Fonctions Holomorphes
Cours de Licence 3 Grenoble
2me semestre 2012–2013

Chris Peters

Janvier 2013

Table des matières

Chapitre 1

Notions de base

1.1 Rappels sur la topologie

On travaille dans $\mathbb{R}^n$ vu comme espace euclidien et on utilise la topologie euclidienne induite. La distance est notée

$$d(x,y) = \|x-y\|, \quad \|(z_1,\ldots,z_n)\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} z_j^2}.$$

Les ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont les réunions de boules ouvertes ce ecntre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon r :

$$B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) < r\}.$$

Par définition, un ensemble fermé est le complémentaire d'un ensemble ouvert.

On rappelle aussi notions supplémentaires suivantes : la notion de connexité et celle de compacité.

Définition 1.1.1. $K \subset \mathbb{R}^n$ est **compact** si chaque recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de K par des ouverts U_α admet un sous-recouvrement $\{U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_k}\}$ fini ($\alpha_j \in I$).

Pour tester si K est compact on utilise le critère de Heine-Borel-Lebesque :

Théorème (Heine-Borel-Lebesque)**.** $K \subset \mathbb{R}^n$ *est compacte si et seulement si* K *est borné et fermé.*

Une autre notion cruciale est la suivante :

Définition 1.1.2. On dit que $G \subset \mathbb{R}^n$ est **connexe par arcs** si et seulement si pour tout $x,y \in G$ on peut trouver un chemin continue de x vers y complètement contenu dans G , i.e. une application continue $\gamma : I = [0,1] \to G$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Remarque. Un ensemble connexe par arcs est connexe. En fait, par définition, G est connexe si on ne peut pas écrire G comme réunion disjointe d'ensembles ouvertes non-vides ; si on aurait une telle écriture $G = G_1 \cup G_2$, on prendrait $x \in G_1$ et $y \in G_2$, et γ un chemin de x vers y. Alors $\gamma^{-1}G_1$ et $\gamma^{-1}G_2$ seraient deux ouverts disjoints non-vides de l'intervalle $[0,1]$ (car γ est continue). Mais ce n'est pas possible car $[0,1]$ est connexe.

Exemples 1.1.3. 1. Une boule ouverte ou fermée.
2. Un ensemble étoilé S c.à.d. il existe $s_o \in S$ tel que pour tout $s \in S$ le sement $[s_0 s]$ est contenu dans S).

Dans ce qui suit on travaille dans $\mathbb{R}^2$ qu'on identifiera avec le plan complexe $\mathbb{C}$. On écrira

$$\begin{aligned} z &= x + \mathrm{i}y,\ x, y \in \mathbb{R} \textbf{ partie réelle } x \text{ et } \textbf{imaginaire } y, \\ z &= re^{\mathrm{i}\varphi}, r > 0, -\pi < \varphi \leq \pi \textbf{ module } |z| = r \text{ et } \textbf{ argument } \varphi. \end{aligned}$$

La distance entre z_1 et z_2 s'identifie avec le module de $(z_1 - z_2)$. Les boules ouvertes de centre a et de rayon r sont les disques ouvertes $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\}$.

Définition 1.1.4. Un **domaine** $D \subset \mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ qui est connexe par arcs.

1.2 Rappels sur l'analyse

On considère des fonctions $f : U \to \mathbb{C}$ où $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert. On écrit

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y).$$

Rappelons que f est **continue** au point $z_o = x_o + \mathrm{i}y_o \in U$ si et seulement si $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues au point (x_o, y_o). La fonction f est continue sur U si et seulement si pour tout ouvert $W \subset \mathbb{C}$ l'image réciproque $f^{-1}W$ est ouvert dans U.

On dit que la fonction $z = (x,y) \mapsto f(z) = (u(x,y), v(x,y))$ est **dérivable** au point a si et seulement s'il y a une application *linéaire* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h).$$

Une fonction complexe $r(h)$ est notée $o(h)$ si et seulement si $r(h) = h\epsilon(h)$ telle que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.

Dans ce cas L est appelé **la dérivée de** f **au point** a et noté $L = (df)_a$. La matrice de L (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ se calcule facilement :

$$L = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

1.3 Fonctions holomorphes

On a vu que pour les fonctions $f : U \to \mathbb{C}$ ($U \subset \mathbb{C}$ ouvert) dérivabilité au point a signifie qu'on a une approximation au premier ordre

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

où $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire. Si L en effet provient d'une application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable au point a. Puisqu'une telle application est la multiplication par un nombre complexe on a :

Définition 1.3.1. $f : U \to \mathbb{C}$ comme ci dessus est dite

1. **$\mathbb{C}$-dérivable au point** a s'il existe un nombre complexe w telle que

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + w \cdot h + o(h) \iff w = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

   On écrit $w = f'(a)$ où $w = \dfrac{d}{dz} f(a)$, **la dérivée (complexe) de** f **au point** a ;
2. **holomorphe au point** a si f est $\mathbb{C}$-dérivable dans un voisinage de a.

On dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est **holomorphe** si f est holomorphe en chaque point $a \in U$.

On peut facilement reconnaître si L provient d'une multiplication avec un nombre complexe $w = c + \mathrm{i}d$ car la matrice de l'application linéaire associée est

$$L = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{pmatrix}$$

Donc : une fonction dérivable au point a est $\mathbb{C}$-dérivable si et seulement si les **équations de Cauchy-Riemann** sont valables :

$$\boxed{\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\}}. \tag{1.1}$$

Dans ce cas $f'(a) = u_x(a) + \mathrm{i}v_x(a) = v_y(a) - \mathrm{i}u_y(a)$.

1.4 Exemples de fonctions holomorphes

Il y a plusieurs façons de construire de nouvelles fonctions holomorphes à partir de fonctions holomorphes données :

1. Une combinaison (complexe) linéaire des fonctions holomorphes sur un domaine U est holomorphe sur U ;

2. Si f est holomorphe sur U et $f(a) \neq 0$, alors $1/f$ est holomorphe sur un voisinage ouvert de a dans U ; en particulier, si f est partout non-nulle sur U, la fonction $1/f$ est aussi holomorphe ;
3. Composition de deux fonctions holomorphes est holomorphe : si f est holomorphe au point a et g holomorphe au point $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est holomorphe au point a et

$$\frac{d}{dz}(g \circ f)(a) = g'(b) \cdot f'(a) \quad \text{(multiplication de nombres complexes).}$$

Exemples 1.4.1. 1. Les fonctions rationnelles

$$\frac{P}{Q}$$

où P et Q sont des polynômes. Une telle fonction est holomorphe sur le domaine $\mathbb{C} - \{$ pôles de $Q\}$.

2. La fonction exponentielle

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

qui est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$; on a $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$.

3. L'inverse $z = \log(w)$ est une fonction multiforme : si on fixe la fonction argument $\mathrm{Arg}\,(w)$ telle que

$$-\pi < \mathrm{Arg}\,(w) \leq \pi \text{ (la branche principale de la fonction argument,}$$

alors

$$\log(w) = \log|w| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,(w) + 2\pi\mathrm{i}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si on veux avoir une fonction continue, il faut se restreindre au domaine $D = \mathbb{C} - \{$ le rayon $\mathrm{Arg}\,(w) = \pi\}$ et il faut fixer k. La fonction continue sur D qui résulte est appellée la **branche**

$$\log_k(w) := \log|w| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,(w) + 2\pi\mathrm{i}k$$

du logarithme. Cette branche est holomorphe car sur D on a

$$\frac{d}{dw}\log_k(w) = \frac{1}{w}.$$

Plus généralement, on dit qu'une **branche d'une fonction multiforme** f est une fonction continue g sur un sous-domaine de f telle que $g(z) \subset \{$valeurs de f en $z\}$. Cela peut dépendre du sous-domaine.

Par exemple : pour la fonction argument, si on enlève du plan complexe un rayon $\mathrm{Arg}\,(w) = \theta$ on obtient un domaine D_θ sur lequel on pourrait définir des nouvelles branches de la fonction argument, disons $\arg_{\theta,k}$ ($k \in \mathbb{Z}$) telle que

$$\theta + k < \arg_{\theta,k} < \theta + k + 2\pi$$

et la branche

$$\log_{\theta,k}(w) = \log|w| + \mathrm{i}\arg_{\theta,k}(w)$$

sera holomorphe sur D_θ. Si θ et k varient, les branches varient.

4. Les fonctions

$$z^{1/n} = e^{\frac{\log z}{n}}$$

sont holomorphes sur chaque domaine où la branche de log est holomorphe.

5. Pour $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, la fonction

$$a^z := e^{z\log(a)}$$

est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$ pour n'importe quelle branche de log (mais la fonction dépend de la branche). La dérivée est

$$\frac{d}{dz}a^z = (\log a)\cdot a^z.$$

1.5 Compléments

Théorème 1.5.1 (Théorème des fonctions inverses)**.** *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $a \in U$ tel que $f'(a) \neq 0$ et f' continue dans un voisinage de a. Alors sur un voisinage V de a $f|V : V \to f(V) = W \subset \mathbb{C}$ est une bijection, W est ouvert et $f^{-1} : W \to V$ est holomorphe.*

Remarque. On verra (Corollaire 2.1.3) que l'hypothèse que f' soit continue est superflue. Voir aussi Cor. 3.3.6.

