GÉOMETRIE DIFFÉRENTIELLE
Notes de MGeom2 (1997–1998)

Chris Peters

Université de Grenoble I
Saint-Martin d'Hères, France

27 Janvier 2000

Sommaire

Chapitre 0. Introduction

Ce cours est la suite du cours "MGeom I". Les notions suivantes sont supposées connnues :

1. La notion d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$,
2. La notion de vecteur tangent et cotangent,
3. Formes différentiables sur $\mathbb{R}^n$ et intégration de formes définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$ de degée n et à support compact,
4. Les partitions d'unité subordonnée à un recouvrement ouvert d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Voici un liste partielle des livres qu'on pourra consulter.

Références

Livres

[**A**] Auslander, L., R. MacKenzie: Introduction to Differentiable Manifolds, Dover (1977),

Commentaire C'est un texte classique avec des exercices utiles. Niveau très bien adapté au cours.

[**B-J**] Bröcker,T., K. Jänich: Einführung in die Differentialtopologie, Springer (1973),
Commentaire §1–§5 sont utiles pour le cours; il y a beaucoup d'exercices. Exposé élémentaire.

[**B-T**] Bott, R., L. Tu: Differential forms in algebraic topology, Springer Verlag (1982),
Commentaire Seul certaines paragraphes du premier Chapitre sont utiles; l'exposition est un peu trop avancée, mais la suite de Mayer-Vietoris est bien expliquée.

[**R**] Rham, G. de: Variétés différentables, Hermann (1960),
Commentaire Les Chapitres I et II sont utiles pour la compréhension des formes différentielles et pour l'intégration. Exposé avancé.

[**W**] Warner, F.W.: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups, Springer Verlag (1993),
Commentaire Les trois premières chapitres sont utiles et on y trouve beaucoup d'exercices. Niveau intermédiaire.

Article

[**B**] Brouwer, L. E. J.: Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl, Math. Ann. **70** (1911), 161–152

Chapitre 1. Variétés différentiables

§ 1. Notions de base

1.1. Définition. Une **variété topologique** de dimension n est un espace topologique séparé X localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Donc chaque point $x \in X$ admet une voisinage ouvert U et un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$:

$$h : U \to h(U) \subset \mathbb{R}^n, \quad h(x) = 0.$$

On appelle (U, h) **une carte locale autour de** x. Les fonctions $y \mapsto x_j(y)$ définies par

$$h(y) = (x_1(y), \dots, x_n(y))$$

s'appellent **coordonnées locales associées**.

1.2. Remarques.

1. Il y a des espaces topologiques non-séparées et localement homéomorphes à $\mathbb{R}^n$.
2. Le nombre n qui figure dans la définition est un invariant topologique, c'est-à-dire qu'un espace topologique séparé ne peut pas en même temps être localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et à $\mathbb{R}^m$, $m \neq n$. C'est un théorème difficile, due à Brouwer ([**Br**]). On verra plus tard que pour les variétés différentiables cela découle immédiatement du théorème des fonctions implicites.
3. Souvent on exige de plus que X soit **paracompacte**, c.à.d. admette une base dénombrable de la topologie.

1.3. Exemples.

1. Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une variété de dimension n.
2. Une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m (voir MGeom1) est une variété de dimension m,
3. Si X et Y sont deux variétés de dimensions n, resp. m, le produit $X \times Y$ est une variété de dimension $n + m$,
4. Un tore de dimension n est l'espace quotient de $\mathbb{R}^n$ par la relation d'équivalence déterminée par un réseau
$$\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n,$$
où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est n'importe quelle base de $\mathbb{R}^n$. C'est une variété de dimension n.
5. L'espace projective $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ des droites passant par l'origine de $\mathbb{R}^{n+1}$ est une variété de dimension n.
6. L'espace projective $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ des droites passant par l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ est une variété de dimension $2n$.

Soit X une variété topologique. Un **atlas** est un recouvrement $\{U, h\}$ de X par des cartes. Les **fonctions de transition** h_{UV} sont définies sur l'intersection de deux cartes (U, h) et (V, k) par la formule

$$h_{UV} = k \circ h^{-1} : h(U \cap V) \to k(V).$$

Ce sont des applications parmi des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et on peut donc se demander si ces fonctions sont dérivables. Si les fonctions de transition sont C^∞ on parle **d'un atlas différentiable**.

1.4. Définition.

1. Une **variété différentiable** est une variété topologique muni d'un atlas différentiable.
2. Une **application différentiable** entre variétés différentiables est une application continue, localement dérivable dans les cartes.
3. Un **difféomorphisme** est une application différentiable bijective telle que l'inverse soit différentiable. S'il y a un difféomorphisme entre deux variétés, ces deux variétés sont **difféomorphes**.

1.5. Exemple. Les exemples ci-dessus sont tous d'exemples des variétés différentiables.

1.6. Définition. Un sous-espace Z d'une variété différentiable X (de dimension $n + k$) est une **sous-variété** si chaque point z de Z admet une carte U centré en z avec coordonnées locales $\{x_1, \ldots, x_{n+k}\}$ telles que

$$U \cap Z = \{y \in U \ ; \ x_{n+1}(y) = \ldots = x_{n+k}(y) = 0\}.$$

Le nombre k s'appelle la **codimension** de Z.

Une sous-variété comme ci-dessus est elle-même une variété différentiable (de dimension $= n$): on prend comme un atlas la réunion des $U \cap Z$ ci-dessus lorsque $z \in Z$ parcourt Z.

1.7. Exemples.

1. Un sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^{n+m+1}$ de dimension $n + 1$ définit une sous-variété de $\mathbb{P}^{n+m}(\mathbb{R})$ difféomorphe à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
2. Considérons l'application

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$f(t) = (2\cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin 2(t - \frac{\pi}{2})).$$

L'image n'est pas une sous-variété du plan, car l'origine est un point 'double'. On peut éviter de créer un point double en considérant la restriction $g = f \mid]0, 2\pi[$ qui est un bijection sur l'image, mais l'image de g n'est pas une sous-variété, car g n'est pas un homéomorphisme sur son image.

§ 2. L'espace tangent et cotangent

2.1. Définition. Soit X une variété différentiable et $x \in X$ un point.

1. Une **germe d'une fonction** en x est une classe d'équivalence des fonctions définies dans des voisinages ouvertes de x, où on considère f et g comme équivalentes si elles sont égales dans une voisinage de x comprise dans le domaine de définition de f et de g.
2. Une **germe de courbe** en x est une classe d'équivalence des courbes passant par x, où on considère deux courbes $\gamma :]-a, a[\to X$, $\gamma(0) = x$ et $\gamma' :]-a', a'[\to X$, $\gamma'(0) = x$ comme équivalentes si $\gamma = \gamma'$ sur une voisinage de 0.

On désigne la germe d'une fonction f par $[f]$ et la germe d'une courbe γ par $[\gamma]$.

On dit que deux courbes γ et γ' passant par x définissent le **même tangent** en x si pour tout fonction définie dans un voisinage de x et dérivable en x on a:

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)|_0 = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma')|_0.$$

En fait, cette notion ne dépend que des germes $[f]$, $[\gamma]$ et $[\gamma']$ et sur les germes de courbes passant par x cela définit une rélation d'équivalence.

