$. En particulier on a a $F_n(x_0^{(n)}) = G$. En même temps on a $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0$. Donc, si $n \to +\infty$ et $x \downarrow 0$ les valeurs de la fonction continue $F_n(x)$ s'accummulent dans l'intervalle $[-G, G]$. C'est le fait crucial pour comprendre :

Proposition 3.3. (Le phénomène de Gibbs) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique, $C^1$ par morceaux telle que*

$$f_+(0) = -f_-(0) =: c.$$

*Alors pour tout $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ telles que :*

$$s_n(f)(x) - f(x) = c(F_n(x) - 1) + \alpha_n(x),$$

*où*

$$\forall n \geqslant N,\ \forall x \in ]0, \delta[ : \quad \left|\alpha_n(x)\right| \leqslant \epsilon.$$

*En particulier, lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et $x$ tend vers $0$, les valeurs $s_n(f)(x)$ des sommes partielles de la série de Fourier de $f$ s'accumulent dans l'intervalle $[-cG, cG]$.*

Démonstration. Il suffit de montrer la première assertion.

Rappelons qu'on a introduit la fonction $\varphi_0$ (voir 26). On peut écrire

$$f(x) = c\varphi_0(x) + g(x)$$

avec $g$ continue en 0 et $g(0) = 0$. Utilisant 27 on obtient :

$$s_n(f)(x) = cF_n(x) + \frac{2c}{\pi}\eta_n(x) + s_n(g)(x)$$

et donc :

$$\begin{aligned} s_n(f) - f(x) = c(F_n(x) - 1) &+ (c - f(x)) + \\ &+ \frac{2c}{\pi}\eta_n(x) + s_n(g)(x), \end{aligned}$$

La fonction

$$\alpha_n(x) = c - f(x) + \frac{2c}{\pi}\eta_n(x) + s_n(g)(x).$$

devient ainsi petit que l'on veut, d'après le Lemme 3.2 et la convergence de $s_n(g)$ en zéro vers 0. $\square$

## Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ? :

(1) Soit $f \in L$, c.à.d. $f$ est une fonction $2\pi$-périodique, bornée et intégrable. Alors sa $n$-ième coefficient de Fourier est

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(t)e^{-int}\,dt, \quad (b-a) = 2\pi.$$

(2) Dans l'espace $L$ les fonctions $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ forment un système orthogonale, même orthonormé.

(3) La série de Fourier d'une fonction dérivable et périodique $f$ converge vers $f$.

(4) Même énoncé pour une fonction périodique de classe $C^1$ par morceaux.

(5) Les sommes de Fourier partielles d'une fonction périodique continue sont continues.

(6) Même énoncé pour une fonction $2\pi$-périodique et bornée, intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

(7) Soit $f$ $2\pi$-périodique et paire. Alors les sommes de Fourier partielles sont des combinaisons linéaires de $\cos kt$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Que peut-on dire sur les fonctions impaires ?

Réponses ici.

## Exercices

(1) Montrer que pour $f$ réelle et périodique de période $2\pi$ ces coefficients de Fourier satisfont $c_{-n} = \bar{c}_n$. Réponse ici.

(2) Soit $f$ une fonction périodique de période $2\pi$ et soient $s_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$ ses somme partielles. La *somme de Féjer* est définie par

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}.$$

a) Soit

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} D_m(t),$$

montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1$.

b) Montrer

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t)\,dt.$$

c) Monter que

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1 - \cos(n+1)t}{1 - \cos t}.$$

d) En déduire que $K_n(t) \geqslant 0$ et que

$$K_n(t) \leqslant \frac{2}{(n+1)(1 - \cos\delta)}, \quad 0 < \delta \leqslant |t| \leqslant \pi.$$

e) Montrer que $|f| \leqslant M$ implique $|\sigma_n(t)| \leqslant M$. Réponse ici.

(3) On rappelle que pour une suite $c_0, c_1, \ldots,$ ayant les sommes partielles $s_0, s_1, \ldots,$ leur somme en moyenne arithmétique est donnée par

$$\sigma_n = \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1}.$$

a) On suppose qu'on se donne $c_n \in \mathbb{C}$ telles que

$$|nc_n| \leqslant M, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Montrer $s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}(c_1 + 2c_2 + \cdots + nc_n)$ et ensuite que

$$|s_n - \sigma_n| \leqslant M.$$

b) On suppose que $f$ est de classe $C^1$. Montrer que les sommes partielles $s_n(x)$ sont uniformément bornées. Indication : on utilisera l'exercice 6 du Chap. II :

$$n|c_n(f)| \leqslant V(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|.$$

Ensuite, on fixe $t \in [-\pi, \pi]$ et on pose $c_n = c_n(f)e^{\pi it} + c_{-n}(f)e^{-\pi it}$ et on applique le résultat qu'on vient de montrer et l'exercice précédente. Réponse ici.

(4) Le but est de montrer que pour $f$ continue et périodique de période $2\pi$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$$

et d'en tirer des conséquences. Soit $\epsilon > 0$.

a) Montrer qu'il y a $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ si $|x - y| < \delta$.

b) Montrer que

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,dt < \epsilon/2 \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \epsilon\pi.$$

c) Soit $M = \max_{\mathbb{R}} |f|$. Utiliser l'exercice 2 (d) pour trouver $N$ telle que

$$\delta \leqslant |x| \leqslant \pi\,,\, n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad K_n(t) \leqslant \frac{\epsilon}{4M}.$$

d) Utiliser le résultat précédent pour estimer l'intégrale de $|f(x-t) - f(x)| K_n(t)$ prise sur les intervalles $[-\pi, -\delta]$ et $[\delta, \pi]$.

e) Conclure que $|\sigma_n(f) - f(x)| = \dfrac{1}{p\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,dt < \epsilon$ si $n \geqslant N$.

f) Montrer que si deux fonction continues ont même séries de Fourier, alors les fonctions sont identiques.

g) Montrer que si toutes les coefficients de Fourier d'une fonction continue $f$ sont zéro, alors $f = 0$. Réponse ici.

(5) a) Montrer qu'il y a une constante $M$ telle que :

$$\left| \sum_{m=1}^{n} \frac{\sin mt}{m} \right| < M.$$

Indication : appliquer l'exercice, 3(b) à la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \pi - t & t \in [0, \pi] \\ -\pi - t & t \in [-\pi, 0[ \end{cases}$$

b) Même question pour $\left| \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos mt}{m} \right|$. Réponse ici.

Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* s'il y a une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que la restriction de $f$ sur les intervalles ouverts $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \ldots, n$ soit continue et soit prolongeable à une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_{k-1}, x_k]$. : on subdivise $J$ en sous-intervalles $J_j$, $j = 1, \ldots, N$ telles que $f\big|J_j$ soit continue et l'on utilise l'additivité : $\int_J f = \sum_{i=1}^N \int_{J_i} f$. Retour au cours

Pour 1) on utilise que si $c < x < d$, et $\inf_{[c,d} f(x) = m$, $\inf_{[c,x]} = m_1$ et $\inf_{[x,d]} = m_2$, on a $m \leqslant m_1$ et $m \leqslant m_2$ et donc $m \cdot (d-c) \leqslant m_1 \cdot (d-x) + m_1 \cdot (x-c)$ : si on rajoute un point à une subdivision $P$ la somme $s(P, f)$ va augmenter. Par contre. $S(P, f)$ va diminuer.

Le 2) est clair.

Pour 3) on utilise que deux subdivisions $P_1$ et $P_2$ ont un raffinement commun, disons $P$ ; on aura

$$\begin{aligned} s(P_1, f) \leqslant s(P, f) &\leqslant S(P, f) \leqslant S(P_2, f) \\ s(P_2, f) \leqslant s(P, f) &\leqslant S(P, f) \leqslant S(P_1, f) \end{aligned}$$

et donc pour tout subdivision $P$ on a $s(P, f) \leqslant inf_P S(P, f)$ ce qui entraîne qu'on a $\sup_P s(P, f) \leqslant inf_P S(P, f)$.

Retour au cours

On a $s(P, f) = 0$ tandis que $S(P, f) = 1$. Retour au cours

On utilise que pour calculer $\sup_P S(P, f)$ et $\inf_P s(P, f)$ on peut utiliser des subvisions qui contiennent un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_M \in J$.

Retour au cours

Si $|h| \leqslant M$, on a

$$\begin{aligned} \left|h^2(x) - h^2(y)\right| &= \left|h(x) + h(y)\right| \cdot \left|h(x) - h(y)\right| \\ &\leqslant 2M\left|h(x) - h(y)\right| \end{aligned}$$

et donc pour tout sous-intervalle $J' \subset J$ on a :

$$\sup_{J'} h^2 - \inf_{J'} h^2 \leqslant 2M(\sup_{J'} h - \inf_{J'} h).$$

Retour au cours

Soit $F$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il y a $\xi \in ]a, b[$ telle que

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

Retour au cours

Un intervalle ouvert $U$ n'est pas négligéable car chaque recouvrement de $U$ par d'intervalles $I_1, I_2, \ldots$ a une somme de longueurs au moins égal à la longueur de $U$ qui est positif. Retour au

cours

Les intervalles $]e_n - \frac{1}{2^{n+1}}\epsilon, e_n + \frac{1}{2^{n+1}}\epsilon[$ de longueur $\frac{1}{2^n}\epsilon$ recouvrent $E$ et la somme de leurs longueurs est $\epsilon$.

Retour au cours

Même argument que pour l'ensemble $E$ : Si une réunion d'intervalles $I_{n,m},\ m = 1, 2, \ldots$ de longueur totale $\frac{1}{2^n}\epsilon$ recouvre $E_n$ les intervalles $I_{n,m}\ n, m = 1, 2, \ldots$ recouvrent $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ et la somme de leurs longueurs est $\epsilon$. Retour au cours

Soit $f$ une fonction monotone sur $J = [a, b]$ et $c \in J$ un point intérieur. Alors $f(c_+) := \lim_{x \downarrow c} f(x)$ et $f(c_-) := \lim_{x \uparrow c} f(x)$ existent. Supposons que $f$ est croissante. Si $f$ n'est pas continue en $c$, on peut choisir un point rationnel $r(c)$ dans l'intervalle $]f(c_-), f(c_+)[$. De cette façon on établie une injection de l'ensemble des singularités de $f$ dans un sous-ensemble des points rationnels de l'intervalle $[f(a), f(b)]$, un ensemble dénombrable.