Applications conformes

Rappel : pour un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, une application $f : U \to \mathbb{R}^n$ est conforme si c'est une application qui conserve les angles (orientées). Si f est linéaire (et $U = \mathbb{R}^n$), c'est une application de la forme $\mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}) = rR(\mathbf{x})$ ou R est une rotation et $r > 0$. Une fonction f dérivable est conforme si et seulement si $df(a)$ est conforme pour tout $a \in U$. Pour $n = 2$ la matrice d'une application linéaire et conforme est

$$\begin{pmatrix} r\cos(\alpha) & -r\sin(\alpha) \\ r\sin(\alpha) & r\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice est la matrice de l'application linéaire de $\mathbb{C}$ donnée par la multiplication par le nombre complexe $re^{\mathrm{i}\alpha}$. En fait, on a :

Lemme 1.5.2. *Une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ en $a \in U$ telle que $g'(a) \neq 0$ est conforme dans un voisinage de a. Réciproquement, une fonction f conforme et dérivable telle que $df(a) \neq 0$ pour tout $a \in U$ est holomorphe en U.*

La sphère de Riemann

La **sphère de Rieman** $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ s' identifie avec la sphère S^2 en tant qu'espace topologique : on identifie $\mathbb{R}^3$ avec des coordonnées (x, y, z) avec $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ avec les coordonnées $(t := x + \mathrm{i}y, z)$. La sphère est identifiée avec la spère de centre $(0, -\frac{1}{2})$ de rayon 1 (passant par $(0, 0)$) :

$$\mathbf{S} = \left\{(w, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}; |w|^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

et la projection centrale de $\mathbb{C} \times \mathbb{R} - (0, 0)$ sur le plan $\mathbb{C} \times \{-1\}$ induit

$$\pi : \mathbf{S} - (0, 0) \to \mathbb{C}, (w, z) \mapsto (-w/z, -1)$$

qui est un homéomorphisme et on étend π par $\pi(0, 0) = \infty$ et on demande que cela devient un homéomorphisme $\pi : \mathbf{S} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{C}}$.

Il y a une coordonnée préférée autour de ∞ : si w est la coordonnée valable dans $\mathbb{C}$, la coordonnée $z = 1/w$ est valable sur la voisinage

$$\{w \in \mathbb{C}; w \neq 0\} \cup \{\infty\}$$

de $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ et $z = 0$ au point ∞.

On utilise cela pour définir la holomorphicité des fonctions $f : V \to \mathbb{C}$ dans un voisinage de ∞ : on regarde $V \subset \mathbb{C}$ avec coordonnée z et $z \mapsto f(z)$ est holomorphe sur V si f est holomorphe en tant que fonction de z. C'est compatible avec la notion antérieure exprimée en termes de la coordonnée $w = 1/z$.

On peut aussi étudier les **homographies** du sphère de Riemann : pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2; \mathbb{C})$ on définit

$$h_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad w \mapsto v = \frac{aw + b}{cw + d}, \; \infty \mapsto \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si } c \neq 0, \\ \infty & \text{si } c = 0. \end{cases}$$

Alors h_A est holomorphe sauf au point $w = -d/c$. On rend l'application continue sur tout $\hat{\mathbb{C}}$ en posant $h_A(-d/c) = \infty$. L'application h_A, ainsi étendue, est holomorphe vue comme fonction

$$\{\text{voisinage de } w = -d/c\} \to \{\text{voisinage de } \infty\} \text{ (avec coordonnée } z = 1/v),$$

car dans ce choix de coordonnées $h_A(w) = \dfrac{cw + d}{aw + b}$, holomorphe en w dans le voisinage $\mathbb{C} - \{-b/a\}$ de $-d/c$.

Lemme 1.5.3. *On a les propriétés suivantes*

1. *Pour* $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $h_{\lambda A} = h_A$.
2. *On a* $h_{I_2} = \mathrm{id}$.
3. $h_{AB} = h_A \circ h_B$.

Par conséquent, h_A est inversible avec inverse $h_{A^{-1}}$. En particulier, h_A est une application *biholomorphe du sphère de Riemann* en elle-même.

