Calcul Intégral
Cours de Licence Grenoble
2002-2003-2004

Chris Peters

FÉVRIER 2003

Table des matières

Introduction

Le but de ce cours est :

- Introduire des propriétés de base de l'intégrale de Riemann en commençant avec le cas des fonctions bornées sur un intervalle fermé borné.
- Discuter certains outils de calcul : le changement de variable, l'intégration par parties, les théorèmes de la moyenne, l'approximation par des suites de fonctions simples, etc.
- Donner quelques applications plus avancées : quelques exemples de régularisation, les séries de Fourier.
- Un premier traitement d'intégration des fonctions de plusieurs variables, y inclus le théorème de Fubini.

La plupart des matières, ainsi que leur traitement ici est classique et se trouve par exemple dans le livre [Rudin]. Les exceptions sont :

- Les théorèmes de convergence bornée et dominée dans le cadre des intégrales de Riemann. Le traitement présenté ici est dû à A. Dufresnoy. Même si la démonstration n'est pas simple, ce théorème a tellement d'applications pratiques qu'il est fortement conseillé que les étudiants comprennent au moins l'énoncé et sachent l'appliquer dans des situations variées.
- L'utilisation des partitions de l'unité (par des fonctions presque partout continues) pour arriver à une définition satisfaisante de l'intégrale de Riemann des fonctions sur un sous-ensemble arbitraire de $\mathbb{R}^n$. Cet approche géométrique est est une adaptation du traitement donné en [Spivak].

Les paragraphes un peu plus durs et qu'on pourrait ne pas utiliser pour le cours sont garnis d'un astérisque.

Pour une autre traitement, qui prépare en même temps à l'introduction efficace de l'intégrale de Lebesgue je renvoie à [McShane]. Dans ce livre tout est expliqué de façon détaillée, mais le traitement non-classique demande beaucoup d'attention.

Ces notes de cours ont été préparés à l'aide d'un manuscrit de A. DUFRESNOY qui je remercie chaleureusement.

Bibliographie

[McShane] Mcshane, E.J. : Unified integration, Academic Press, Orlando ; San Diego ; San Francisco, (1983).

[Rudin] Rudin, Walter : Principles of mathematical analysis. Third edition, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo ; Auckland ; Düsseldorf (1976).

[Spivak] Spivak, Michael : Calculus on manifolds, W. A. Benjamin, New York NY ; Amsterdam (1965).

Chapitre 1

Intégrale de Riemann : le cas borné

1.1 Définition

On a vu en DEUG qu'on peut intégrer les fonctions continues f sur un intervalle (borné et fermé) $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Dans ce qui suit on pose :

$$\int_J f = \int_a^b f(x)dx,$$

ou même $\int f$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la domaine d'intégration.
Cet intégrale a les propriétés fondamentales suivantes :

1. Si $f \geq 0$, alors $\int_J f \geq 0$ et l'intégrale d'une fonction continue positive s'annulle si et seulement si la fonction est nulle.
2. Si f, g sont deux fonctions continues sur J et $a, b \in \mathbb{R}$, alors

   $$\int_J (af + bg) = a \int_J f + b \int_J g.$$

   C'est la propriété de LINÉARITÉ.
3. Si $a < c < b$, alors

   $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

   C'est LA RÈGLE DE CHASLES qui exprime L'ADDITIVITÉ de l'intégrale.
4. Si on pose pour tout $x \in J$:

   $$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

   alors F est dérivable et $F'(x) = f(x)$. C'est la RÈGLE FONDAMENTALE de l'intégration.

La propriété 1) s'explique géométriquement : pour $f \geq 0$ on peut interpréter $\int_J f$ comme l'aire de la région en dessous du graphe de f. La propriété 3) suggère comment calculer l'intégrale des fonctions continues par morceaux [1] : on subdivise J en sous-intervalles J_j, $j = 1, \ldots, N$ telles que $f|J_j$ soit continue et l'on utilise l'additivité : $\int_J f = \sum_{i=1}^N \int_{J_i} f$.

Notre but est de rappeler la définition de l'intégrale de Riemann pour une classe de fonctions sur J contenant les fonctions continues par morceaux. Dans un premier temps on ne considère que des fonctions *bornées*.