Retour au cours

Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est $C^r$ *par morceaux* s'il y a une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que la restriction de $f$ sur les intervalles ouverts $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \ldots, n$ soit $C^r$ et soit prolongeable à une fonction $C^r$ sur l'intervalle fermé $[x_{k-1}, x_k]$.

Retour au cours

DÉMONSTRATION. Soit $F$ une primitive de $f$. Alors $F(b) - F(a) = F(x(d)) - F(x(c)) = \int_{x(c)}^{x(d)} f(x)\,dx$. De la règle de dérivation des fonctions composées on trouve :

$$(F \circ x)' = (f \circ x) \cdot x'$$

et donc $F(x(d)) - F(x(c)) = \int_c^d (f \circ x) \cdot x' \, dt$. $\square$

Retour au cours

Soit $\epsilon > 0$. On choisit $P$ telle que $\int_J h - s(P,h) < \epsilon/3$ et $S(P,g) - \int_J g < \epsilon/3$. Alors

$$s(P,g) \leqslant s(P,f) \leqslant S(P,f) \leqslant S(P,h)$$

entraîne que

$$S(P,f) - s(P,f) \leqslant S(P,h) - s(P,g) \leqslant (S(P,h) - \int_J h) + (\int_J h - \int_J g) + (\int_J g - s(P,g)) < \epsilon.$$

Retour au cours

Si $g$ est intégrable $g \geqslant 0$ et $\int g = 0$, alors $g = 0$ et les deux cotês de l'égalité à montrer s'annulent.

Retour au cours

Soit $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ une suite de réels. On dit que *la série* $\sum a_n$ *converge vers* $a$ si la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ converge vers $a$.

Retour au cours

**Démonstration* : En remplaçant $f_n$ par $(f_n - f)$ on peut se ramener au cas où $f = 0$. On peut de plus supposer que $f_n \geqslant 0$. On pose alors

$$g_n := \sup_{p>n} f_p, \qquad n = 0, 1, \dots .$$

Cette suite $\{g_n\}$ est évidemment une suite décroissante de fonctions qui converge vers 0 presque partout, ce qui permettrait d'utiliser le Thm. 2.2, mais l'intégrabilité des $g_n$ n'est pas assurée. L'idée est de remplacer $g_n$ par des fonctions $h_n$ proche de $f_n$ (en un sens à préciser) qui soient *intégrables* et pour lesquelles on puisse utiliser ce théorème. On a besoin d'un outil crucial :

Lemme 3.4. *Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction positive bornée et $\epsilon > 0$. Alors il existe $h$, une fonction bornée positive* intégrable*, $h \leqslant g$ et pour tout $f : J \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $f \leqslant g$, on ait*

$$\int f \wedge h > \int f - \epsilon. \tag{28}$$

** Preuve du lemme* : On pose

$$s = \sup_{\substack{k \text{ intégrable} \\ k \leqslant g}} \int_J k$$

et notons $h$ une fonction intégrable telle que $\int_J h > s - \epsilon$. Si Si $f$ est intégrable, on a évidemment

$$\int f = \int f \wedge h + \int (f - h)_+. \tag{29}$$

D'autre part, si de plus $f \leqslant g$, on a $h + (f - h)_+ = \sup(f, g) \leqslant g$ et donc $\int (f - h)_+ + \int h \leqslant s$ par la définition de $s$. Autrement dit, on a

$$\int (f - h)_+ \leqslant s - \int h < \epsilon,$$

soit, en reportant dans 29

$$\int f \wedge h > \int f - \epsilon.$$

*Démonstration du théorème* :
*Première Étape :* Soit $\epsilon > 0$ ; on va construire une suite $\{h_n\}$ décroissante de fonctions positives et intégrables telles que

(1) $h_n \leqslant g_n$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f \leqslant g_n$ est une fonction intégrable

$$\int f \wedge h_n > \int f - \epsilon.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le lemme précédent fournit une fonction $\tilde{h}_n \leqslant g_n$ telle que, pour tout $f$ intégrable avec $f \leqslant g_n$ on ait

$$\int f \wedge \tilde{h}_n > \int f - \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Posons alors $h_n = \tilde{h}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{h}_n$. Montrons par récurrence sur $n$ que pour tout $f \leqslant g_n$ :

$$\int f \wedge h_n > \int f - \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Si $n = 1$ et si $f \leqslant g_1$, alors

$$\int f \wedge h_1 = \int f \wedge \tilde{h}_1 > \int f - \epsilon/2,$$

ce qui montre le résultat pour $n = 1$.

Supposons le résultat vrai pour $n = k$. Si $f \leqslant g_k$, alors $\int f \wedge h_k > \int f - \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$. Soit $f \leqslant g_{k+1}$ ; on a :

$$\begin{aligned}\int f \wedge h_{k+1} = \int (f \wedge h_k) \wedge \tilde{h}_{k+1} &> \int f \wedge h_k - \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \\ &> \int f - \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) - \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \\ &> \int f - \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)\end{aligned}$$

*Deuxième Étape :* La suite $\{h_n\}$ ainsi construite est évidemment une suite décroissante de fonctions intégrables positives qui converge presque partout vers 0 (on se rappelle que $h_n \leqslant g_n$). D'après le théorème de convergence monotone (2.2) on a $\lim_{n\to\infty} \int h_n = 0$.

On a d'autre part, grâce à la première étape

$$\int |f_n| < \int |f_n| \wedge h_n + \epsilon \leqslant \int h_n + \epsilon,$$

d'où

$$0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_J |f_n| < \epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $\limsup_{n\to\infty} \int_J |f_n| = 0$. Puisque $\int |f_n| \geqslant 0$, on a $\liminf_{n\to\infty} \int_J |f_n| \geqslant 0$. Donc $\lim_{n\to\infty} |f_n| = 0$, ce qui entraîne que la suite $\left\{\left|\int f_n\right|\right\}$ converge vers 0 aussi.

Retour au cours

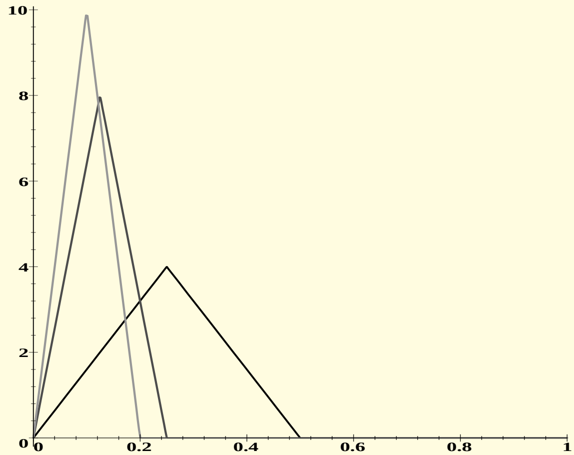


FIGURE 2. Les fonctions $f_n(x)$, $n = 4, 8, 10$

Retour

Définition 3.5. Soit $\sum a_n$ une série de réels ou de complexes, et soit $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. On note $a'_i = a_{k(i)}$. On dit que $\sum a'_n$ est un *réarrangement de* $\sum a_n$.

En général, si $\sum a_n$ converge, un réarrangement peut ou ne peut pas converger et s'il converge, la somme peut être différente. Mais si la série est absolument convergente on a :

Proposition 3.6. (*Rappel*) *Soit $\sum a_n$ une série, telle que $\sum |a_n|$ soit convergente. Alors $\sum a_n$ est convergente et tout réarrangement donne une série convergente avec même somme.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par le critère de Cauchy, il existe $N$ telle que

$$\sum_{i=m}^{n} |a_i| < \epsilon, \quad n \geqslant m \geqslant N. \tag{30}$$

Soit $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection, $\sum a'_i$ le réarrangement de $\sum a_i$ qu'elle définit. On choisit $p$ suffisamment grand : les entiers $1, 2, \ldots, N$ sont tous contenus dans $\{k(1), \ldots, k(p)\}$. Ce nombre $p$ ne dépend que de $\epsilon$ et si $\ell > p$ les nombres $a_1, \ldots, a_N$ figurent dans $s_\ell = a_1 + \cdots + a_\ell$ et dans $s'_\ell = a'_1 + \cdots + a'_\ell$. Donc

$$|s'_\ell - s_\ell| \leqslant \sum_{i=N+1}^{M} |a_i| < \epsilon, \quad M := \max(\ell, k(1), \ldots, k(\ell))$$

par 30. Cela veut dire que $\sum s'_k$ est convergente avec somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} s_k$. $\square$

Corollaire 3.7. *Soient $a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ des réels ou des complexes tels que*

– *pour chaque $i$ fixé, $a_{ij} = 0$ si $j > n_i$,*

– *pour chaque* $j$ *fixé,* $a_{ij} = 0$ *si* $i > m_j$.