Chapitre 2

Fonctions analytiques

2.1 Sommaire

Définition 2.1.1. Soit $G \subset \mathbb{C}$. Une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ est **analytique** si f est développable en série entière autour tout $a \in G$. Donc on a une représentation

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n} \tag{2.1}$$

comme série de Taylor convergente sur un disque $D(a, r) \subset G$.

Rappels

(1) Une série entière (2.1) est convergente sur une disque $D(a, R)$, sa **disque de convergence**, R sa **rayon de convergence** où

$$\boxed{R = \sup\{r \in \mathbb{R}; \exists z_o \in \mathbb{C},\ |z_o| = r \text{ t.q. (2.1) converge pour } z = z_o\}}$$

On a

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|}}} \quad \boxed{R = \infty \text{ si } \limsup_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} = 0}.$$

La série converge normalement dans $\overline{D(a,r)}$ si $r < R$ et donc elle est $\mathbb{C}$-dérivable dans son disque de convergence. En fait on dérive f terme par terme :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

et par récurrence on trouve :

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}.$$

(2) On a une **principe d'identité** : deux fonctions f, g analytiques dans $D(a, r)$ sont égales dès que leurs valeurs sont les mêmes sur une suite de points différents convergente vers un point dans le disque.

Conséquences

On déduit de (1) qu'une fonction analytique est holomorphe. Le but principal de ce chapitre est de montre la réciproque :

Théorème 2.1.2. *Une fonction holomorphe est analytique.*

Corollaire 2.1.3. *Une fonction holomorphe est $\mathbb{C}$-dérivable à tout ordre et en particulier tout ses dérivées sont continues.*

On déduit de (2) :

Théorème 2.1.4 (Principe d'Identité)**.** *Soit D un domaine. Deux fonctions analytiques $f, g : D \to \mathbb{C}$ sont égales si elles prennent les mêmes valeurs en un ensemble $A \subset D$ ayant un point d'accumulation dans D.*

2.2 Intégrales curvilignes

Dans ce paragraphe $D \subset \mathbb{C}$ est un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ continue, et $\gamma : I = [a, b] \to D$ un chemin, qui est C^1 par morceaux :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b, \quad \gamma|[a_k, a_{k+1}] \in C^1(I, D).$$

Définition 2.2.1. L'intégrale curviligne $\int_\gamma f dz$ est définie comme suit :

$$\boxed{\int_\gamma f dz := \sum_{i=1}^{N} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\gamma(t)) \frac{d\gamma(t)}{dt} dt.}$$

Exemples 2.2.2. (1) Soit $\gamma(t) = e^{2\pi \mathrm{i} t}, \quad 0 \leq t \leq 1$ (cercle orienté de rayon 1 et centre l'origine). Alors

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi \mathrm{i}.$$

(2) Supposons que $f(z) = F'(z)$ pour une fonction F holomorphe sur D. Alors, pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to D$ on a

$$\int_\gamma f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier on trouve 0 pour des lacets (chemins fermés).

Remarque. La valeur d'une intégrale curviligne ne dépend pas de la paramétrisation de γ dans le sens suivant : si $\tau : J \to I$ est dérivable et strictement croissante, on dit que $\gamma : I \to D$ et $\gamma\circ\tau : J \to D$ sont équivalentes. Deux chemins γ, γ' équivalentes on même image et même orientation. On a

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma'} f(z)dz.$$

Il y a quelques opérations de base sur les chemins :

1. On peut renverser l'orientation : si $\gamma : [a,b] \to D$ est un chemin de p vers q, le chemin $-\gamma$ est le chemin de q vers p donné par
$$-\gamma(t) = \gamma(a+b-t).$$
2. Si $\gamma_1 : I_1 = [a,b] \to D$, $\gamma_2 : I_2 = [b,c] \to D$ sont des chemins composables (c.à.d. $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, leur composé est défini par
$$\gamma_1 + \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \le t \le b \\ \gamma_2(t) & \text{si } b \le t \le c. \end{cases}$$
On peut modifier cette définition si les chemins sont définies à partir d'autres intervalles ; par exemple si $I_1 = I_2 = [0,1]$ il faut modifier cette definition comme suit :
$$\gamma_1 + \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

L'effet sur les intégrales curvilignes est décrit dans la proposition suivante :

Proposition 2.2.3. *1.* $\int_{-\gamma} f dz = -\int_\gamma f dz$ *;*

2. $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.$

Pour faire des estimations, on a besoin de la notion de **longueur de** γ :

$$\text{longueur de } \gamma := \int_\gamma \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{x^2(\gamma(t)) + y^2(\gamma(t))}dt.$$

ce qui entre dans l'inégalité

$$f|\gamma \text{ continue } \implies \left|\int_\gamma f dz\right| \le \max_\gamma |f| \cdot \text{longueur de } \gamma. \tag{2.2}$$