2.2. Remarques.

1. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées locales autour de x. Une courbe $x(t)$ est déterminée par son vecteur $X(t)$ de coordonnés $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ et le vecteur tangent associé $\dot{x}(0)$ est uniquement déterminé par le vecteur

$$\dot{X}(0) = (x_1'(0), \dots, x_n'(0)).$$

On désigne par $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ le vecteur tangent qui correspond au k-ième vecteur unité. Donc on a

$$\dot{x}(0) = \sum_k x_k'(0)\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Chaque vecteur tangent s'écrit de telle façon et on peut donc identifier l'ensemble des tangents en x avec un espace vectoriel de dimension n ayant pour base les $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$. On voit donce que la notion de tangent définie ici coincide avec celle donnée dans MGEOM I.

2. Si ξ est le vecteur tangent ξ défini par la courbe γ, alors pour chaque fonction f dérivable autour de x, l'expression

$$X_\xi(f) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)|_0$$

dépend que du vecteur tangent défini par γ et s'appelle **la dérivation de f dans la direction de ξ**. On a bien:

- $X_\xi = X_\eta$ si et seulement $\xi = \eta$ (cela découle des définitions); on peut donc identifier un vecteur tangent avec sa dérivation directionnelle associée.
- X_ξ est une application linéaire

$$\{\text{germes en } x \text{ de fonctions dérivables }\} \to \mathbb{R},$$

qui obéit la règle de Leibniz

$$X_\xi(f \cdot g) = X_\xi(f)g(x) + f(x)X_\xi(g).$$

Une telle application s'appelle **dérivation** en x.

La remarque précédente montre qu'on peut identifier les vecteurs tangents en x avec (certaines) dérivations en x. En effet, toutes ces dérivations peuvent être obtenues comme une dérivation directionnelle:

2.3. Lemme. *Soient $(x_1, \dots, x_n)$ coordonnées locales autour de x. Soit D une dérivation en x et soit $a_k = D(x_k)$. Alors $D = \sum a_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$.*

Démonstration. On considère l'effet de $D' = D - \sum a_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ sur une germe en x d'une fonction $f = f(0) + \sum x_k f_k$. Puisque $D' x_k = 0$, linéarité plus Leibniz montre que $D' f = 0$. ■

Cela montre de nouveau que l'ensemble des vecteurs tangents en x forment un espace vectoriel :

2.4. Corollaire-Définition. *Les vecteurs tangents en x forment un espace vectoriel de dimension n,* **l'espace tangent** *$T_x X$. L'espace duale $T_x^* X$ s'appelle* **l'espace cotangent**.

Une base de $T_x X$ est donnée par $\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\}$ et la base duale de $T_x^* X$ est désignée par $\{dx_1, \dots, dx_n\}$. Cette notation provient de la définition suivante:

2.5. Définition. Soit $[f]$ la germe en x d'une fonction f. Sa **différentielle** df est la forme linéaire sur $T_x X$ définie par

$$df(\xi) = X_\xi f = \sum \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x dx_i.$$

Si $F : X \to Y$ est une application dérivable avec $F(x) = y$, il y a une **application induite**:

$$\begin{array}{c} (F_*)_x : T_x X \to T_y Y \\ \text{tangent déf. par la courbe } \gamma \mapsto \text{tangent déf. par la courbe } F \circ \gamma \end{array}$$

et sa duale

$$\begin{aligned} F_x^* : T_y^* Y &\to T_x^* X \\ dg &\mapsto d(g \circ F). \end{aligned}$$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées autour de x, et $(y_1, \dots, y_m)$ un système de coordonnées autour de y, l'application F se décrit par les fonctions $y_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, \dots, m$ et l'application linéaire $(F_*)_x$ est donnée par rapport aux bases $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial y_m}$ par la matrice jacobienne

$$J(F)_x = \left.\frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_x .$$

2.6. Définition.

1. L'application F est une **immersion en** x si $(F_*)_x$ est injective (i.e. le noyau de $J(F)_x$ est nulle); si de plus F est injective, on dit que F est un **plongement**,
2. L'application F est **une submersion en** x si $(F_*)_x$ est surjective (i.e. le rang de $J(F)_x$ est m),
3. L'application F est un **difféomorphisme local** en x si $(F_*)_x$ est un isomorphisme (i.e. $J(F)_x$ est imversible).

Grâce aux théorèmes des fonctions implicites et des fonctions inverses, on a:

2.7. Critère.

1. *F est une immersion en x si et seulement si F envoit un voisinage de x de façon difféomorphe sur une sousvariété d'un voisinage de y,*

2. *F est une submersion en x si et seulement s'il y a un voisinage U de x difféomorphe à un produit $V \times W$, W voisinage de y, telle que $F|U$ corresponde à la projection $V \times W \to W$.*
3. *F est un difféomorphisme local en x si et seulement s'il y a un voisinage ouvert de x envoyé de façon difféomorphe sur un voisinage de y.*

2.8. Corollaire. *La dimension est un invariant différentiable: si $F : X \to Y$ est un difféomorphisme, alors* $\dim X = \dim Y$.

§ 3. Fibrés vectoriels

Les espaces tangents T_xX, $x \in X$ se recollent en un fibré, le **fibré tangent** TX. Si U est un carte avec coordonnées $\{x_1, \ldots, x_n\}$, les vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1, \ldots, n$ forment une base de T_xX pour chaque point $x \in U$. Donc $TU = \bigcup_{x \in U} T_xX = U \times \mathbb{R}^n$ (avec la topologie produit) et on munit TX par la topologie correspondante ($W \subset TX$ est ouvert si $W \cap TU$ est ouvert pour chaque carte U de l'atlas de X). Les TU peuvent servir comme des cartes de l'espace TX. Cela donne un atlas différentiable de TX: si la fonction de transition au dessus de $U \cap V$ est φ_{UV}, la fonction de transition correspondante au dessus de $T(U \cap V)$ est donnée par $(\varphi_{UV}, J(\varphi_{UV}))$, où $J(-)$ est la matrice jacobienne de $(-)$. L'application naturelle $\pi : TX \to X$ qui à un vecteur tangent en x associe le point x est clairement différentiable. Le couple (TX, π, X) est une example d'un fibré vectoriel de rang n.

Plus généralement on a :

3.1. Définition. Un **fibré de rang** r au dessus d'une variété X est un triplet (E, π, X) d'une variété E et une application diffférentiable $\pi : E \to X$, telle que

a) Les **fibres** de π, $E_x := \pi^{-1}x$ sont des espaces vectoriels de dimension r;

b) Il y un **recouvrement ouvert trivialisant** $\{U\}$ de X, c.à.d telle que $E|U$ soit trivial:

$$\begin{tikzcd}
E|U \arrow[rr, "\phi_U", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi|U"'] & & U \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "p_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, où p_1 est la projection sur le premier facteur et où ϕ_U est un difféomorphisme tel que $\phi_U|E_x : E_x \to x \times \mathbb{R}^r$ soit un isomorphisme linéair.

Si $r = 1$, on dit que E est un **fibré en droites**.

3.2. Exemples.

1. Le fibré tangent de X est un fibré TX de rang $n = \dim X$.
2. Soient F et E deux fibrés au dessus de X. Si pour tout $x \in X$ F_x est un sous-espace de E_x, on parle d'un **sous-fibré** du fibré E. Un sous-fibré est donc une collection $\{F_x\}$ de sous-espaces de E_x pour tout $x \in X$ qui se recollent en un fibré. De même on définit un fibré **quotient** de E comme un fibré G tel que pour tout $x \in X$ la fibre G_x est un quotient de E_x.