*On suppose que la série*

$$a_{11} + \cdots + a_{1n_1} + a_{21} + \cdots + a_{2n_2} + \cdots$$

*converge absolument. Posant* $A_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}$ *et* $A'_j = \sum_{i=1}^{m_j} a_{ij}$*, on a*

$$\sum_i A_i = \sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij} = \sum_j A'_j.$$

Retour au cours

Une fonction bornée et presque partout continue (comme $f_n$) est intégrable. Retour au cours

La limite $I = \lim_{n\to\infty} I_n$, $I_n = \int_J f \wedge n$ est un point d'accumulation pour l'ensemble $I(f, J)$ et on a $\sup I(f, J) \geqslant I$. D'autre part c'est aussi une borne supérieure, alors $\sup I(f, J) \leqslant I$

Retour au cours

DÉMONSTRATION. On prend une suite $h_n \to 0$ $(n \to \infty)$ et on calcule :

$$\frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = \int_J \frac{f(t+h_n, x) - f(t,x)}{h_n} dx.$$

Par “le théorème des accroissements finis” il existe $\theta \in [0,1]$ telle que :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t+\theta h_n, x) \right| &= \left| \frac{f(t+h_n, x) - f(t,x)}{h_n} \right| \\ &\leqslant g(x). \end{aligned}$$

La membre de droite tend vers $\frac{\partial f}{\partial t}$, une fonction intégrable. Une application du Thm. 6.1 montre :

$$F'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}.$$

□

Retour au cours

L'intégrale de la définition existe à cause de Prop. 4.1, 2 : $f$ étant intégrable et $\theta$ étant borné et presque partout continue, leur produit est intégrable. Retour au cours

SI $Q'$ est un autre pavé contenant $A$, alors $Q \cap Q'$ est un pavé contenant $A$. Ensuite on subdivise $Q$ en un nombre fini de sous-pavés $Q_1 = Q \cap Q'$, $Q_2, \ldots, Q_N$. L'extension de $f$ vaut 0 sur les sous-pavés $Q_2, \ldots, Q_N$ et donc, par additivité $\int_Q f = \int_{Q_1} f$. Par un argument pareil, on montre $\int_{Q'} f = \int_{Q_1} f$ et donc $\int_Q f = \int_{Q'} f$. Retour au cours

Si par exemple $n = 2$ et le pavé est $Q = [0, \ell] \times [0, m], m \leqslant \ell$, et $\ell = km + r$, $r < m$, une partie $Q' \subset Q$ est couvert par $k$ carrés de taille $m \times m$ et reste une partie $Q'$ de taile $r \times m$ et d'aire $rm < m^2$ et on continue de même façon avec $Q'$. Soit $A_k$ l'aire non-couverte après l'étape $k$. Alors $A_1 = rm > A_2 > A_2 \ldots$ montre que $\{A_k\}$ est une suite de réels positifs strictement décroisante de limite zéro.

Retour au cours

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$ est un *point intérieur* si $A$ contient une boule ouvert de centre $x$. L'ensemble de ces points est $\overset{\circ}{A}$, l'intérieur. Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est *point adhérent* à $A$ si tout boule ouvert de centre $x$ contient un point de $A$. Les points intérieurs de $A$ sont adhérents. Les autres points adhérents forment $\partial A$, le *bord* de $A$ et $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ est *l'adhérence* de $A$, le plus petit fermée contenant $A$.

Retour au cours

## Réponses des problèmes du Chapitre 1

### Le cours est-il compris

(1) Oui, sur $I = [a, b]$ on a $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ si $f$ est croissante.

(2) Même si $g$ est bornée, $\dfrac{1}{g}$ peut être non-bornée et même non-intégrable comme le montre $g(x) = x$ sur $[-1, 1]$.

(3) Le th. 1.4.1 dit que $F$ est continue. Si $f$ n'est pas continue $F$ peut être non-dérivable comme montre la fonction en escalier sur $[0, 1]$ définie par $f(x) = 0$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 1$ sinon. Ici $F(x) = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $F(x) = x$ sinon et $F$ est non-dérivable en $x = \frac{1}{2}$.

(4) Oui : $F'(x) = f(x) \geqslant 0$ montre que $F$ est croissante.

(5) Non : $A = \mathbb{Q} \cap [a, b]$ est dénombrable, mais on a vu (cf. 1.1.3) que $\chi_A$ n'est pas intégrable.

(6) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x$ est rationnel et $f(x) = -1$ sinon. Alors $f$ n'est pas intégrable, mais $|f(x)| = 1$ l'est.

SUITE : les Problèmes

**Les exercices**

(1) On trouve $Q(x) = \frac{1}{4}x^2(x-1)^2$ et $Q(n-1) - Q(0) = n^3 = \frac{1}{4}n^2(n-1)^2$. Prenant une somme de Riemann $S$ pour une subdivision équidistante de pas $\frac{1}{n}$ et en prenant les points $x = \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1$ on trouve

$$S = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{1}{4}\frac{(n-1)^2}{n^2}.$$

En prenant la limite on trouve $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

SUITE

(2) On trouve

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} + 1\right)$$

et en prenant une somme de Riemann $S$ pour une subdivision équidistante de pas $\dfrac{1}{n}$ et en prenant les points $x = \dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n} = 1$ on trouve

$$S = \frac{1}{2n}\left(\frac{\sin(1+\frac{1}{2n})}{\sin\frac{1}{2n}} + 1\right).$$

En prenant la limite, on trouve $\int_0^1 \cos(x)\,dx = \sin(1)$.

SUITE

(3) a) Si $x$ est non-rationnel, on peut approcher $x$ par des rationnels $x_n$. Donc $f(x_n) = x_n$ converge vers $x$, tandis que $f(x) = 0$. Donc $f$ a une discontinuité en $x$. Pour $x \in \mathbb{Q}$, il existe $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ non-rationnel, donc $\lim f(x_n) = 0$, mais $f(x) = x \neq 0$ si $x \neq 0$. Pour $x_n \to 0$ a soit $f(x_n) = 0$ soit $f(x_n) = x_n$ et donc $\lim f(x_n) = 0$ et $f$ est continue en 0. Conclusion : les discontinuités sont toutes les points de $\mathbb{R} - \{0\}$ et $f$ n'est pas intégrable sur aucun intervalle fermé.

b) Pour $x$ non-rationnel et une suite des rationnels $x_{\rightarrow} x$, on a $\lim f(x_n) = 0 \neq f(x) = x^2 + 3x + 2$, car les racines de $f$ sont rationnels. Donc $f$ n'est pas continue pour $x$ non-rationnel. Si $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = 0$ et pour une suite $x_n \to x$ d'irrationnels $x_n$ on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x^2 + 3x + 2$ et donc seul au points $x = -1$ et $x = -2$ la fonction peut être continue. En fait, elle l'est par un argument comme en a). Conclusion : les discontinuités sont toutes les points $x \neq \{-1, -2\}$ de $\mathbb{R}$ et $f$ n'est intégrable sur aucun intervalle fermé.

c) La fonction est continue en dehors de 0 et puisque $|\sin(1/x)x| \leqslant |x|$ pour $x \neq 0$, on a $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$ et $f$ est aussi continue en 0. De plus $|f(x)| \leqslant |x|$ montre que $f$ est bornée sur un intervalle fermée et donc $f$ est intégrable sur un tel intervalle.

d) La fonction $\sin(x)$ est continue, la fonction $\text{frac}(y)$ est la partie fractionnelle d'un réelle et donc ses discontinuités sont les points $y \in \mathbb{Z}$. Cela implique que $\text{frac}(1/x)$ est discontinue pour $x = 0$ et $x = 1/n$, $n \in \mathbb{Z}$. C'est pareil pour $f$. Puisque c'est un ensemble dénombrable et puisque $f(x)$ est bornée, $f$ est intégrable sur un intervalle fermé.

e)Pour $x \in \mathbb{Q}$, et une suite $x_n \to x$ des irrationnels $x_n$, on a que $f$ est discontinue en $x$ : $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(x)$. Si $x$ est irrationnel, $f(x) = 0$, et une pour une suite $x_n \to x$, soit $f(x_n) = 0$, soit $x_n = p_n/q_n$, $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$. Dans ce dernier cas, si on a un infinité de tels nombres on doit avoir $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ (il n'y a qu'un nombre fini de rationnels $p/q$ ayant un dénominateur $q \leqslant Q$ et de distance $\leqslant D$ d'un nombre $\alpha$ donné, car cela implique $p \leqslant \alpha q + Dq \leqslant (\alpha + D)Q$)). Donc $f(x_n)$ étant soit 0, soit $1/q_n$, la suite de ces valeurs converge vers 0 : $f$ est continue en un tel point. Donc les discontinuités de $f$ sont les points rationnels. Puisque $f$ est bornée, $f$ est donc intégrable sur un intervalle fermé (en fait l'intégrale vaut 0).

SUITE

(4) Par récurrence, sur $]-b,b[$ on a :

$$-M\frac{x^n}{n!} \leqslant f(x) \leqslant M\frac{x^n}{n!}.$$

Utilisant que $0 < a < 1$, intégration donne

$$-M\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant -M\frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= -M\int_0^{ax}\frac{t^n}{n!}dt \leqslant \int_0^{ax} f(t)dt \leqslant M\int_0^{ax}\frac{t^n}{n!}dt =$$

$$= M\frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant M\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Utilisant que $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$, cela donne que $f(x) = 0$.

SUITE

(5) a) On a l'estimation

$$|g((f(x)) - g(f(y))| \leqslant M|f(x) - f(y)|, \quad x, y \in J'$$

et de là on obtient l'estimation souhaitée.

b) Cette estimation donne pour tout partition de $J$ :

$$S(P, g\circ f) - s(P, g\circ f) \leqslant M(S(P, f) - s(P, g)).$$

Puisque $f$ est intégrable, pour $\epsilon > 0$ donnée, il existe $P$ telle que $S(P. f) - s(P, f) \leqslant \epsilon$ et donc $SP, (g\circ f) - s(P, g\circ f) \leqslant M\epsilon$, ce qui montre que $g\circ f$ est intégrable.

c) $g(x) = x^n$ est dérivable et donc Lipschitzienne.

d) La fonction $g$ est Lipschitzienne car continue et dérivable par morceaux.

SUITE

(6) – On a sur $[k, k+1]$ que $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$ et donc $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant f(k)$.

– La différence $d_n$ entre terme numéro $n$ et $n-1$ est égale à $f(n) - \int_{n-1}^{n} f$. Puisque

$$0 \leqslant d_n \leqslant f(n-1) - f(n) \leqslant f(n-1)$$

cette suite converge vers 0. D'autre part, cela montre aussi que la limite est minorée par 0 et majorée par $f(1) - f(2) + f(2) - f(3) + \cdots = f(1)$.

(a) On l'applique à $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(b) On l'applique à $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

vers le Chapitre II

**Réponses des problèmes du Chapitre 2**

## Le cours est-il compris

(1) Non : soit $A = \mathbb{Q} \cap [a, b$ et $B = [a, b] \setminus A$. Alors le complémentaire de $B$ est négligeable et $\chi_A + \chi_B = 1$ et donc si $\xi_B$ serait intégrable, aussi $\chi_A$ le serait, ce qui n'est pas le cas.

(2) Non, on peut prendre $f = 0$ et $g$ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [a, b]$. Alors $g$ est presque partout 0 mais pas intégrable.

(3) Oui, car $\mathbb{R}$ est la réunion des intervalles $I_n = [-n, n]$ et si $f|I_n$ est continue sur $I_n \setminus E_n$, $f$ est continue en dehors de $\bigcup E_n$, réunion dénombrable d'ensembles négligeables, donc négligeable.