On utilise (2.2) pour montrer :

Proposition 2.2.4. *Soit D un domaine étoilé avec centre a et $f : D \to \mathbb{C}$ continue. On suppose que $\int_{\partial\triangle} f dz = 0$ pour tout triangle (orienté) $\triangle$ contenu dans D. Alors la fonction*

$$F(z) = \int_\gamma f dz, \quad \gamma(t) = a + t(z-a),$$

est holomorphe en D avec dérivée f. On dit : F est une ***primitive*** *de f.*

2.3 Formule de Cauchy

Dans ce paragraphe on suppose que $f : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe et que f' est *continue*. Cette hypothèse complémentaire rend possible d'utiliser le théorème de Stokes-Green :

Théorème (Stokes-Green)**.** *Soient $u, v : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1. Pour un ensemble compacte $B \subset D$ dont le bord ∂B est l'image d'un lacet C^1 par morceaux on a*

$$\int_{\partial B} udx + vdy = \int_B (v_x - u_y)dxdy.$$

Cela, combiné avec les équations de Cauchy-Riemann (1.1) montre :

Proposition 2.3.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que f' est continue. On suppose que $B \subset D$ est un ensemble compacte tel que le bord est l'image d'un lacet γ qui est C^1 par morceaux. Alors*

$$\int_\gamma f dz = 0.$$

Corollaire 2.3.2. *Sous ces hypothèses, si de plus D est étoilé, f a une primitive qui est holomorphe.*

Remarque 2.3.3. L'hypothèse que f' continue n'est pas nécessaire. On peut montrer :

$$\boxed{\text{Soit } f : D \to \mathbb{C} \text{ holomorphe, } \triangle \subset D \text{ un triangle orienté, alors } \int_{\partial\triangle} f dz = 0.}$$

On admet la preuve classique (qui remonte à Goursat) qui n'utilise pas la continuité de f'.

Théorème 2.3.4 (Formule de Cauchy)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe. Soit $\overline{D(a, r)} \subset D$ et γ son bord orienté : $\gamma(t) = a + r(\cos(2\pi t) + \mathrm{i}\sin(2\pi t))$. Alors, pour tout $z \in D(a, r)$ on a :*

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.}$$

Corollaire 2.3.5. *Dans la même situation, on a*

$$\boxed{\frac{f^{k)}(z)}{k!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.}$$

On déduit :

Théorème 2.3.6. *Soit $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors f est analytique.*

Corollaire 2.3.7. *Une fonction holomorphe admet localement une primitive.*

Corollaire 2.3.8 (Morera)**.** *Une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe $\iff$ f est continue et $\int_{\partial\triangle} f dz = 0$ pour tout triangle $\triangle$ contenu dans D.*

2.4 Applications

Théorème 2.4.1 (Inégalité de Cauchy)**.** *Soit* $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$ *analytique,* $\rho < r$ *et* $M := \|f\|_{|z-a|=\rho}$*. Alors*

$$\boxed{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!} \leq \frac{M}{\rho^k}.}$$

Corollaire 2.4.2 (Liouville)**.** *Une fonction bornée et holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *est constante.*

Théorème 2.4.3 (Propriété de la moyenne)**.** *Soit* D *un domaine et* $f : D \to \mathbb{C}$ *holomorphe. Alors* $f(a)$ *est la valeur moyenne de* f *sur un cercle* $S(a,r)$ *de centre* a *contenue dans* D *:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(a + re^{\mathrm{i}\theta}) d\theta.$$

Corollaire 2.4.4 (Principe du maximum (1))**.** *Soit* D *un domaine et* $f : D \to \mathbb{C}$ *analytique et* $a \in D$ *telle que* $|f|$ *admet un maximum relatif en* a*. Alors* f *est constante.*

Corollaire 2.4.5 (Principe du maximum (2))**.** *Soit* D *un domaine borné,* $f : D \to \mathbb{C}$ *analytique et continue sur* $\bar{D}$*. Alors*

1. $|f(z)| \leq \max_{\partial D} |f| = M$.
2. *Si* $|f(a)| = M$ *pour* $a \in D$*, alors* f *est constante.*

2.5 Fonctions harmoniques

Définition 2.5.1. Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine. Une fonction $u : D \to \mathbb{R}$ est **harmonique** si $u \in C^2(D)$ et si

$$\Delta u = 0, \quad \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Exemple 2.5.2. Soit $f = u + \mathrm{i}v : D \to \mathbb{C}$ holomorphe (donc u, v sont les parties réeles et imaginaires de f). Alors u et v sont harmoniques. On dit que les fonctions u et v sont **conjuguées**.