3. Si $X \subset Y$ est une sous-variété, le fibré TX est un sous-fibré de la restriction du fibré TY à X. Le **fibré normal** est le fibré quotient: $N_{X|Y} = TX/(TY|X)$.
4. Le fibré tautologique ou **fibré de Hopf** est le sous-fibré du fibré $\mathbb{R}^{n+1}$ au dessus de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ donné au point $[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ par la droite $\mathbb{R}x$ qui définit le point $[x]$.
5. Si E est un fibré, son dual E^* est le fibré tel que la fibre au dessus de $x \in X$ est le dual de la fibre de E en x: $E^*_x = (E_x)^*$. En particulier le **fibré cotangent** est le dual du fibré tangent. De façon similaire, on peut parler des fibrés $\Lambda^k E$ des puissances extérieures de E, resp. son dual $\Lambda^k E^*$: le fibré $\Lambda^k E$ est le fibré dont la fibre au dessus de x est $\Lambda^k E_x$ (et de même pour son dual). Si E est de rang r, le fibré $\det(E) = \Lambda^r E$ est un fibré en droites, le fibré **déterminant**.
6. Si E est un fibré de rang r et F un fibré de rang s, en prenant leur sommes directes fibre par fibre, on obtient le somme directe $E \oplus F$, un fibré de rang $r + s$.

Un **homomorphisme** entre deux fibrés (E, π, X) et (E', π', X) est une application différentiable $F : E \to E'$ telle que $\pi' \circ F = \pi$ (de telle sorte que F applique la fibre au dessus de x en elle-même) et F restreint de façon linéaire aux fibres. On dit que F est un **isomorphisme**, si F admet un inverse différentiable qui est un isomorphisme linéair sur les fibres. Deux fibrés sont **isomorphes** s'il y a un isomorphisme entre eux. Un fibré isomorphe à un fibré produit $X \times \mathbb{R}^r$ est appelé un **fibré trivial**.

Une notion centrale dans la théorie des fibrés est la suivante:

3.3. Définition. Soit (E, π, X) un fibré. Une **section** de E est une application différentiable $s : X \to E$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$.

3.4. Exemple.

1. Un fibré en droites est trivial si et seulement s'il y a une section partout non-nulle.
2. Un champs vectoriel est une section du fibré tangent.

§ 4. Formes différentiables

4.1. Définition. Une **k-forme différentiable** est une section du fibré $\Lambda^k T^* X$.

4.2. Exemples.

1. Soit f une fonction dérivable. Alors sa différentielle df est une 1-forme, donnée localement dans une carte avec coordonnées $\{x_1, \ldots, x_n\}$ par l'expression
$$df = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$
2. Dans une carte U avec des coordonnées $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une 1-forme est donnée localement par une expression
$$\sum_i a_i(x_1, \ldots, x_n) dx_i,$$
où $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction dérivable sur U. Sur l'intersection de U avec une autre carte V avec des coordonnées $\{y_1, \ldots, y_n\}$, l'équation
$$\sum_i a_i(x_1, \ldots, x_n) dx_i = \sum_j b_j(y_1, \ldots, y_n) dy_j$$

montre que l'on a:

$$a_i = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} b_j.$$

3. De même, une k-forme est donnée localement par une expression

$$\sum_I a_I(x_1, \ldots, x_n) dx_I, \quad I = (i_1, \ldots, i_k),\ dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

où a_I est dérivable sur U. Sur l'intersection de $U \cap V$ avec des coordonnées $\{y_1, \ldots, y_n\}$ on a

$$a_I = \sum_J \frac{\partial y_J}{\partial x_I} b_J,$$

où $\frac{\partial y_J}{\partial x_I}$ désigne la matrice jacobienne $\frac{\partial(y_{j_1} \cdots y_{j_k})}{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_k})}$, $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$.

On désigne l'espace vectoriel des k-formes par:

$$A^k X = \{k\text{-formes sur } X\}.$$

On définit la **dérivation extérieure** $d : A^k X \to A^{k+1} X$ d'abord localement sur une carte U avec coordonnées locales $\{x_1, \ldots, x_n\}$ par la formule

$$d\left(\sum a_I dx_I\right) = \sum da_I \wedge dx_I.$$

Cette définition ne dépend pas des coordonnées locales choisies. Pour montrer ça on utilise le fait que pour une application différentiable $F : \Omega \to \Omega'$ ($Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts) on a $F^* d\alpha = dF^* \alpha$ pour toute forme différentiable α sur Ω'. En fait, si $h : U \to \Omega$ et $k : V \to \Omega'$ sont des cartes avec intersection non-vide $U \cap V$ et fonction de transition $h_{UV} = k \circ h^{-1} : h(U \cap V \to \Omega'$, on a pour chaque forme α donnée par α_U resp. α_V sur U resp. V les relations

$$d\alpha|_{U\cap V} = (k^* d\alpha_V)|_{U\cap V} = (h^* \circ h^*_{UV} d\alpha_V)|_{U\cap V} = (h^* dh_{UV} \alpha_V)|_{U\cap V} = (h^* d\alpha_U)|_{U\cap V}.$$

Rappel. Un complexe $A^\bullet = (A^k, d^k), k = 0, \ldots,$ d'espaces vectoriels consiste en espaces vectoriels A^k et des applications linéaires $d^k : A^k \to A^{k+1}$ telles que $d^{k+1} \circ d^k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Les groupes de cohomologie sont définies par

$$H^k(A^\bullet) = \frac{\ker (d^k : A^k \to A^{k+1})}{\operatorname{im} (d^{k-1} : A^{k-1} \to A^k)}$$

On a donc un complexe $A^\bullet(X)$ d'espaces vectoriels, le **complexe de De Rham**. Une k-forme α telle que $d\alpha = 0$ est appelée k-forme **fermée** et si $\alpha = d\beta$, on parle d'une k-forme **exacte**. Les **groupes de De Rham** sont les groupes de cohomologie du complexe de de Rham peuvent donc être définis par:

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X) := \frac{k\text{-formes fermées}}{k\text{-formes exactes}}, \quad k\text{-ième groupe de De Rham.}$$

4.3. Exemples.

1. Soit X connexe. Alors $H^0_{\mathrm{DR}} X = \mathbb{R}$ est engendré par la fonction constante 1.
2. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-emsemble étoilé. Le lemme de Poincaré dit que pour $k \geq 1$ chaque k-forme fermée sur U est exacte (voir MGeom I). Donc $H^k_{\mathrm{DR}} U = 0$, $k \geq 1$.
3. Par un calcul direct on montre que $H^1_{\mathrm{DR}}(S^1) = \mathbb{R}$.

Les groupes de De Rham héritent du produit extérieur la structure d'une algèbre. En fait, la dérivation extérieure et le produit extérieur

$$A^r X \times A^s X \xrightarrow{\wedge} A^{r+s} X$$

se comportent suivant la règle

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$$

et donc, si α et β sont fermées, aussi $\alpha \wedge \beta$ l'est et si en outre l'un parmi eux est exacte, aussi le produit des deux l'est. On a donc un produit extérieur

$$\begin{aligned} H^r_{\mathrm{DR}} X \times H^s_{\mathrm{DR}} X &\to H^{r+s}_{\mathrm{DR}} X \\ [\alpha], [\beta]) &\mapsto [\alpha \wedge \beta] \end{aligned}$$

qui donne

$$H_{\mathrm{DR}} X = \bigoplus_{r=0}^{n} H^r_{\mathrm{DR}} X$$

la structure d'une algèbre graduée. Ce produit est (anti)-commutative car

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \cdot \deg \beta} \beta \wedge \alpha.$$

Le comportement de cette structure sous les applications dérivables est décrite par la proposition suivante qui généralise la situation d'une application dérivable parmi des ouverts d'une espace vectoriel.