(4) Non, dans un intervalle $[0, \epsilon]$, $\epsilon > 0$, la fonction $\sin(1/x)$ prend chaque valeur dans l'intervalle $[-1, 1]$ et donc ne peut pas rendue continue en 0.

(5) Non : la suite $e_n$ ou $e_n = n$ sur $[a, b]$ ne converge pas.

(6) Si $g$ change de signe ce n'est pas vrai : $f(x) = g(x) = \sin(x)$ sur $[-\pi, \pi]$ donne une contre exemple.

SUITE : Problèmes

## Les exercices

(1) a) On a $f(t) - f(a) = \int_a^t f'(x)dx$

b) Puisque

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{(t-x)^k}{k!}\right)$$

on a

$$\begin{aligned}
R_k(t) &= \int_a^t \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x)dx \\
&= -\left[\frac{t-x}{k!} f^{(k)}(x)\right]_{x=a}^{x=t} + \int_a^t \frac{(t-x)^k}{(k)!} f^{(k+1)}(x)dx \\
&= f^{(k)}(a)\frac{(t-a)^k}{(k)!} + R_{k+1}(t).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
f(t) &= f(a) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)R_k(t) \\
&= f(a) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + f^{(k)}(a)\frac{(t-a)^k}{(k)!} + R_{k+1}(t) \\
&= f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + f^{(k)}(a) + R_{k+1}(t).
\end{aligned}$$

SUITE

(2) Soit $I_n(f) = \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt$.

a) Par une intégration par parties on trouve

$$I_n(f) = \frac{f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)\,dt.$$

Les deux termes tendent vers 0 : le premier car

$$\frac{f(a)\left|\cos(na) - f(b)\cos(nb)\right|}{n} \leqslant \frac{1}{n}(\left|f(a)\right| + \left|f(b)\right|)$$

et le deuxième car $\left|\int_a^b \cos(nt)\,f'\right| \leqslant \int_a^b \left|f'\right|$, une borne indépendant de $n$.

b) Si $f$ est dérivable par morceaux (par exemple une fonction en escalier) cela découle de a). On sait que il y a une suite $\{e_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ de fonctions en escalier telles que

$$e_k \leqslant f \tag{31}$$

$$\lim_{k\to\infty} e_k = f \tag{32}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int e_k = \int f. \tag{33}$$

Puisque $I_n(f) - I_n(e_k) = I(f - e_k)$, par 31 on a $\left|I_n(f) - I_n(e_k)\right| \leqslant \int (f - e_k) = \int f - \int e_k$ indépendant de $n$. Soit $\epsilon > 0$ et $k$ tel que $\int f - \int e_k < \epsilon/2$ (possible par (33)). Soit $N$ telle que $\left|I_n(e_k)\right| < \epsilon/2$ pour tout $n \geqslant N$. Alors $\left|I_n(f)\right| \leqslant \left|I_n(e_k)\right| + \left|I_n(f) - I_n(e_k)\right| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui montre bien que $\lim_{n\to\infty} I_n(f) = 0$.

SUITE

(3) Faites le changement de variable $y = a + b - x$. Utilisant la formule

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

on trouve $\log(1+\tan(\pi/4 - x)) = \log(2) - \log(1+\tan(x))$ et pour l'intégrale $I$ cherchée cela donne $I = \int_0^{\pi/4} \log(2) - I$ et donc $I = \frac{\pi}{8}\log(2)$. Pour l'autre intégrale on trouve $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-x}\,dx = \log(2)$.

SUITE

(4) La substitution donne

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} \frac{1}{2\sqrt{u}} \sin(u)\,du$$

et puisque $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ est décroissante si $u > 0$ on peut appliquer la deuxième théorème de la moyenne :

$$f(x) = \frac{1}{2x} \int_{x^2}^{\xi} \sin(u)\,du + \frac{1}{2x+2} \int_{\xi}^{x^2+1} \sin(u)\,du, \quad \xi \in [x^2, x^2+1].$$

On utilise les estimations

$$\int_a^b -1.du = (a-b) \leqslant \int_a^b \sin(u)\,du \leqslant \int_a^b du = (b-a)$$

pour déduire

$$\frac{-1}{2x} \leqslant \frac{1}{2x}(x^2-\xi) + \frac{1}{2x+2}(\xi - x^2 - 1) \leqslant f(x)$$

et

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2x}(\xi - x^2) + \frac{1}{2x+2}(x^2+1-\xi) \leqslant \frac{1}{2x}.$$

Combinaisant ces estimations nous trouvons $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2x} < \dfrac{1}{x}$. SUITE

(5) Utiliser une partition équidistante avec pas $\pi/n$. Sur chaque sous-intervalle $I_k$, on a $\int_{I_k} |\sin(nt)|dt = \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(x)dx = \frac{1}{n}$ et donc par le premier théorème de la moyenne

$$\int_0^\pi f(t)|\sin(nt)|dt = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\frac{1}{n}, \quad \xi_k \in I_k.$$

Cette somme de Riemann converge vers $\int_0^\pi f$.

SUITE

(6) a) $f'$ et donc $|f'|$ est continue (par hypothèse).

b) Soit $M = \max_J |f'|$. De $0 \leqslant \int_0^x |f'| \leqslant Mx$ on voit que $\delta = \epsilon/(2M)$ convient.

c) Une intégration par parties montre que

$$I_n := \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx$$

et donc

$$n|I_n| = \left|\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(x)|\,dx = V(f).$$

Pareil pour la deuxième estimation.

CHAPITRE III

## Réponses des problèmes du Chapitre 3

### Le cours est-il compris

(1) Soit $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. C'est un ensemble dénombrable, disons $A = a_1, a_2, \ldots,$ et $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Alors $\chi_A = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}$. Naturellement $\chi_{A_n}$ est intégrable , mais $\chi_A$ n'est pas intégrable.

(2) Voir l'exemple 3.1.

(3) On peut utiliser $f_n$ de l'exemple 3.1 pour introduire $u_n = f_{n+1} - f_n$, $n = 1, \ldots$. Alors $u_n$ est intégrable, et $\sum u_k$ converge vers la fonction $f$ avec $\int f = 0$, mais $\sum \int u_n = 1$.

(4) Comme pour 1), on a que $\chi_A = \sup_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_n}$ n'est pas intégrable.

SUITE : Problèmes

**Les exercices**

(1) a) Voir la figure ci-dessus.

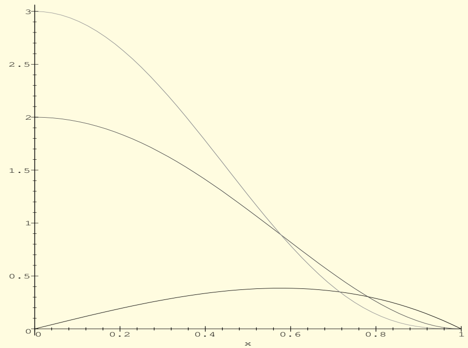


FIGURE 3. Les fonctions $f_n(x),\ n = 1, 2, 3$

b) On a pour $a < 1$ et $p \in \mathbb{R}$ que $\lim_{n\to\infty} n^p a^n = 0$ et donc $f(x) = 0$. On trouve $I_n = \dfrac{n^p}{2(n+1)}$ et

$$I = \begin{cases} 0 & \text{if } p < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{if } p = 1 \\ \infty & \text{if } p > 1. \end{cases}$$

c) $p < 1$. SUITE

(2) Supposons $a < x_1 < \cdots < x_n < \cdots < b$.

a) et b) Si $x_n \leqslant x < x_{n+1}$ on a $f(x) = \sum_{k\leqslant n} c_k$. Cela donne une fonction croissante et en escaliers avec discontinuités en $x = x_k$. Soit $\epsilon > 0$ et $N$ telle que $|\sum_{k\geqslant n} c_n| \leqslant \epsilon$ quand $n \geqslant N$. Alors $|\sum_{k\geqslant n} c_n \mathbb{1}_{I_n}(x)| \leqslant |\sum_{k\geqslant n} c_n| \leqslant \epsilon$ montre que la convergence est uniforme.

c) Puisque la convergence est uniforme on peut échanger l'intégrale et la somme et donc

$$\int f = \sum_{n\geqslant 1} c_n \int_{x_n}^{b} dx = b\sum c_n - \sum x_n c_n.$$

SUITE

(3) a) La fonction $\operatorname{frac}(nx)$ est discontinue si $x \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$. Cela entraîne que $f$ est discontinue aux points rationnels, une ensemble dense de $\mathbb{R}$. Soit $E$ l'ensemble des points irrationnels. Soit $f_n(x) = \frac{\operatorname{frac}(nx)}{n^2}$. Alors $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$. Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum f_n(x)$ converge uniformément. Si $x \in E$ les fonctions $f_n$ y sont continues et donc aussi $f(x) = \sum f_n(x)$ y est continue. Les points de discontinuité sont donc exactement les points $x \in \mathbb{Q}$.

b) La fonction $f$ est bornée par le nombre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Les points de discontinuité de $f$ forment un ensemble négligeable, donc $f$ est intégrable sur chaque intervalle borné.

SUITE

(4) a) Puisque $x \neq \pm 1$ on a $x^2 + 1 - 2x\cos t = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t > 0$ et donc pour de tel choix de $x$ la fonction continue $x^2 + 1 - 2x\cos t$ admet un minimum positif sur $[0, \pi]$ et l'intégrande est continue, donc intégrable.

b) $J_0(0) = \pi$ et $J_n(0) = 0$ si $n > 0$. Le changement de variable $x \mapsto \pi = x$ montre que $J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$ et donc $J_n$ est paire si $n$ est paire et impaire si $n$ est impaire.

c) $J_0(x) = \dfrac{\pi}{1 - x^2}$.

d) $2xJ_1(x) = (x^2 + 1)J_0(X) + \pi$

e) Utilisant $\cos(n+2)t + \cos nt = 2\cos t \cos(n+1)t$ on trouve

$$J_{n+2}(x) + J_n(x) - \left(x + \frac{1}{x}\right) J_{n+1} = \frac{-1}{x} \int_0^\pi \cos(n+1)t\,dt = 0.$$

f) Utilisant e) on trouve $J_n(x) = \pi \dfrac{x^n}{1 - x^2}$. CHAP IV

## Réponses des problèmes du Chapitre 4

### Le cours est-il compris

(1) Si on rajoute l'hypothèse "presque partout continue" c'est la définition. On a vu que c'est faux sans cette hypothèse (Question 6 posée à la fin du chapitre 1).