Théorème 2.5.3. *Soit* $u \in C^2(D)$ *harmonique et* $a \in G$*. Alors il existe* $r > 0$, $B(a,r) \subset D$*, et une fonction holomorphe* $f : B(a,r) \to \mathbb{C}$ *telle que* $u =$ *partie réelle de* f*.*

Théorème 2.5.4 (Principe du maximum)**.** *Soit* D *un domaine. Si* $u \in C^2(D)$ *est harmonique et si* u *a un maximum locale en* $a \in D$*, alors* u *est constante.*

2.6 Suites, séries et produits infinis

Théorème 2.6.1 (Weierstraß)**.** *Soit D un domaine et $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2 \ldots$ une suite de fonctions holomorphes. On suppose que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformément sur tout compacte $K \subset D$. Alors f est holomorphe et pour les k-ièmes dérivées on a convergence $f_n^{(k)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{(k)}$, uniformément sur K.*

Théorème 2.6.2. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2 \ldots$ une suite de fonctions holomorphes. On suppose que la série $\displaystyle\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout compacte $K \subset D$ vers sa somme s. Alors s est holomorphe et $s' = \displaystyle\sum_n f_n'$, uniformément sur K.*

On s'intéresse aussi aux produits infinis.

Définition 2.6.3. (1) On dit que l'expression

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n), \quad a_n \in \mathbb{C}$$

converge si $a_n = -1$ pour un nombre fini d'indices, disons $n \leq m$, et que

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=m+1}^{N} (1 + a_n)$$

converge.
(2) Soient $f_\nu : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$ des fonctions sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$. On dit que

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_\nu(z))$$

converge uniformément sur un compacte $K \subset D$ si on a convergence en tout point $z \in K$ (en particulier, $f_\nu(z) = -1$ pour un nombre fini d'indices, disons $\nu \leq m$), et que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=m+1}^{n} (1 + f_\nu(z))$$

converge uniformément sur K.

On a le critère suivant :

Proposition 2.6.4. *Si $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(z)|$ converge uniformément sur le disque fermé $\bar{D}$, alors $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_\nu(z))$ converge uniformément sur $\bar{D}$.*

Si on suppose de plus que les f_ν sont des fonctions holomorphes, on a :

Théorème 2.6.5. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine. On suppose que $f_\nu : D \to \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ sont holomorphes et que $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(z)|$ converge uniformément sur tout compacte $K \subset D$, alors*
(1) *$p(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_\nu(z))$ est holomorphe dans D et*
(2) *$p(a) = 0$ si et seulement si $1 + f_\nu(a) = 0$ pour $\nu \in I(a)$, un ensemble fini (donc $|I|$ est la multiplicité du zéro de p en a.)*

Exemple 2.6.6.

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - \left(\frac{z}{n}\right)^n)$$

converge dans $\mathbb{C}$ vers une fonction holomorphe avec des zéros simples aux points $z = n\mu_n, n \in \mathbb{N}^*$ où μ_n est une n-ième racine de unité.

Chapitre 3

Singularités

3.1 Séries de Laurent

Soient $r_1, \rho_1, r_2, \rho_2 \in \mathbb{R}$ telles que $0 \leq r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ et $r \in]r_1, r_2[$. On pose

$$A = A(a; r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z-a| < r_2\}.$$

Théorème 3.1.1 (Laurent)**.** *Soit $f : A \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors sur A on a une* ***développement de Laurent*** *:*

$$f(z) \quad = \quad \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n}_{f_-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n}_{f_+(z)}.$$

Ce développement converge uniformément sur $\overline{D(a; \rho_1, \rho_2)}$.

Soit γ_r le cercle $|z-a| = r$ orienté dans le sens positif ($\gamma_r(t) = a + re^{2\pi \mathrm{i} t}$). On a

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}} \tag{3.1}$$

et donc l'expansion de Laurent est unique.

Définition 3.1.2. Le coefficient a_{-1} dans (3.1) s'appelle **Résidu** de f au point a :

$$\boxed{\text{Rés}_a f = 2\pi \mathrm{i} \int_{\gamma_r} f(z)dz.}$$

3.2 Singularités des fonctions holomorphes

Si f est holomorphe dans $D(a, r) - \{a\}$ on dit que f a une **singularité isolée** en $z = a$. Par le Thm. 3.1.1 on peut distinguer 3 cas suivant le développement de Laurent :

1. $a_{-n} = 0$ pour tout $n \geq n_0 \geq 1$. On dit que f a en a une **pôle d'ordre** n_0 et f_- est la **partie polaire** de f.
2. $f = f_+$, i.e. $a_{-n} = 0$ pour tout $n \geq 0$. On dit que f en a une **singularité apparente**.
3. $a_{-n_k} \neq 0$ pour une suite $n_k \to \infty$: f a une **singularité essentielle** en a.