4.4. Proposition. *Soit $F : X \to Y$ une application dérivable. Alors, si $x \in X$ et $y = F(x)$ l'application $F^* : T_y Y \to T_x X$ induit des applications $\mathbb{R}$-linéaires $F^* : A^k Y \to A^k X$, $k = 0, \ldots, m = \dim Y$, telle que*

1) $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta)$,
2) $F^*(d\alpha) = d(F^*\alpha)$.

Si, de plus $G : Y \to Z$ est une application dérivable, on a $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.

Démonstration. Si, localement en coordonnées $\{x_1, \ldots, x_n\}$, on a $\alpha = \sum \alpha_I dx_I$, on pose $F^*\alpha = \sum_I (\alpha_I \circ F) d(x_I \circ F)$. C'est facile à vérifier que c'est bien-défini et par construction (1) est vrai. La propriété (2) se montre par récurrence à deg α, le cas deg $= 0$ étant clair: on écrit $\alpha = \alpha' \wedge \alpha''$ avec deg $\alpha' = 1$ et alors

$$\begin{aligned} d(F^*\alpha) = d(F^*(\alpha' \wedge \alpha'')) &= d(F^*\alpha' \wedge F^*\alpha'') = \\ &= d(F^*\alpha') \wedge F^*\alpha'' - F^*\alpha' \wedge d(F^*\alpha'') = \\ &= F^*(d\alpha') \wedge F^*\alpha'' - F^*\alpha' \wedge F^*(d\alpha'') = \\ &= F^*(d\alpha' \wedge \alpha'' - \alpha' \wedge \alpha'') = F^*(d\alpha). \end{aligned}$$

La dernière assertion est claire. ■

4.5. Corollaire. *Si $F : X \to Y$ est une application différentiable, il y a des applications linéaires induites $F^* : H^k_{\mathrm{DR}} Y \to H^k_{\mathrm{DR}} X$ telles que $F^*([\alpha] \wedge [\beta]) = F^*[\alpha] \wedge F^*[\beta]$. De plus, si F est un difféomorphisme, F^* est un isomorphisme d'algèbres; les groupes de De Rham donnent donc des invariants différentiables.*

§ 5. Intégration

On suppose désormais que X est **paracompacte**, c.à.d., qu'il y a une base dénombrable pour la topologie. De façon équivalente (voir par exemple [**A**], p. 102–104) , chaque recouvrement ouvert de X admet un raffinement localement fini. L'intérêt de cette propriété est que chaque recouvrement ouvert $\{U\}$ de X admet une partition de l'unité subordonnée : des fonctions $\rho_U : X \to [0,1]$ avec support contenu dans U et telle que chaque $x \in X$ admet un voisinage qui ne recontre q'un nombre fini des supports ρ_U, U membre du recouvrement, de tel sorte que la somme $\sum_U \rho_U(x)$ est fini et est égale à 1.

5.1. Exemples. Une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est une variété paracompacte, ainsi qu'une variété compacte (n-tore, espace projectif $\mathbb{P}^n$).

5.2. Définition. Soit X une variété différentiable de dimension n. Une **orientation** de X est une n-forme partout non-nulle. Si une telle forme existe, on dit que X est **orientable**. Deux orientations ω et ω' sont équivalentes si $\omega = a\omega'$ avec a une fonction partout positive. Deux orientations équivalentes définissent la même orientation. Une variété orientable muni d'une classe d'équivalence d'orientation est appelée une **variété orientée**. Un **atlas orienté** d'une variété orienté $(X, [\omega])$ est un atlas différentiable tel que pour les coordonnées locales $\{x_1, \ldots, x_n\}$ on ait $\omega = a dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ avec $a > 0$. De telles coordonnées forment un **système de coordonnées positif.**

Si X est connexe, c'est facile à voir qu'il y a au plus deux orientations donné par ω et $-\omega$.

5.3. Exemples.

1. Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est orientable. Les coordonnées standard $\{x_1, \ldots, x_n\}$ définissent l'orientation standard. U muni de ces coordonnées est un atlas orienté.
2. Un n-tore est orientable.
3. Une variété connexe est orientable si et seulement s'il y a un atlas différentiable telle que les fonctions de transition aient une jacobienne partout positive. En fait, un atlas orienté a cette propriété et réciproquement, avec une partition de l'unité ρ_U subordonnée à un atlas orienté $\{U\}$ avec coordonnées $\{x_1^U, \ldots, x_n^U\}$, la n-forme $\sum_U \rho_U dx_1^U \wedge \ldots \wedge dx_n^U$ définit une orientation.

Moyennant une partition de l'unité subordonnée à un atlas orienté on peut intégrer les n-formes α :

$$\int_X \alpha := \sum_U \int_{\mathbb{R}^n} (\rho_U \cdot \alpha),$$

où on considère $(\rho_U \cdot \alpha)$ comme une n-forme sur $\mathbb{R}^n$ via la carte $p : U \to \mathbb{R}^n$. On vérifie que c'est indépendant des choix et que la définition coincide avec la définition donnée en MGeom I.

§ 6. Variétés à bord et Stokes

Si dans la définition de carte d'un atlas différentiable on admet des ouverts homéomorphes à un ouvert de la demi-espace

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n \geq 0\}$$

on arrive à la notion d'une **variété à bord**. Un point $x \in X$ d'une variété à bord qui par une carte autour de x s'applique au bord de $\mathbb{H}^n$, s'applique au bord par n'importe quel autre carte autour de x. Un tel point s'appelle **point du bord** ∂X. Les cartes induisent sur ∂X la structure d'une variété différentiable de dimension $n-1$ et sur $X \setminus \partial X$ la structure d'une variété différentiable de dimension n.

Pour $x \in X$ l'espace tangent $T_x X$ est un espace vectoriel de dimension n, même si $x \in \partial X$. Pour un tel point on peut aussi parler d'une **vecteur tangent à direction intérieure et extérieure**: si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est un système de coordonnées centé en x, une vecteur tangent $\sum_i a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ avec $a_n > 0$, resp. $a_n < 0$ a une direction intérieure, resp. extérieure. Cette notion ne dépend pas des coordonnées, car si $\{y_1, \ldots, y_n\}$ est un autre système de coordonnées, on montre facilement que $\dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} > 0$ sur l'intersection. Cette remarque montre aussi qu'une orientation de X, défini par un atlas orienté, induit une orientation sur le bord ∂X. Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est un système de coordonnées positives centré en $x \in \partial X$, alors **l'orientation induite** est donné par la $n-1$-forme $(-1)^n dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$.

6.1. Théorème. *Soit X une variété à bord, compacte, connexe et orientée. On munit ∂X de son orientation insuite. Soit $i : \partial X \to X$ l'inclusion naturelle. Alors pour chaque $n-1$-forme β sur X on a*

$$\int_X d\beta = \int_{\partial X} i^* \beta \quad (= 0 \quad \text{si } \partial X = \emptyset).$$

Moyennant une partition de l'unité ce théorème est facilement reduit au cas d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, où l'on a montré pour dans la partie I.

6.2. Corollaire. *Soit X une variété compacte et orientable de dimension n. Alors $H^n_{\mathrm{DR}} X \neq 0$.*

Démonstration. Soit ω une orientation. Alors $\int_X \omega > 0$ et donc on ne peut pas avoir $\omega = d\beta$, car dans ce cas $\int_X \omega = \int_X d\beta = 0$ par Stokes. ■

Remarque. On peut montrer que $H^n_{\mathrm{DR}}(X) = \mathbb{R}$ pour une variété orientable et connexe.