(2) Oui, cela se montre comme Prop.4.3.8.

(3) La fonction caractéristique de $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ satisfait $0 \leqslant f = \chi_A \leqslant g = 1$, mais $\chi_A$ n'est pas intégrable.

(4) Prendre $-1/x = f$ et $g = 0$ sur $]0, 1]$. Alors $f$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, mais $g$ l'est.

SUITE : problèmes

(1) Par le théorème de la moyenne on a qu'il existe $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ telle que

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} fg = f(\xi) \int_{\xi_1}^{\xi_2} g$$

et donc $|\int_{\xi_1}^{\xi_2} fg| \leqslant f(\xi)|\int_{\xi_1}^{\xi_2} g| \leqslant f(\xi_1)|\int_a^{\xi_1} g - \int_a^{\xi_2} g| \leqslant 2M f(\xi_1)$ puisque $f$ décroît

Soit $\epsilon > 0$ et $\xi \in [a, b[$ telle que $f(\xi) < \dfrac{\epsilon}{2M}$. Alors, pour tout $\xi_1 \geqslant \xi$ on a

$$|\int_{\xi_1}^{\xi_2} fg| \leqslant 2M f(\xi_1) \leqslant 2M f(\xi) < \epsilon$$

et donc, par Cauchy, $\lim_{\xi\to b} \int_a^{\xi} fg$ existe. SUITE

(2) Puisque

$$\int_0^b \cos x^2\,dx = \int_0^{b^2} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,du$$

il suffit de montrer que $\lim\limits_{U\to\infty} \displaystyle\int_0^U \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,du$ existe. Cela découle du critère de Cauchy avec $f(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ et $g(u) = \cos(u)$. SUITE

(3) On a l'estimation $|f_\alpha(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$. La membre de gauche est intégrable sur $[1, \infty[$ si $\alpha > 1$ et donc $f_\alpha(x)$ est intégrable. Si $\alpha = 1$ on utilise le théorème de la moyenne pour estimer :

$$\int_{n\pi}^{(n+k)\pi} \frac{|\sin x|}{x} = \frac{1}{\xi} \int_{n\pi}^{(n+k)\pi} |\sin(x)| \geqslant \frac{1}{n\pi} k\pi = \frac{k}{n}.$$

Pour $(n, k) \longrightarrow \infty$ cela tend vers $\infty$ et par Cauchy il n'y a pas de limite. Puisque si $f_\alpha(x)$ est intégrable, aussi $f_\beta(x)$ l'est pour $\beta \geqslant \alpha$ cela montre que $f_\alpha(x)$ n'est pas intégrable pour $\alpha \leqslant 0$.

Par contre, le critère de Lebesque montre que $\lim\limits_{\xi \to \infty} \displaystyle\int_1^\xi f_\alpha(x)\,dx$ existe pour $\alpha > 0$. Pour $\alpha \leqslant 0$, l'estimation

$$\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \right| \geqslant 2$$

montre que $\lim\limits_{\xi \to \infty} \displaystyle\int_1^\xi f_\alpha(x)\,dx$ n'existe pas pour $\alpha \leqslant 0$

SUITE

(4) On pose

$$H_X(t) = \int_a^X f(t,x)\,dx.$$

Pour $t \in T$ on a

$$\xi, \eta > A \Rightarrow \left|H_\eta(t) - H_\eta(t)\right| \leqslant \epsilon$$

et donc $F(t) = \lim_{x \longrightarrow b} H_X(t)$ existe (Cauchy). Puisque l'estimation de $H$ est uniforme en $t$, cette limite est uniforme en $t$ et donc $F$ est continue en $t$.

On pose $f_\alpha(x) = \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$. Sur $[1, \xi]$ la fonction $f_\alpha(x)$ est intégrable par rapport à $x$ ; pour $x > 0$ la fonction $\alpha \mapsto f_\alpha(x)$ est continue sur $]0, \infty[$ et on a l'estimation

$$|f_\alpha(x)| \leqslant \frac{2}{x^\alpha}$$

par une fonction intégrable sur $[1, \xi]$. Finalement

$$\left|\int_\xi^\eta f_\alpha(x)\right| \leqslant \frac{2}{\xi^\alpha} \to 0 \quad \text{quand } \xi \to \infty.$$

Ces arguments marchent pour $\alpha \in ]0, A]$ et donc $I(\alpha)$ est continue sur $]0, \infty[$. SUITE

(5) On a

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f| \geqslant \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} f \right| = \frac{1}{n}$$

et donc $|f|$ n'est pas intégrable sur $[0, 1]$ car $\sum \frac{1}{n}$ n'est pas convergent. Mais

$$\int_0^{x_n} f = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \longrightarrow \log(2).$$

On pourrait prendre pour $f$ une fonction en escalier égale à $(-1)^n \frac{1}{n+1}$ sur l'intervalle $[x_n, x_{n+1}[$.

Retour au cours : Chap V

## Réponses des problèmes du Chapitre 5

### Le cours est-il compris

(1) On sait que pour $g$ intégrable, $f$ continue, $|f| \leqslant g$ implique que $f$ est intégrable. Par Prop. 5.1.3. $\int f(x, y)dy$ est alors continue en $x$.

(2) $f$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont bornées et presque partout continues donc intégrables. Alors Prop. 5.1.4. entraîne que $\displaystyle\int_c^d f(x, y)dy$ est dérivable par rapport à $x$ et que sa dérivée est égale à $\displaystyle\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}dy$.

(3) Si $f$ ou $g$ ont un support compacte $f * g$ existe. Aussi si un des fonctions $f$ ou $g$ est bornée $f * g$ existe. La fonction

$$f = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{si } 0 < |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, mais $f * f(0) = \int_{\mathbb{R}} f^2$ n'existe pas.

Continuer : les exercices

## Les exercices

(1) Si $f$ un polynôme, disons $f = a_n x^n + \cdots + a_0$, alors l'hypothèse implique que $\inf f^2 = \sum a_k \int f \cdot x^k = 0$ et donc $f = 0$. En général, par Weierstrass, $f = \lim P_n$ uniformément sur $[0,1]$ et donc $0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 P_n f = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} P_n) f = \int f^2$ et donc $f = 0$. Continuer

(2) On a

$$f'(x) = \frac{\log(x)}{x^2+1}$$

avec zéro en $x = 1$, $f' < 0$ resp. $f' > 0$ pour $0 < x < 1$, resp. $x > 1$, donc $f$ a un minimum local en $x = 1$. La substitution $t = 1/u$ donne

$$f(x) = \int_1^x \frac{\log(t)}{t^2+1} dt = \int_1^{1/x} \frac{\log(u)}{u^2+1} du = f(1/x).$$

L'estimation $1 + t^2 < t^2$ donne

$$f(x) < \int_1^x \frac{\log(t)}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\log x}{x} < 1.$$

L'allure du graphe est : Continuer

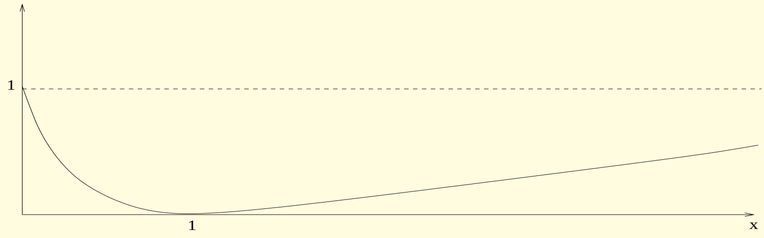


FIGURE 4. La fonction $f(x)$

(3) La substitution $t = -u$ donne

$$j(x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\sin u}{u^2} du = j(-x).$$

On a $|j(x)| \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x}$ et donc $\lim_{x\to\infty} j(x) = 0$.

On pose

$$I_k = \int_{k\pi}^{2k\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

Par le théorème de la moyenne, existe $\xi \in [k\pi, 2k\pi]$ tel que

$$I_k = \frac{1}{4k^2\pi^2}\left[4((-1)^k - \cos\xi) - (\cos\xi - (-1)^k)\right] = \frac{1}{4k^2\pi^2}\left[3(-1)^k - 3\cos\xi\right].$$

Si $k$ est paire, on trouve $I_k \geqslant \frac{3}{4k^2\pi^2}$ et si $k$ est impaire, on a $I_k \leqslant -\frac{3}{4k^2\pi^2}$. Donc, $j$ change de signe sur $J_n = [n\pi, (n+1)\pi$ et $j$ a au moins un zéro dans l'intérieur. Puisque

$$j'(x) = \frac{\sin 2x}{4x^2} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin x(\cos x - 2)}{2x^2}$$

la fonction $j$ est monotone sur $J_n$ et donc a une seule racine sur $J_n$. Continuer

(4) Puisque $\dfrac{|\sin t|}{e^t+1} \leqslant \dfrac{1}{e^t+1}$ est intégrable sur $[0,\infty[$, $j$ existe. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)t} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \tag{34}$$

et donc l'intégrande pour calculer $j$ est la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)t} \cdot \sin t.$$

On intègre les termes :

$$\int_0^{\infty} e^{-(n+1)t} \sin t \, dt = -\frac{1}{n^2+1}$$

et cela donne la réponse, car on peut échanger l'intégration et sommation (la convergence (34) est uniforme). Continuer

(5) Puisque $\sum a_n r^n$ est convergente, $\lim_{n\to\infty} |a_n r^n| = 0$ et donc $|a_n r^n| \leqslant 1$ si $n \geqslant N$. On prend

$$B(r) = \max_{n\leqslant N} |a_n r^n| + 1.$$

On fixe $r$ avec $0 < r < R$. Alors

$$\frac{|a_n r^n|}{n!} = \left|\frac{x}{r}\right|^n |a_n r^n| \cdot \frac{1}{n!} \leqslant B(r)\frac{1}{n!}\left|\frac{x}{r}\right|^n$$

et puisque la somme de la série $\sum \frac{1}{n!}\left|\frac{x}{r}\right|^n$ converge vers $e^{|x|/r}$, aussi la série qui définit $s(x)$ converge et $|s(x)| \leqslant B(r)e^{|x|/r}$. Cela donne pour $x > 0$

$$|s(x)e^{-\alpha x}| \leqslant B(r)e^{(\frac{1}{r}-\alpha)x}$$

et puisque $\alpha > 1/R$ on a $1/r - \alpha < 0$ et l'intégral de $s(x)e^{-\alpha x}$ converge. Continuer

(6) La fonction $f$ est dérivable car $e^{-t^2}$ est continue, et sa dérivée est $e^{-x^2}$, une fonction continue. Soit $f(x,u) = \exp\left(-\left(\frac{x}{\cos u}\right)^2\right)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé elle est intégrable sur $[0,\pi/4]$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{\cos^2 u}\exp\left(-\left(\frac{x}{\cos u}\right)^2\right)$ aussi intégrable sur $[0,\pi/4]$. Puisque

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant 2e^{-x^2}, \quad t \in [0,\pi/4]$$

la prop. 5.1.4 montre que $g(x) = \int_0^{\pi/4} f(x,u)\,du$ est dérivable avec dérivée $\int_0^{\pi/4} \frac{\partial f}{\partial x}\,du$.