On dit que $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ est une singularité isolée de f si 0 est une singularité isolée de la fonction $f(1/w)$.

Exemples 3.2.1. 1. La fonction z^k a une pôle d'ordre k en ∞ ;

2. la fonction $\frac{1}{z^k}$ a une pôle d'ordre k en 0 et un zéro d'ordre k en ∞ ;
3. La fonction e^z a une singularité essentielle en $z = \infty$, la fonction $e^{1/z}$ a une singularité apparente en ∞.

Proposition 3.2.2. *1.* (Riemann) *f a une singularité apparente en a $\Longleftrightarrow$ $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$ existe $\Longleftrightarrow$ f est bornée dans un voisinage de a ;*

2. f a un pôle en a $\Longleftrightarrow$ $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{z\to a} f(z) = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$;

3. (Casorati-Weierstraß) *f a une singularité essentielle en a $\Longleftrightarrow$ pour tout $w \in \mathbb{C}$ il existe une suite $z_n \to a$ telle que $f(z_n) \to w$.*

Proposition 3.2.3. *Une fonction rationnelle n'a qu'un nombre fini de singularités dans $\hat{\mathbb{C}}$; ce sont tous des pôles ou des singularités apparentes. Réciproquement, une fonction est rationnelle, dès qu'elle est holomorphe à tout point de $\hat{\mathbb{C}}$, sauf peut-être dans un nombre fini de points où elle a des pôles.*

3.3 Théorèmes des résidus et applications

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $D' \subset D$ sous-ensemble compacte avec bord $\partial D'$ l'image d'un lacet γ avec orientation positive et C^1 par morceaux. Soient $a_1, \ldots, a_n$ points dans l'intérieur de D'. On suppose que

$$f : D - \{a_1, \ldots, a_n\} \to \mathbb{C}$$

est holomorphe. Alors

$$\boxed{\int_\gamma f = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rés}_{a_i} f.}$$

Application : intégrales réelles

Proposition 3.3.1. *Soient $a_1, \ldots, a_n$ des points dans le demi-plan $H = \mathrm{Im}(z) > 0$. Soit D un domaine contenant H et la droite réelle. On suppose que f est holomorphe dans D sauf peut-être aux points $a_1, \ldots, a_n$. On suppose qu'il y a $M > 0$ et $\alpha > 1$ telles que*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha}, \quad |z| \gg 0,$$

Alors

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi \mathrm{i} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{rés}_{a_j} f \right).}$$

Exemple 3.3.2. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}.$$

Proposition 3.3.3. *Mêmes hypothèse que dans la Prop. 3.3.1. On suppose qu'il y a $M > 0$ telle que*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|}, \quad |z| \gg 0,$$

Alors pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$\boxed{I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\alpha x} f(x)dx = 2\pi \mathrm{i} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{rés}_{a_j} [e^{\mathrm{i}\alpha z} \cdot f] \right).}$$

Si f est à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, I &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x) f(x)dx \\ \mathrm{Re}\, I &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha x) f(x)dx. \end{aligned}$$

Application : Principe de l'argument, Rouché

Hypothèse 3.3.4. $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $D' \subset D$ sous-ensemble compacte tel que le bord $\partial D'$ est l'image d'un (simple) lacet γ avec orientation positive et C^1 par morceaux. Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ points dans l'intérieur de D'. On suppose que $f : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe sauf peut-être aux points $a_1, \ldots, a_n$. On suppose que f a des pôles d'ordres ℓ_j aux points a_j, $j = 1, \ldots, n$ et des zéros d'ordre k_j aux points b_j, $j = 1, \ldots, m$.