Exercices.

1. Montrer que les équations

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2^2 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

   définissent une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est compacte.

3. Une application projective de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une bijection qui transforme les droites en droites.
   a. Montrer qu'une bijection T de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est projective si et seulement si T transforme les hyperplans en hyperplans.
   b. Montrer que $A \in \mathrm{Gl}(n+1, \mathbb{R})$ induit une application projective et que chaque application projective est ainsi obtenue.

4. Soient $C = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ et $D = \{x_1^2 - x_2^2 = 1\}$ deux coniques en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ donnés en coordonnées inhomogènes (x_1, x_2). Montrer qu'il y a une application projective T de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ telle que $T(C) = D$.

5. Construire sur le n-tore T n 1-formes fermées indépendantes.

6. Montrer que l'application
$$\begin{cases} y_1 = x_1 \sin x_3 + x_2 \cos x_3 \\ y_2 = x_1 \cos x_3 - x_2 \sin x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$
induit un difféomorphisme de S^2.

7. Soit X une variété C^∞ et $i : X \to X$ une involution sans point fixe (c.à.d. un difféomorphisme i tel que $i(x) \neq x$, $\forall x \in X$).
   a. $X/\langle 1, i\rangle = Y$ muni de la topologie quotiente est une variété topologique,
   b. La variété Y admet une unique structure de variété C^∞ tel que la projection naturelle $p : X \to Y$ soit un difféomorphisme local.

8. Soit X une variété de dimension n qui est un produit de sphères. Montrer qu'il y a un plongement $X \times \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. (Indication: on cherchera d'abord un plongement $S^m \times \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$.

9. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) &\to \mathbb{P}^{nm+n+m-1} \\ ((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_m)) &\mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : \cdots : x_ny_m) \end{aligned}$$
est un plongement.

10. Soit $f : S^n \to \mathbb{R}$ différentiable. Montrer qu'il y a deux points différents x, y tel que $(f_*)_x = 0 = (f_*)_y$.

11. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable telle que $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(tx) = tf(x)$. Montrer que f est une application linéaire.

12. Montrer que TS^1 est trivial.

13. Soit X une variété C^∞ connexe et $f : X \to Y$ une application différentiable telle que $(f_*)_x = 0$ pour tout $x \in X$. Montrer que f est constante.

14. Montrer que le fibré de Hopf sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ n'est pas trivial.

15. Donner un champ vectoriel sur S^2 ayant précisément 2 zéros. Construire un champs avec un seul zéro sur S^2.

16. On dit qu'un fibré E est **stablement trivial** s'il y a un fibré trivial F telle que $E \oplus F$ soit trivial. Montrer que le fibré tangent de S^n est stablement trivial. (Indication: considérer le fibré normal).

17. Soit X une variété C^∞ de dimension n et $\Delta \subset X \times X$ le diagonale.
    a. Montrer Δ est une sous-variété de $X \times X$ difféomorphe à X.
    b. Montrer que le fibré tangent de Δ est isomorphe au fibré normal de Δ dans $X \times X$.

18. Soit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symétrique. Montrer que pour $b \neq 0$, la **quadrique** $\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ {}^t x A x = b\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de codimension 1.

19. Soit d un entier positif. La **variété de Brieskorn** $W^{2n-1}(d)$ est définie comme l'ensemble des points $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que
$$\begin{cases} z_0^d + z_1^2 + \cdots + z_n^2 &= 0 \\ z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 + \cdots z_n\bar{z}_n &= 2 \end{cases}$$
Montrer que $W^{2n-1}(d)$ est une variété de dimension $2n-1$.

20. Pour $m \leq n$ on définit les **variétés de Milnor**:

$$V(m,n) = \{(z,w) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \ ; \ \sum_{i=0}^{m} z_i w_i = 0\}.$$

Montrer que $V(m,n)$ est une variété de dimension $2(m+n-1)$.

21. Soit $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n. On montrera:
    a. $O(n)$ est une variété différentiable dont on déterminera sa dimension.
    b. $O(n)$ est compacte et a 2 composantes connexes,
    c. Le produit $(A,B) \mapsto AB$ ainsi que l'inverse $A \mapsto A^{-1}$ sont différentiables. Cela donne un exemple d'un **groupe de Lie**.

22. On considère $U(n)$, l'ensemble des matrices unitaires de taille n, comme un sous-ensemble de $O(2n)$. Montrer que $U(n)$ est en effet une sous-variété de $O(2n)$ dont on déterminera la codimension.

23. Soient $f_i : X_i \to Y$, $i = 1,2$ deux applications C^∞. On dit qu'elles sont **transverses** si pour tout $x_1, x_2 \in X$ avec $f_1(x_1) = f_2(x_2) = y$ on a $(f_1)_* T_{x_1} X_1 + (f_2)_* T_{x_2} X_2 = T_y Y$. Montrer que si f_1 et f_2 sont transverses, le **produit fibré**

$$X_1 \times_Y X_2 = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \ ; \ f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$$

est une sous-variété de $X_1 \times X_2$.

Chapitre 2. Cohomologie de De Rham

§ 1. Lemme de Poincaré (II)

1.1. Définition. Soient $f, g : X \to Y$ deux applications différentiables. On dit que f est **homotope à** g (en signe $f \sim g$) s'il existe une **homotopie entre** f **et** g, c.à.d. une application différentiable

$$F : X \times [0,1] \to Y$$

telle que $F(x,0) = f(x)$ et $F(x,1) = g(x)$, $x \in X$.

1.2. Exemples.

1. Un sous-ensemble $A \subset X$ est **une retracte de déformation**, s'il y a une retraction $r : X \to A$, c.à.d. $r|A = \mathrm{id}_A$ telle que $i \circ r \sim \mathrm{id}_X$.
2. Une variété est **contractile** si l'application constante $e_x : X \to x$ est une rétraction. On a donc : $\mathrm{id}_X \sim e_x$. Un sous-ensemble ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ est une exemple d'une variété contractile.

1.3. Théorème. *Soient $f, g : X \to Y$ deux applications différentiables homotopes. Alors $f^* = g^* : H_{\mathrm{DR}}Y \to H_{\mathrm{DR}}X$.*

Démonstration.

Soit $F : X \times I \to Y$ l'homotopie entre f et g et soit

$$\begin{aligned} i_t :& X \hookrightarrow X \times I = [0,1] \\ & x \mapsto (x,t) \end{aligned}$$

l'inclusion. On a $F(x,t) = F(i_t(x))$ et il suffit donc de montrer qu'en cohomologie $i_0^* = i_1^*$. Or, dans la démonstration du Lemme de Poincaré on a construit un opérateur d'homotopie au niveau de formes:

$$\begin{aligned} K : A^k(X \times I) &\to A^{k-1}X \\ d \circ K + K \circ d &= i_1^* - i_0^*. \end{aligned}$$

En fait, si $\alpha \in A^k(X \times I)$ s'écrit en coordonnées locales comme

$$\alpha = \sum_J \alpha_J(x,t) dt \wedge dx_J + \text{forme sans } dt$$

l'opérateur K est défini par

$$K\alpha = \sum_J \left(\int_0^1 \alpha_J(x,t) dt\right) dx_J.$$

On voit facilement que l'existence de K implique qu'en cohomologie $i_1^* = i_0^*$. ■

1.4. Exemples.

1. Si $A \subset X$ est une rétracte de déformation, l'inclusion induit un isomorphisme $H_{\mathrm{DR}}X \cong H_{\mathrm{DR}}A$.
2. En particulier, si X est contractile, $H^k_{\mathrm{DR}}X = 0$ pour $k \geq 1$.