On a

$$g'(x) = \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\left(\frac{x}{\cos u}\right)^2\right) \cdot \frac{-2x}{\cos^2 u}\,du.$$

On substitue d'abord $x = s\cos u$ et avec $\sin u = \sqrt{1-(x/s)^2}$ on trouve

$$e^{x^2} g' = -2\int_x^{\sqrt{2}x} \frac{e^{x^2-s^2}}{\sqrt{s^2-x^2}}\,s\,ds$$

et la substitution $t^2 = s^2 - x^2$ donne

$$e^{x^2} g' = -2\int_0^x e^{-t^2}\,dt = -2f$$

et donc $e^{x^2}(f^2+g)' = 2f + e^{x^2}g' = 0$ ce qui montre que $2f + g$ est constante. On a $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ et donc $\pi/4 = f^2(0) + g(0) = \lim_{x\to\infty} f^2(x) + g(x) = \lim_{x\to\infty} f^2(x)$ montre que la limite cherchée est $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Continuer

(7) On peut calculer $h'(x)$ en dérivant sous l'intégrale (pour $a \in ]-1,\infty]$ l'estimation $\dfrac{\log(1+xt)}{1+t^2} \leqslant \dfrac{\log(1+at)}{1+t^2}$ et une application de la Prop. 5.1.4 montre que cela est permis sur l'intervalle $]-1,a]$). Donc :

$$h'(x) = \int_0^1 \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}dt = \frac{1}{1+x^2}\int_0^1 \left[\frac{t+x}{1+t^2} + \frac{-x}{1+xt}\right]dt$$

ce qui donne $(1+x^2)h'(x) = \frac{1}{2}\log(2) + \frac{\pi}{4}x - \log(1+x)$. Une intégration donne la valeur de $h$. On trouve

$$h(1) = \frac{\pi}{4}\log(2) - \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t^2}dt$$

et donc $h(1) = \frac{\pi}{8}\log(2)$.

On a $(1+x^2)h' > 0$ si $x > 0$, donc $h$ est strictement croissante et $h(0) = 0$. Le graphe devient :

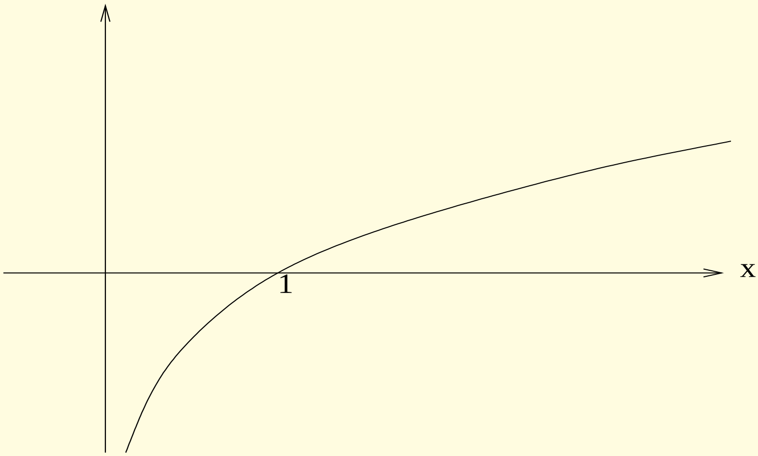


FIGURE 5. Allure de $h(x)$

Continuer

(8) On pose

$$f(x,t) := \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = (\cos t - 1) e^{-xt}.$$

Cette dérivée est continue et pour tout $x > 0$ fixé, elle est intégrable sur $[0, \infty[$ car $e^{-xt}$ est intégrable (en $t$). De plus, cette fonction est bornée et donc par Prop. 5.1.4. on peut dériver sous l'intégrale pour trouver $f'$. En appliquant Prop. 5.1.3 à $\int_0^\infty (\cos t - 1) e^{-xt} dt$ on déduit que $f'(x)$ est continue en $x$. De plus

$$f'(x) = \int_0^\infty (\cos t - 1) e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

Une intégration donne

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \text{constante } C.$$

On a $\lim_{x\to\infty} f(x) = C$. On note que $\frac{1-\cos t}{t} = \frac{1}{2}t + o(t)$ et l'estimation $e^{-xt} \leqslant 1$ implique que pour $\epsilon > 0$ et suffisamment petit on a $\int_0^\epsilon \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} dt \leqslant M\epsilon^2$ uniformément en $x$. Pour $t \geqslant \epsilon$ on a l'estimation

$$\int_\epsilon^\infty \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \leqslant \int_\epsilon^\infty \frac{2}{\epsilon} e^{-\epsilon xt} = 2\frac{e^{-\epsilon x}}{\epsilon x}$$

ce qui montre que $\lim_{x\to\infty} \int_\epsilon^\infty f(x,t) dt = 0$. Puisque $\lim_{x\to\infty} \int_0^\epsilon f(x,t) dt \leqslant M\epsilon^2$ on a que $\lim_{x\to\infty} \int_0^\infty f(x,t) dt \leqslant M\epsilon^2$ pour tout $\epsilon > 0$ et donc $C = 0$. Continuer

(9) L'intégrale $\int_1^\infty e^{-t}\,dt$ existe et puisque $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ si $t \geqslant 1$ aussi $\int_1^\infty e^{-t^2}\,dt$ et aussi $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$. On pose $h(x,t) = \dfrac{1}{1+t^2} e^{-xt^2}$. Ce fonction vérifie $h(x,t) \leqslant \frac{1}{t^2+1}$, une fonction intégrable sur $[0,\infty[$ et par la prop. 5.1.3 $g(x)$ existe comme fonction continue.

La substitution $xt^2 = u^2$ donne

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{1+\frac{u^2}{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,du < \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-u^2}\,du = k\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Puisque $\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \dfrac{-t^2}{1+t^2} e^{-xt^2}$ est (si $x \geqslant a > 0$ en valeur absolue majoré par $e^{-at^2}$, une fonction intégrable, par la prop. 5.1.4. aussi $g(x)$ est dérivable pour $x \geqslant a > 0$ et sa dérivée se calcule sous l'intégrale : $g'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{-t^2}{1+t^2} e^{-xt^2}\,dt$ et donc $g'(x) - g(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-u^2}\,du = k\frac{1}{\sqrt{x}}$.

On a (pour $x \leqslant 1$) :

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{x+u^2}\,du \geqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{1+u^2}\,du\right]$$

ce qui diverge si $x \to 0$ et donc $g$ n'est pas dérivable à droite en $x = 0$. Continuer

(10) On a $\frac{1}{1+t^x} \leqslant t^{-x}$ et $t^{-x}$ est intégrable sur $]0,\infty[$ si $x>1$, mais si $x \leqslant 1$ on a $\frac{1}{1+t^x} \geqslant \frac{1}{1+t}$, une fonction avec $\int_0^T = \log(1+T) \to \infty$ quand $T \to \infty$ et donc $F(x)$ n'est pas intégrable si $x \leqslant 1$. Donc $D = ]1,\infty[$.

a) On pose $h(x,t) = \frac{1}{1+t^x}$. Alors $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{t^x \log(t)}{(1+t^x)^2} < t^{-x}\log(t)$ ce qui est intégrable sur $[1,\infty]$ (une primitive est $\frac{1}{-x+1}\log t - \frac{1}{(x-1)^2}t^{a+1}$ qui tend vers zéro quand $x \to \infty$).

b) Le changement de variable $t = 1/u$ donne

$$\int_0^1 \frac{t^x \log(t)}{(1+t^x)^2} = \int_1^\infty \frac{u^{x-2}}{1+u^x)^2} \log u du$$

et donc

$$F'(x) = -\int_1^\infty \left[1 - \frac{1}{t^2}\right] \frac{t^x \log(t)}{(1+t^x)^2} dt < 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{1+t^x} dt &= \int_1^\infty \frac{t^{-x}}{1+t^{-x}} dt \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{t^{-x}+1} \frac{1}{1-x} d(t^{-x+1}) \\
&= \frac{1}{2(x-1)} + \int_1^\infty \text{fonction positive} \geqslant \frac{1}{2(x-1)}.
\end{aligned}$$

Cela montre que $F(x) \geqslant \frac{1}{2(x-1)}$ et donc a limite $\infty$ quand $x \downarrow 1$.

e)

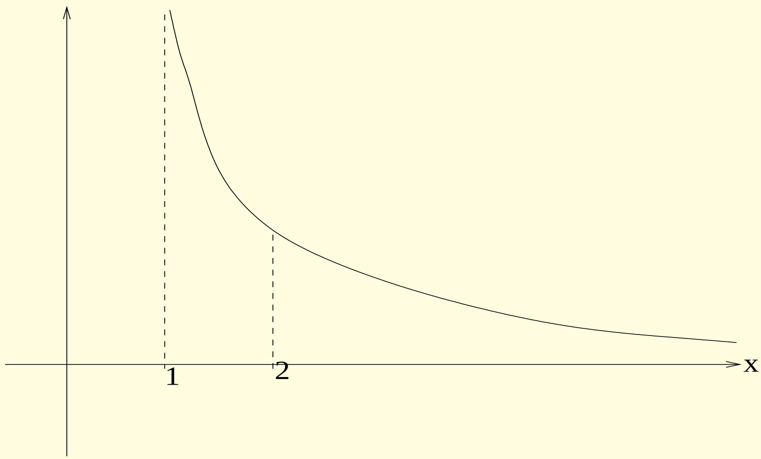


FIGURE 6. Allure de $F(x)$

Continuer

(11) a) On utilise

$$0 \leqslant g(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2} = h(t)$$

plus le fait que $h(t)$ est intégrable (avec intégrale $\arctan(\infty) = \pi/2$).