Sous cet hypothèse on a :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz = \sum_j k_j - \sum_j \ell_j.}$$

Si γ est un lacet, alors $t \mapsto f(\gamma(t))$ n'est pas forcément un lacet simple autour de 0 : le nombre effectif de retournements autour de 0 peut être n'importe quel entier. On peut définir la fonction argument continûment le long d'un lacet γ et on pose

$$\Delta_\gamma(\arg(z)) = \text{ changement de l'argument le long de } \gamma = \arg(\gamma(1)) - \arg(\gamma(0)).$$

On trouve :

$$\Delta_\gamma(\arg(f(z)) = 2\pi \left(\sum_j k_j - \sum_j \ell_j. \right).$$

On utilise cette formule pour prouver :

Proposition 3.3.5 (Rouché). *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et f, g comme dans l'hypothèse 3.3.4. On suppose que*

$$|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))|, t \in I,$$

alors

$$\#\text{zéros}(f) - \#\text{pôles}(f) = \#\text{zéros}(g) - \#\text{pôles}(g).$$

Corollaire 3.3.6. *Soit $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe et bijective, alors $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$, $f(D)$ est ouvert, et $f^{-1} : f(D) \to D$ est holomorphe.*

Chapitre 4

Fonctions entières et méromorphes

4.1 Construction des fonctions avec zéros prescrits.

Définition 4.1.1. Une fonction **entière**. est une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. Une fonction f est **méromorphe** sur $\mathbb{C}$ si pour tout $a \in \mathbb{C}$ la fonction f est holomorphe en a ou bien elle a un pôle en a.

Exemple 4.1.2. 1. Tout fonction entière est méromorphe, par exemple la fonction e^z.
2. Les fonctions rationnelles sont méromorphes

Remarque. Soit f méromorphe. Alors les pôles de f ne s'accumulent que peut-être en ∞. Il n'y a qu'un nombre au plus dénombrable de pôles.

Théorème 4.1.3. *Une fonction entière sans zéros est de la forme $e^{f(z)}$, $f(z)$ entière.*

Corollaire 4.1.4. *Soient G, G_0 deux fonctions entières avec les mêmes zéros (comptés avec multiplicités). Alors $G = e^{h(z)}G_0$ avec $h(z)$ entière.*

Théorème 4.1.5 (Théorème de Weierstraß)**.** *Soit $\{z_\nu; \nu = 0 \dots, \infty\}$ un ensemble dénombrable de points complexes sans points d'accumulation, et soit $\{a_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers (> 0). Alors il existe une fonction entière G_0 ayant des zéros en z_ν avec des multiplicités a_ν. Tout autre fonction G avec ces propriétés est de la forme $G = e^h G_0$ avec h une fonction entière.*

L'existence de G_0 dans l'énoncé du théorème de Weierstraß est une conséquence de la proposition suivante. L'unicité suit du Corollaire 4.1.4.

Proposition 4.1.6. *On pose*

$$P_k(u) = u + \frac{1}{2}u^2 + \cdots \frac{1}{k}u^k.$$

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, , $z_1, z_2, \ldots \in \mathbb{C}^*$, $a_0, a_1, \cdots \in \mathbb{N}^*$ *telles que* $\lim_{\nu\to\infty} |z_\nu| = \infty$. *Alors on peut trouver des entiers* $k_1, k_2, \ldots$, *telles que*

$$G_0 := z^{a_0} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) e^{P_{k_\nu}(\frac{z}{z_\nu})} \right]^{a_\nu}$$

est une fonction entière avec les zéros au points z_ν *avec multiplicité d'ordre* a_ν, $\nu = 0, 1, \ldots$.

La preuve de cette Proposition utilise le Thm. 2.6.5.

Exemples 4.1.7. Supposons que dans l'énoncé de la Prop. 4.1.6 un ait

$$\sum_\nu \frac{1}{|z_\nu|^2} < \infty, \qquad \text{et } a_\nu = 1, \text{ pour } \nu = 0, 1, \ldots .$$

Alors, on peut prendre $k_\nu = 1$ et donc

$$G_0(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) e^{\frac{z}{z_\nu}}.$$

(1) Par exemple, on a

$$\boxed{\sin(z) = z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).}$$

(2) La fonction

$$\boxed{G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}} \tag{4.1}$$

est entière avec des zéros simples au points $z = -1, -2, -3, \ldots$..

4.2 La Fonction Γ

Définition 4.2.1. On introduit la fonction **Gamma** avec pôles simples au points $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$. (utilisant (4.1))

$$\Gamma(z) := \frac{G(1)^z}{zG(z)}.$$

Lemme 4.2.2. *On a*

$$\boxed{-\log(G(1)) = \gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \log n \right]},$$

le ***constante d'Euler***. *Donc*

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}}.}$$

Proposition 4.2.3. *1. On a (**équation fonctionnelle**)*

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z), \quad z \neq 0, -1, -2, \cdots .}$$

2.

$$\boxed{\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.}$$

3. $\Gamma(z)$ *n'a aucun zéro.*

4. Pour Re $(z) > 0$ *on a (Gauß) :*

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,}$$