§ 2. Mayer-Vietoris

La suite exacte de Mayer-Vietoris est une suite exacte de complexes et c'est un outil de calcul très fort. Avant d'expliquer la situation, expliquons brièvement la notion d'une suite exacte d'espaces vectoriels. On dit qu'une suite

$$\to \cdots A^{k-1} \xrightarrow{f^{k-1}} A^k \xrightarrow{f^k} A^{k+1} \to \cdots$$

(avec A^p des espaces vectoriels et f^p des applications linéaires) est **exacte**, si $\forall k$, ker $f^k =$ im f^{k-1}. En particulier, on a des suites courtes

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

qui sont exactes si et seulement si

1. f est injectif,
2. ker $g =$ im f,
3. g est surjectif.

Un complexe $C^\bullet = \{C^p \xrightarrow{d_p} C^{p+1} \cdots \xrightarrow{d_{q-1}} C^q\}$ n'est pas exacte. Leurs groupes de cohomologie mesurent la déviation d'exactitude: le complexe $C^\bullet$ est exacte si et seulement si $H^{p+1}(C^\bullet) = \cdots H^{q-1}(C^\bullet) = 0$. Rappelons aussi la notion d'un **morphisme** $C^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} D^\bullet$ **de complexes**: on a des applications linéaires $f^k : C^k \to D^k$ telles que les diagrammes suivants soient commutatifs:

$$\begin{array}{ccc} C^k & \xrightarrow{f^k} & D^k \\ \Big\downarrow d^k & & \Big\downarrow d^k \\ C^{k+1} & \xrightarrow{f^{k+1}} & D^{k+1} \end{array}.$$

Avec cette notion, on introduit la notion d'une suite exacte courte de complexes

$$0 \to A^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} C^\bullet \to 0.$$

On exige que non seulement pour chaque k les suites courtes correspondantes

$$0 \to A^k \xrightarrow{f^k} B^k \xrightarrow{g^k} C^k \to 0$$

soient exactes, mais aussi que les $f^\bullet$ et les $g^\bullet$ soient des morphismes de complexes.

Pour Mayer-Vietoris on s'intéresse à la situation suivante.

$$X = U \cup V, \quad U \text{ et } V \text{ ouvert}$$

avec les inclusions naturelles

$$i_U : U \to X \quad \text{et} \quad i_V : V \to X,$$
$$j_U : U \cap V \to U \quad \text{et} \quad j_V : U \cap V \to V$$

2.1. Mayer-Vietoris. *La suite de complexes*

$$0 \longrightarrow A^\bullet(X) \xrightarrow{i_U^\bullet \oplus i_V^\bullet} A^\bullet(U) \oplus A^\bullet(V) \xrightarrow{j_V^\bullet - j_U^\bullet} A^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Les compatibilités avec les dérivations extérieures est automatique. Reste donc à montrer l'exactitude à chaque niveau k. Or, on voit facilement que la seule assertion non-triviale est la surjectivité de $j_V^k - j_U^k$. Soit $\{\rho_U, \rho_V\}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{U, V\}$. Si $\alpha \in A^k(U \cap V)$, alors $\rho_V \alpha$ est bien-défini sur U, tandis que $\rho_U \alpha$ est bien-définie sur V. L'équation $j_U^k(\rho_V \alpha) - (-j_V^k(\rho_U \alpha)) = \alpha$ montre alors la surjectivité.

■

Si $f^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ est un morphisme de complexes, on a une application linéaire induite en cohomologie $H^k(f) : H^k(C^\bullet) \to H^k(D^\bullet)$.

2.2. Exemple. Soit $f : X \to Y$ une application différentiable entre variétés C^∞. Alors les applications induites $f^* : A^k(Y) \to A^k(X)$ respectent les dérivations extérieures et donc induisent un morphisme de complexes de De Rham: $f^\bullet : A^\bullet Y \to A^\bullet X$ et donc $H^k(f) : H^k_{\mathrm{DR}} Y \to H^k_{\mathrm{DR}} X$.

En général, on montre que pour une suite exacte de complexes:

$$0 \to A^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} C^\bullet \to 0$$

on peut définir des applications linéaires (**morphismes de cobord**):

$$\partial^k : H^k(C^\bullet) \to H^{k+1}(D^\bullet)$$

telle que la suite suivante soit exacte (**suite longue de la cohomologie**):

$$\cdots \to H^k(A^\bullet) \xrightarrow{H^k(f^\bullet)} H^k(B^\bullet) \xrightarrow{H^k(g^\bullet)} H^k(C^\bullet) \xrightarrow{\partial^k} H^{k+1}(A^\bullet) \to \cdots$$

Appliquant cela à la suite de Mayer-Vietoris on trouve:

2.3. Corollaire. *Il y a une suite exacte*

$$\cdots \to H^k(X) \xrightarrow{i_U^* \oplus i_V^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{j_V^* - j_U^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(X) \to \cdots$$

§ 3. Calcul de quelques groupes de De Rham

La suite de Mayer-Vietoris peut être utilisée pour le calcul des groupes de De Rham des sphères S^n en remarquant que $S^n \setminus \{p\}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$. Si on pose $U = S^n \setminus \{(1, 0, \ldots, 0)\}$, $V = S^n \setminus \{(-1, 0, \ldots, 0)\}$, l'intersection $U \cap V$ se contracte sur l'équator S^{n-1}. Par récurrence les groupes de S^{n-1} sont connues et Mayer-Vietoris montre que $\partial : H^k(S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H^{k+1}(S^n)$ si $k \geq 1$. En somme, on trouve:

3.1. Proposition. *Les groupes de De Rham de S^n sont*

$$H^k_{\mathrm{DR}}(S^n) = \begin{cases} 0 & si\ 0 < k < n \\ \mathbb{R} & si\ k = 0, n. \end{cases}$$

De façon similaire on calcule les groupes pour les espaces projectives $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en remarquant que $U = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus$ hyperplan à l'infini est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, que $V = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus \{(1 : 1 : \cdots : 1)\}$ se retracte sur l'hyperplan $\mathbb{P}^{n-1}$ à l'infini, et que $U \cap V$ se retracte sur S^{n-1}. Mayer-Vietoris donne:

3.2. Proposition.

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} 0 & \textit{si } 0 < k < n \\ \mathbb{R} & \textit{si } k = 0 \\ \mathbb{R} & \textit{si } k = n \textit{ est impaire} \\ 0 & \textit{si } k = n \textit{ est paire} \end{cases}$$

§ 4. Applications

A. Points fixes.

Une application célèbre est:

4.1. Théorème du point fixe de Brouwer. *Une application différentiable de la boule* $D := x_1^2 + \cdots x_n^2 \leq 1$ *admet au moins une point fixe.*

Démonstration. Si non, soit $f : D \to D$ une application sans points fixe. On trace la demi-droite qui commence à $f(x)$ et passe par x. Soit $r(x)$ le point d'intersection avec le bord ∂D. L'application $r : D \to \partial D = S^{n-1}$ est une retraction, car $r|\partial D = \mathrm{id}$. Avec $j : \partial D \hookrightarrow D$ l'inclusion, cela s'exprime aussi comme $r \circ j = \mathrm{id}$. En cohomologie on aurait alors une factorisation de $\mathrm{id}^* : H^{n-1}(S^{n-1}) \to H^{n-1}(S^{n-1})$ en $\mathbb{R} = H^{n-1}(S^{n-1}) \to 0 = H^{n-1}(D) \to H^{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{R}$. Cette contradiction montre le théorème. ■

B. Le degré d'une application.

Soit X une variété différentiable de dimension n que l'on suppose connexe et orientée et soit $\omega \in A^n(X)$ une n-forme qui donne l'orientation. On a montré que sa classe est non-nulle en cohomologie et on a remarqué (mais pas montré) que en effet cette classe engendre $H^n_{\mathrm{DR}}X$. Dans ce qui suit on admet cela pour simplifier. On l'appliquera pour des variétés où on l'a calculé. Soit $f : X \to X$ une application différentiable. Alors le **degré** de f est le nombre $d(f)$ défini par l'equation (dans $H^n_{\mathrm{DR}}(X)$):

$$f^*[\omega] = d(f)[\omega].$$

On peut montrer que ce nombre est toujours un **entier**.