b) On utilise la même estimation plus le théorème de convergence dominée pour déduire que $f(x)$ est continue. Pour $f'(x)$, on remarque que pour $x \geqslant a > 0$, on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| = \frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{te^{-at}}{1+t^2},$$

une fonction intégrable sur $[0,\infty[$. Par la Prop. 5.1.4 $f(x)$ est dérivable pour $x \geqslant a$ et que

$$f'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x} = \int_0^\infty \frac{-te^{-xt}}{1+t^2}.$$

c) On a l'estimation

$$0 \leqslant g \leqslant e^{-xt}.$$

Si $x > 0$, le changement de variable $u = xt$ donne

$$\int_0^\infty g(x,t)dt \leqslant \int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\cdot\int_0^\infty e^{-u}du = \frac{1}{x}.$$

d) On calcule comme en (b) que

$$f''(x) = \int_0^\infty \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$$

et donc $f'' + f = \int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$ comme vu en (c). Puisque $f \leqslant 1/x$ cette solution tend vers 0 lorsque $x$ tend vers l'infini. Les solutions de l'équation homogène sont $A\sin x + B\cos x$ et donc la solution générale $f + A\sin x + B\cos x$ n'a une limite lorsque $x$ tend vers l'infini que si $A = B = 0$.

e) C'est classique. Par exemple, une intégration par parties donne

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{\cos y}{y} + \frac{\cos x}{x} - \int_x^y \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

Puisque $|\cos y| \leqslant 1$ le premier terme converge vers 0 et la dernière limite est l'intégrale de $\cos t/t^2$ sur $[x,\infty[$. La limite, $s(x)$ existe donc. On remarque aussi l'estimation :

$$\left|\lim_{y\to\infty}\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant 3\cdot\frac{1}{x},$$

qui donne $\lim_{x\to\infty} s(x) = 0$. Pour $c(x)$ c'est pareil.

f) Puisque la dérivée en $x$ de $\displaystyle\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt$ est égal à $-\dfrac{\sin x}{x}$, indépendamment de $y$, on a aussi $s'(x) = -\sin x/x$. Pareil pour $c'(x)$.

g) On vérifie par substitution que $g = s(x)\cdot\cos(x) - c(x)\cdot\sin(x)$ est une solution de l'équation $f'' + f = 1/x$. Puisque $\lim_{x\to\infty} s(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} c(x)$ on doit avoir $f = g$.

h) On a

$$\left|\int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt\right| \leqslant |\log x|,$$

et puisque

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\log x}{x} = 0,$$

on a donc le résultat :

$$\lim_{x\downarrow 0} \left[ (\sin x) \cdot \left( \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt \right) \right] = 0.$$

Donc $f(0) = \pi/2 = \lim_{x\downarrow 0} s(x)$. Continuer

(12) (a)

$$g(x,t) \leqslant 2te^{-t^2} = -\frac{d}{dt}e^{-t^2}$$

montre que $g(x,t)$ est intégrable sur $[0,\infty]$.

(b) La dernière estimation montre que de plus que $\int_1^\infty g(x,t)$ est continue en $x$ en utilisant le Prop. 5.1.3. Donc $f(x)$ est aussi continue.

De plus, $g' = \dfrac{-2t^3e^{-xt^2}}{t^2+1}$ et $|g'| \leqslant h(t) := 2t^3e^{-t^2}$, une fonction intégrable sur $[0,\infty]$ et donc, par la Prop. 5.1.4, $f$ est dérivable et $f' = \int_0^\infty g'\,dt$.

(c) On a

$$g(x,t) \leqslant 2te^{-t^2x} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dt}e^{-t^2x}$$

et donc, par intégration

$$f(x) = \int_0^\infty g(x,t)\,dt \leqslant \frac{1}{x}\left(-e^{-t^2x}\Big|_{t=0}^{t=\infty}\right) = \frac{1}{x}.$$

(d) On calcule

$$f' - f = \int_0^\infty -2te^{-t^2x}\,dt = \frac{1}{x}\left(e^{-t^2x}\Big|_{t=0}^{t=\infty}\right) = -\frac{1}{x}.$$

Puisque $f \leqslant \frac{1}{x}$ on a $\lim_{x\to\infty} f = 0$. La solution de l'équation homogène étant $Ce^x$, la solution générale de (E) est $f(x) + Ce^x$. Cette solution reste bornée lorsque $x$ tend vers l'infinité seulement si $C = 0$.

Continuer avec le chapitre suivant

**Réponses des problèmes du Chapitre 6**

## Le cours est-il compris

(1) Oui : la sphère standard et le bord de l'hypercube standard sont en bijection : utiliser les projection centrales $\pi_{\pm i}$ sur un des plans $x_i = \pm 1$, cela montre aussi qu'on peut trouver une bijection $C^1$ par morceaux. Chaqu'une $2^n$ des pièces du bord est de mesure 0 et donc aussi la réunion.

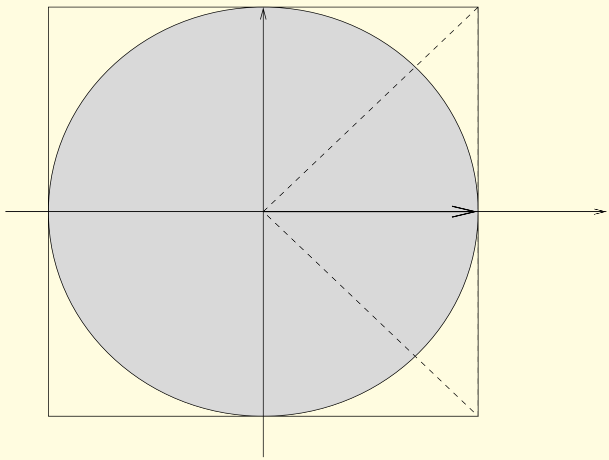

FIGURE 7. Projection $\pi_1$

(2) L'exercice 1 donne une contre-exemple.

(3) Si on rajoute l'hypothèse que le bord de $U$ est négligeable, cela est un cas spécial de 2.6. Si $U$ est ouvert, de $\sum \int_U \varphi_k = \int_U \sum_k \varphi_k = \int_U 1 = \mathrm{vol}(U) < \infty$ plus le fait que $\| f \|$ est bornée, montre qu'aussi $\sum \int_U \varphi_k \cdot |f|$ converge et donc $f$ est intégrable. Si $U$ n'est pas ouvert, $U$ peut être un ensemble sans point intérieur non-négligeable et sa fonction caractéristique (restreint à $U$) est continue, mais pas forcément continue sur (un voisinage de) son adhérence comme montre l'exemple de $U = [0,1] \setminus [0,1] \cap \mathbb{Q}$ : cette fonction n'est pas intégrable.

(4) Oui : cas spécial de 2.5.

(5) Si les fonctions $I_1$ et $I_2$ données par leurs intégrales existent et $f$ est intégrable, alors, par Fubini les intégrales de $I_1$ et $I_2$ sont égales. L'exercice 7 montre que cela n'est pas forcément le cas.

Vers les problèmes

# Les exercices

(1) a) L'ensemble $A = [0,1] \times [0,1] \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ est négligeable et hors de cet ensemble $f = 1$. Chaque suite de points $(x_n, y_n) \in A$ qui converge vers un point $(x, y)$ avec des coordonnées irrationnelles a $y_n = p_n/q_n$, a $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 1$ : $f$ est continue sur le complémentaire de $A$ et donc intégrable d'intégrale $\int_{[0,1]\times[0,1]} 1 = 1$.
b) Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\int f(x, y)dy = 1$ et si $x = \frac{p}{q}$ la fonction $y \mapsto f(\frac{p}{q}, y) = 1 - \frac{1}{q}\mathbb{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable. Mais une fonction $g$ donnée par $g = 1$ sur $[0,1] - ([0,1] \cap \mathbb{Q})$ ne peut pas rendue intégrable en posant $f(y) = 0$ si $y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Donc il n'y a pas de moyen d'attribuer un sens à $\int_0^1 g$. Suite

(2) C’est une application de l’exemple 3.2 Suite

(3) On peut approcher la fonction $f$ par deux suites de fonctions en escalier $e'_n$ et $e_n$ telles que $e'_n \leqslant f \leqslant e_n$. Leurs graphes bornent une réunion de rectangles couvrant le graphe de $f$ et d'aire totale $A_n$ arbitrairement petit. Clairement l'aire de $D_f$ est l'intégrale de $f$.