4.2. Exemples.

1. Une application constante a le degré 0.
2. L'application $f : S^1 \to S^1$ induite par $z \mapsto z^k$ a le degré k.
3. L'application antipodale $a : S^n \to S^n$ a le degré $(-1)^{n+1}$. En effet, dans $\mathbb{R}^{n+1}$ la restriction de la forme

   $$\omega = \sum (-1)^k x_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$$

   au sphère unité donne une orientation et $a^*\omega = (-1)^{n+1}\omega$.

Voici quelques applications

4.3. Applications.

1. Si n est pair, S^n n'admet pas de champs vectoriel partout non-nul. Sinon on construit une homotopie entre id et a comme suit. Soit $v(x)$ une vecteur du champ tangent en x et soit $S(x)$ le demi grand cercle tel que $v(x)$ touche $S(x)$ à l'intérieur et soit $f_t(x)$ le point sur $S(x)$ qui divise $S(x)$ suivant le rapport $(t : 1-t)$. Alors $(x,t) \mapsto f_t(x)$ est l'homotopie recherchée. Puisque le degré de l'identité est 1 et celui de l'application antipodale -1, on arrive à une contradiction.

   Si n est impair, c'est facile à contruire un champs tangent partout non-nul.
2. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si n est impair.

3. Le théorème fondamental de l'algèbre se montre facilement à l'aide de la notion de degré. En effet, soit

$$p(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

un polynôme de degré ≥ 1. Considérons l'application

$$f(z) = \frac{p(z)}{|p(z)|} : S^1 \to S^1.$$

Si $p(z)$ est partout non-nulle, c'est bien défini et on montre que forcément le degré est nul. D'autre part, en comparaison avec $f(Rz)$, R très grand, on voit que le degré est $k \geq 1$.

Exercices.

1. Un champ vectoriel d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est une section différentiable du fibré $T\mathbb{R}^n|S$. Montrer qu'un champs vectoriel de S^n est orthogonal à S^n en au moins un point de S^n (**Théorème du hérisson**).

2. Montrer que le pour $n \geq 2$ le n-tore n'est pas difféomorphe à S^n (Indication: utiliser les 1-formes fermées).

3. Soit $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to S^n$ continue. Pour $x \in S^n$, l'image dans $\mathbb{P}^n$ est noté $[x]$.

   a Montrer qu'il y a une unique application continue $\tilde{f} : S^n \to S^n$ de f tel que $\forall x \in S^n$, $\tilde{f}(x) = f([x])$. Un tel **relèvement** est déterminé par le choix d'un des préimages $\{x_0, -x_0\}$ d'un seul point $[x_0] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Montrer que $\tilde{f}$ est différentiable si f l'est.

   b Montrer que toute application C^∞ de $\mathbb{P}^{2n}(\mathbb{R})$ dans lui-même a toujours un point fixe.

4. Soit B^n la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et soit $g : B^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^∞ sans point fixe. Montrer que l'angle entre OP et $Og(P)$ admet chaque valeur entre 0 et π lorsque P varie sur S^{n-1}.

5. On considère S^{n-1} comme l'intersection de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avec le plan $x_{n+1} = 0$ ("l'équator"). Montrer qu'une application différentiable $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ s'étend de façon naturelle à $S(f) : S^n \to S^n$ fixant les deux "pôles" $(0, \ldots, 0, \pm 1)$. Montrer que le degré de $S(f)$ est le même que le degré de f. Conclure que pour tout entier k il y a une application $g : S^n \to S^n$ de degré k.

6. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme et soit $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application dérivable bornée. Montrer qu'il y a au moins un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x) = G(x)$.

Chapitre 3. Quelques exercices supplémentaires

1. Soit X une variété C^∞. On dit que $S \subset X$ est **de mesure zéro** si pour tout carte $U \subset X$ l'intersection $U \cap S$ est de mesure zéro. (Rappel: on dit que $S \subset \mathbb{R}^n$ est de mesure 0 si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver des hypercubes $Q_1, Q_2, \ldots, ..$ dont la réunion recouvre S et dont la volume $\leq \epsilon$). Le but de cet exercice est de montrer que si $f : M \to N$ est une application dérivable et dim $M <$ dim N, alors $f(M)$ est de mesure zéro en N.
   a. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $F : U \to \mathbb{R}^n$ dérivable. Montrer que l'image $F(S)$ d'un sous-ensemble de mesure zéro $S \subset U$ est de mesure zéro.
   b. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $F : U \to \mathbb{R}^m$ dérivable. Montrer que $F(U)$ est de mesure 0 si $n < m$.
   c. Conclure.

2. Soit X une variété différentiable de dimension n. Le but de cet exercice est de montrer qu'il y a un plongement de X dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ (**Théorème de Whitney**). Pour simplifier on suppose que X soit compacte.
   a. Construire un atlas $\{U_i, \phi_i\}, i = 0, \ldots, m$ de X tel que $\phi_i(U_i)$ est la boule $B(0,3) \subset \mathbb{R}^n$ et les $\phi_i^{-1}B(0,1)$ recouvrent X. On appelle un tel atlas un **atlas normalisé**.

   On pose $U_i(r) = \phi_i^{-1}B(0,r)$ On construit d'abord un plongement $f : X \to \mathbb{R}^N$, $N = nm$:
   b. Construire une fonction $\tau_k : X \to [0,1]$ ayant support dans $U_k(2)$ telle que $\tau_k(x) = 1$ si $x \in U_k(1)$.
   c. On définit $\Phi_k : X \to \mathbb{R}^n$ comme suit
   $$\Phi_k(x) = \begin{cases} \tau_k(x)\phi_k(x) & \text{si } x \in U_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m) : X \to \mathbb{R}^{nm}$ est un plongement.

   Ensuite on veut projeter X dans $\mathbb{R}^{N-1}$ d'un point bien choisi. On voit $\mathbb{R}^N$ comme la partie finie de $\mathbb{P}^N$ et on considère les directions parallèles dans $\mathbb{R}^N$ comme des points dans l'hyperplan $P \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{R})$ à l'infini. Les directions tangents à un point de X forment un sousensemble $PTX) \subset P$ et les cordes de X (droites qui passent par au moins deux points différents de X) remplient un sousensemble $CX \subset P$.
   d. Montrer que $PT(X)$ est une sous-variété de P de dimension $\leq 2n-1$ et que CX est une variété de dimension $\leq 2n$. Conclure que $PTX \cup CX$ est de mesure zéro en P si $N > 2n+1$.
   e. Soit $[x]$ un point de P et soit $\pi_{[x]}$ la projection orthogonale lelong de la direction définie par $[x]$ sur le $\mathbb{R}^{N-1}$ orthogonale à la droite définie par $[x]$. Montrer que $\pi_{[x]}\big|_X : X \to \mathbb{R}^{N-1}$ est un immersion si $[x] \notin PTX \cup CX$.
   f. Conclure.