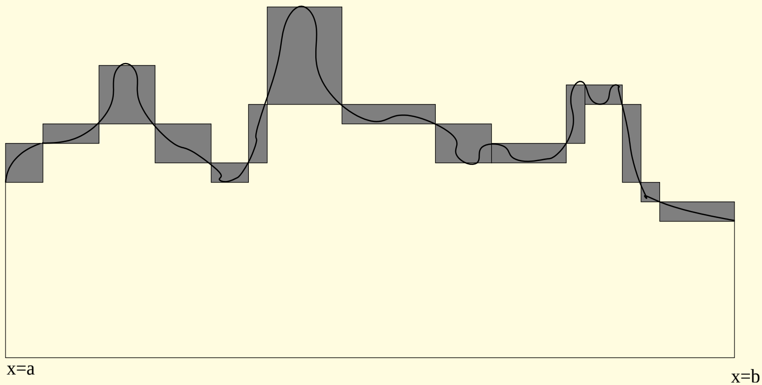


FIGURE 8. $D_f$

Suite

(4) La fonction $f(y) = e^{-y}\dfrac{\sin^2 y}{y}$, $y > 0$ s'étend de façon continue en 0 en posant $f(0) = 0$.Donc $f$ est intégrable sur chaque intervalle $[0, b]$. D'autre part l'estimation $|f(y)| \leqslant e^{-y}$ lorsque $y \geqslant 1$ montre que $f$ est intégrable sur $[1, \infty[$. On calcule

$$I_a = \int_K e^{-y}\sin(2xy)\,dx\,dy$$

d'abord en intégrant suivant $x$ et ensuite suivant $y$. Cela donne $I_a = \int_0^a f(y)dy$ et donc $\mathbb{I} = \lim_{a\to\infty} I_a$. Si on échange l'ordre d'intégration (utilisant $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)))$ :

$$I_a = \int_0^1 \left[\frac{2x}{x^2+1} + \frac{-e^{-a}}{4x^2+1}(-\sin(2ax) + 2x\cos(2ax))\right].$$

Pour $a \to \infty$, la deuxième terme tend vers 0 et donc $\mathbb{I} = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(2)$. Suite

(5) $K$ est la partie commun aux deux disques $D((0,0),1)$ et $D((0,1),1)$. On trouve l'aire :

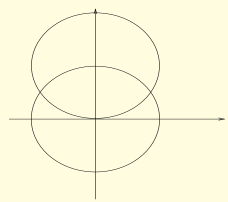

FIGURE 9. Le compact $K$

$$
\begin{aligned}
2\int_{x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}}^{x=\frac{1}{2}\sqrt{3}}\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx\,dy &= 2\int_{x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}}^{x=\frac{1}{2}\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}dx \\
= 2\int_{\theta=2-\pi/3}^{\theta=\pi/3}\cos^2\theta d\theta &= \frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Suite

(6) a) $D_r$ est un quart d'un disque de rayon $r$. La fonction $f$ n'est pas continue en 0, car pour tout $x$, $f(tx,x) = \dfrac{t}{t^2+1}$ et donc le long de cette rayon lim $f = \dfrac{t}{t^2+1} \neq 0$ si $t \neq 0$. Mais $f$ est presque partout continue sur $D_r$ et $f$ reste bornée, car en coordonnées polaires on a $f(r,\theta) = \sin\theta\cos\theta \leqslant 1$ sur le quart disque $D_r$. Donc $f$ est intégrable sur $D_r$.

b) Coordonnés polaires donne

$$g(r) := \int_{D_r} f = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta r dr d\theta = \frac{r^2}{4}.$$

c) Si $f$ serait intégrable sur le quadrant indiqué, alors $\lim_{r\to\infty} g(r)$ serait bornée ce qui n'est pas le cas. Suite

(7) a) $-1$.

b) 1

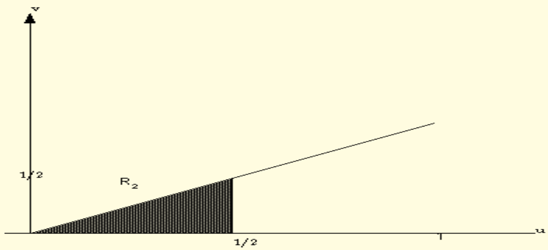


FIGURE 10. Le domaine

c) Sur $R_n$ on trouve $2(u-v) > u$ et $(u+v) \leqslant \frac{3}{2}u$, donc $f > \frac{8}{27}n^2$. Donc on peut par exemple prendre $C = \frac{8}{27}$. S i l'intégrale existait, alors pour une certaine constante $M > 0$, on aurait $I_n = \int_{R_n} f < M$ pour tout $n$ (on remarque que $f \geqslant 0$ sur $R_n$). D'autre part, puisque l'aire de $R_n$ est $1/(2n)$, $I_n \geqslant [C/2]n$ et donc $> M$ si $n$ est suffisamment grand. Contradiction. Suite

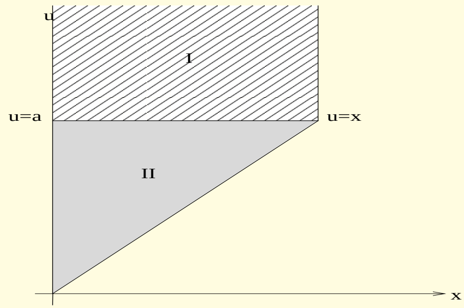


FIGURE 11. Le domaine d'intégration

(8) On applique le théorème de la moyenne pour montrer

$$\left| \int_a^x \frac{\cos u}{u^2} du \right| \leqslant \frac{2}{a^2} + \frac{2}{x^2}$$

et donc, dans la limite : $\left| \int_a^\infty \frac{\cos u}{u^2} du \right| \leqslant \frac{2}{a^2}$ et

$$\left| a \int_a^\infty \frac{\cos u}{u^2} du \right| \leqslant \frac{2}{a}$$

converge vers 0 si $a \to \infty$. On a

$$h(x) := \lim_{y \to \infty} \int_x^y \frac{\sin u}{u} du = \frac{\cos x}{x} - \int_x^\infty \frac{\cos u}{u^2} du$$

et donc

$$\int_0^a h(x)dx = \int_0^a \frac{\cos x}{x}dx - \int_{x=0}^{x=a}\left(\int_{u=x}^{u=\infty}\frac{\cos u}{u^2}du\right)dx.$$

Voir la fig. 11 pour le domaine d'intégration. Note que

$$\int\int_{II}\frac{\cos u}{u^2}dudx = \int_0^a \frac{\cos u}{u}du$$

et donc

$$\int_0^a h(x)dx = -a\cdot\int_a^\infty \frac{\cos u}{u^2}du$$

qui tend vers 0 quand $a \to \infty$.

Vers Chap. 7

**Réponses des problèmes du Chapitre 7**

**Le cours est-il compris**

(1) Oui : on peut prendre n'importe quel intervalle de longueur $2\pi$.

(2) Ces fonctions forment un système orthogonale, mais pas orthonormé.

(3) Oui c'est le corollaire 1.5.

(4) Non en général, le théorème de Dirichlet dit comment on faut prescrire les valeurs dans les points où $f$ n'est pas continue.

(5) C'est clair : une somme fini de fonctions continues est continue.

(6) C'est clair : chaque terme de la somme partielle est un multiple constant de $e^{inx}$, une fonction continue et donc intégrable sur $[0, 2\pi]$.

(7) La fonction $f$ est à valeurs réelles. Les coefficients de Fourier sont (à un multiple de $2\pi$ près) $2\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\,dx$ et $2\pi b_n = -\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx$. Si $f$ est paire, $a_n = 0$ et si $f$ est impaire $b_n = 0$

Vers les exos

(1) $f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ et $\bar{f} \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{c}_n e^{-inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{c}_{-n} e^{inx}$ et donc $f = \bar{f}$ implique $c_{-n} = \bar{c}_n$.

Suite

(2) a) De la définition de $K_n$ et du fait que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1$.

b) De la définition de $K_n$ et du fait que $s_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_k(t)dt = 1$

c) On a $D_k(t) = \frac{1}{e^{ix-1}}(e^{i(k+1)x} - e^{-ikx})$ et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} D_k(t) &= \frac{1}{e^{it}-1}\left[\frac{e^{(n+2)it}-e^{it}}{e^{it}-1} - \frac{e^{-(n+1)it}-1}{e^{-it}-1}\right] \\
&= \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}\left[\frac{e^{(n+\frac{3}{2})it}-e^{i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}} - \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})it}-e^{i\frac{t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}}\right] \\
&= \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{\left(e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}\right)^2}\left[e^{(n+\frac{3}{2})it} - 2e^{-i\frac{t}{2}} + e^{-(n+\frac{1}{2})it}\right] \\
&= \frac{e^{(n+1)it}+e^{(n+1)it}-2}{e^{it}+e^{-it}-2} = \frac{1-\cos(n+1)t}{1-\cos(t)}.
\end{aligned}$$

d) Sur l'intervalle $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, si $|t| > \delta$, alors $\frac{1}{1-\cos(t)} \leqslant \frac{1}{1-\cos(\delta)}$ d'où l'estimation.

e) De la définition $|\sigma_n(x)| \leqslant M\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = M$.

Suite

(3) a)$\sigma_n = (n+1)c_0 + \cdots + c_n \Longrightarrow (n+1)(c_0 + \cdots c_n) - \sigma_n = c_1 + 2c_2 + \cdots + nc_n$ et donc $\left|s_n - \sigma_n\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |kc_k| < M.$

b) Puisque $n\left|c_n(f)\right|$ est bornée, $nc_n$ est bornée et donc aussi $\left|s_n - \sigma_n\right|$ l'est. Mais $s_n = s_n(x)$ et $\sigma_n = \sigma_(x)$ et du fait que $\left|\sigma_n(x)\right| \leqslant \|f\|_{[-\pi,\pi]}$, aussi $\left|s_n(x)\right|$ est uniformément bornée. Suite

(4) a) $f$ est uniformément continue sur $[-\pi,\pi]$.

b) Clair

c) Pour $|t| \geqslant \delta$ sur $[-\pi,\pi]$ on a $K_n(t) \leqslant \dfrac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)} \leqslant \dfrac{\epsilon}{2M}$.

d) On trouve $\displaystyle\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(t)| K_n(t)\,dt \leqslant \frac{\epsilon}{4M} \cdot 2M = \pi\epsilon.$

e) On a

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,dt\right] \leqslant \frac{2\pi\epsilon}{2\pi} = \epsilon.$$

f) Si $\epsilon > 0$, il existe $N$ telle que $\forall n \geqslant N$ on a $|f(x) - \sigma_n(f)| < \epsilon/2$ et $|g(x) - \sigma_n(g)| \leqslant \epsilon$. Mais si $c_n(f) = c_n(g)$ aussi $\sigma_n(f) = \sigma_n(g) = \sigma_n$ et $|f(x) - g(x) \leqslant |f(x) - \sigma_n| + |g(x) - \sigma_n(x)| < \epsilon$ et donc $f = g$.

g) Appliquer f) à $g = 0$.

Suite

(5) a) On trouve $c_m(f) = \dfrac{2(-1)^m}{im}$ et donc

$$s_n(t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{e^{imt} - e^{-imt}}{2i} \cdot \frac{4}{m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{4\sin mt}{m}.$$

De $\left|s_n(t)\right| \leqslant 4M$ on tire $\left|\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{\sin mt}{m}\right| \leqslant M$

b) Prendre $t = 0$ : $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$ diverge !

Retour au cours