   On peut lire des démonstrations complètes pour le cas d'une variété paracompacte dans [**A**], Chapter 6 et dans [**R**], I.§3.

3. Soit $\mathbb{R}^{n,m}$ l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ et soit $M_r = M_r(n,m) \subset \mathbb{R}^{n,m}$ le sous-ensemble des matrices de rang r. Montrer que si $r \leq \min(m,n)$, M_r est un sous-variété de codimension $(n-1)(m-r)$. (Indication: un voisinage typique d'un point de M_r est donné par $\{\begin{pmatrix} U & UV \\ W & WV+Z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$; $U \in \mathbb{R}^{r,r}$, $\det(U) \neq 0\}$.)

4. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $F : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2n$ différentiable. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il y a une matrice $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ avec $||A|| < \epsilon$ telle que $F + A : U \to \mathbb{R}^m$ est une immersion. Indication: consider pour r à déterminer l'application

$$M_r(n,m) \times U \to \mathbb{R}^{n,m}$$
$$(A,x) \mapsto A - J(F)_x$$

et appliquer les exercices précédentes).

5. Le but de cet exercice est de completer le théorème de Whitney en montrant qu'on peut approximer une application dérivable $f : X \to \mathbb{R}^p$ par une immersion si $p \geq 2n$ et même par un plongement si $p \geq 2n+1$. On reprend la notation de l'exercice 2 et soit X_k la fermeture de $\cup_{i=1}^k U_i(1)$. On a donc $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_m = X$. On se donne une application C^∞

$$f : X \to \mathbb{R}^p, \quad p \geq 2n$$

lequel on souhaite approximer par un immersion g. L'idée est d'appliquer l'exercice 4. On se donne une métrique Riemannienne d sur X et un $\epsilon > 0$. On veut contruire des applications C^∞ disons $f_0 = f, f_1, f_2, \ldots, f_m$ telles que

- pour $k > 0$, $f_k|X_k$ est une immersion,
- pour $k \geq 1$, $f_{k-1} = f_k$ sur $X \setminus U_k(2)$,
- $d(f_{k-1}(x), f_k(x)) < \dfrac{\epsilon}{2^k}$ pour tout $x \in X$ et $k \geq 1$.

Puisque $X_m = X$ et $d(f(x), f_m(x)) \leq \sum_{k=1}^m d(f_{k-1}(x), f_k(x)) < \epsilon$, l'immersion $g = f_m$ convient.

a. Pour achever la construction par récurrence, on suppose que l'on a déjà construit $f_1, \ldots, f_{k-1}$. On a besoin d'une fonction d'appui $\tau : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ qui a support dans $B(0,2)$ et qui est identiquement 1 sur $B(0,1)$. Pour $A \in \mathbb{R}^{n,p}$ on pose

$$F_A := f_{k-1} \circ \phi_k^{-1} + \tau \cdot A : B(0,3) \to \mathbb{R}^p.$$

Montrer qu'il y a un voisinage V de $0 \in \mathbb{R}^{n,p}$ telle que pour tout $z \in \phi_k(X_{k-1}) \cap \overline{B(2)}$ et tout $A \in V$ l'application F_A est de rang n en z. Montrer qu'on pourra supposer en outre que $||A|| \leq \dfrac{\epsilon}{2^k}$.

b. Montrer qu'il y a $A_0 \in V$ telle que

$$B(0,2) \to \mathbb{R}^p$$
$$x \mapsto f_{k-1} \circ \phi_k^{-1}(x) + A_0(x)$$

soit une immersion.

c. On définit maintenant $f_k(x) = f_{k-1}(x)$ si $x \notin U_k(1)$ et $f_k(x) = f_{k-1} + \tau(f_k(x)) \cdot A_0(\phi_k(x))$ si $x \in U_k$. Montrer que f_k vérifie toutes les conditions souhaitées.

Ensuite, si $p > 2n$, on veut approximer g par une immersion injective h en construisant par récurrence des applications $h_k : X \to \mathbb{R}^p$ telles que

- $h_0 = g$,
- $h_k(x) = h_{k-1}(x)$ si $x \notin U_k$, $k = 1, 2, \ldots$,
- $h_k(x) = h_k(y)$ ssi $h_{k-1}(x) = h_{k-1}(y)$, $x, y \in X$,
- $d(f_k(x), f_{k-1}(m) < \dfrac{\epsilon}{2^k}$, $x \in X$, $k = 1, 2, \ldots$.

d. Pour achever la construction par récurrence, on suppose que l'on a déjà construit $h_1, \ldots, h_{k-1}$. On utilise la fonction d'appui τ_k de l'exercice précédente et on introduit

$Y_k \subset X \times X$ comme l'ensemble des points $(x_1, x_2) \in X \times X$ tels que $\tau_k(x_1) \neq \tau_k(x_2)$. On pose ensuite

$$\begin{aligned} \psi_k : Y_k &\to \mathbb{R}^p \\ (x_1, x_2) &\mapsto \frac{-1}{\tau_k(x_1) - \tau_k(x_2)}[h_{k-1}(x_1) - h_{k-1}(x_2)]. \end{aligned}$$

Montrer que le compémentaire de l'image de ψ_k est dense et donc qu'il existe $z \neq 0$, $z \notin \psi_k(Y_k)$. On définit ensuite $h_k(x) = h_{k-1}(x) + \tau_k(x)z$. Montrer que h_k vérifie toutes les conditions souhaitées

e. Donner une autre démonstration du théorème de Whitney en commençant par une application dérivable $f : X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ quelconque (par exemple une application constante).

6. On montrera le **Théorème de Sard** disant que chaque application dérivable $f : X \to Y$ (entre variétés paracompactes) admet toujours une valeur régulière, c.à.d. un point $y \in Y$ telle que l'application f soit de rang maximale en tout point $x \in f^{-1}y$. Plus précisément, le théorème dit que l'image de l'ensemble $E \subset X$ des **points critiques**, c.à.d. les points $x \in X$ où f n'est pas de rang maximal, est de mesure zéro dans Y.

   a. Réduire au cas $X = \mathbb{R}^n = Y$ et $E \subset Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \ ; \ 0 \leq x_i \leq 1, \ i = 1, \ldots, n\}$.

   b. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ pour tout $x, y \in Q$,

   c. On identifie $T_x\mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il y a une fonction $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\lim_{r\to 0} C(r) = 0$ telle que

$$|f(y) - (df)_x(y)| \leq C(|y - x|) \cdot |y - x|, \quad x, y \in Q.$$

   d. Soit $x \in E$ et soit $H \subset \mathbb{R}^n$ un hyperplan contenant les directions $(df)_x y$ lorsque y varie dans $T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que si $x, y \in Q$ et $|x - y| \leq \epsilon$, alors y reste dans le volume V découpé dans $B(f(x), \epsilon)$ par les deux plans parallèles au plan diamétral H qui en sont distants de $\epsilon C(\epsilon)$. Déduire qu'il y a une constante A telle que le $V \leq A \cdot C(\epsilon)\epsilon^n$.

   d. En partageant Q en h^n cubes égaux de diamètre $d = \sqrt{n}h^{-1}$, montrer que l'image par f des cubes qui contiennent un point critique est de volume total $\leq AC(d)d^n$. Conclure.