L'intégrale de Riemann est souvent définie comme étant la limite de certaines SOMMES DE RIEMANN. Pour cela on considère une subdivision

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$$

et on pose

$$\begin{aligned} J_i &= [x_{i-1}, x_i], \quad (i = 1, \ldots, N) \\ \Delta_i x &= x_i - x_{i-1}, \quad (i = 1, \ldots, 0) \\ \mu(P) &= \max_{i=1,\ldots,N} \Delta_i x \quad (\text{le PAS de } P). \end{aligned}$$

et on choisit des points intermédiaires :

$$\vec{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{N-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad (i = 1, \ldots, N).$$

La somme de Riemann associée est

$$s(P, \vec{\xi}, f) = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \Delta_i x.$$

On regarde ces sommes pour tout choix de subdivision P et points intermédiaires $\vec{\xi}$. Si f est continue, ses sommes de Riemann tendent vers une limite lorsqu'on on raffine la subdivision de plus en plus, c.à.d si le pas de la subdivision tend vers zéro. Cette limite est, par définition, l'intégrale $\int_J f$. On regardera cette approche plus en détail dans le paragraphe suivant.

Voici une autre approche plus élémentaire : on n'a pas besoin des points intermédiaires mais on compare simplement $s_i(f) := \inf_{J_i} f$ et $S_i(f) := \sup_{J_i} f$ en introduisant

$$\begin{aligned} s(P, f) &= \sum_{i=1}^N s_i(f) \Delta_i x \\ S(P, f) &= \sum_{i=1}^N S_i(f) \Delta_i x. \end{aligned}$$

[1] Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est CONTINUE PAR MORCEAUX s'il y a une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f sur les intervalles ouverts $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \ldots, n$ soit continue et soit prolongeable à une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_{k-1}, x_k]$.

Pour comprendre la définition de l'intégrale il faut d'abord montrer quelques propriétés élémentaires. Il s'agit de comprendre ce qu'il se passe quand on rajoute un nombre fini de points à une subdivision donnée. On parle d'un RAFFINEMENT de P. Les propriétés suivantes sont faciles à voir :

Lemme 1.1.1. 1) *Pour un raffinement P^* de P on a*

$$s(P,f) \leq s(P^*,f) \leq S(P^*,f) \leq S(P,f).$$

2) *Si pour tout $x \in J$ on a $|f(x)| \leq M$, alors*

$$|s(P,f)| \leq M(b-a), \quad |S(P,f)| \leq M(b-a).$$

Les deux nombres $s(P,f)$ et $S(P,f)$ restent donc dans un intervalle borné si P parcourt les subdivisions de J et donc (axiome de la borne supérieure) $\underline{\int} f = \sup_P s(P,f)$ et $\overline{\int} f = \inf_P S(P,f)$ existent.

3) *On a*

$$\underline{\int} f = \sup_P s(P,f) \leq \inf_P S(P,f) = \overline{\int} f.$$

Définition 1.1.2. Si $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ on dit que f est INTÉGRABLE (AU SENS DE RIEMANN) et on pose :

$$\begin{aligned} \int_J f &= \underline{\int} f = \sup_P s(P,f) \\ &= \overline{\int} f = \inf_P S(P,f). \end{aligned}$$

Exemple 1.1.3. —

- Pour $A \subset \mathbb{R}$ on définit

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

  Si $A = \mathbb{Q} \cap J$, la fonction $f = \mathbb{1}_A$ n'est pas intégrable.
- La fonction $f(x) = x$ est intégrable.

Voici un critère important :

Proposition 1.1.4. 1) *Si $\int_J f = \mathbb{I}$, pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver une subdivision P telle que*

$$S(P,f) - \mathbb{I} < \epsilon/2, \quad \mathbb{I} - s(P,f) < \epsilon/2. \tag{1.1}$$

En particulier :

$$S(P,f) - s(P,f) < \epsilon.$$

2) *Réciproquement, si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver une subdivision P telle que $S(P,f) - s(P,f) < \epsilon$, alors f est intégrable.*

Démonstration :
1) Soit $\epsilon > 0$. On a des subdivisions P_1 et P_2 telle que

$$\begin{aligned} \int f - s(P_1, f) &< \epsilon/2 \\ S(P_2, f) - \int f &< \epsilon/2. \end{aligned}$$

Prenant le raffinement commun de P_1 et P_2 (c.à.d. on prend la réunion des points de P_1 et de P_2), par le Lemme 1.1.1 on peut supposer que $P_1 = P_2$.
2) On a

$$s(P, f) \leq \sup_P s(P, f) \leq \inf_P S(P, f) \leq S(P, f)$$

et donc pour tout $\epsilon > 0$:

$$0 \leq \inf_P S(P, f) - \sup_P s(P, f) \leq S(P, f) - s(P, f) < \epsilon.$$

Donc $\inf_P S(P, f) = \sup_P s(P, f)$ et f est intégrable.

Puisque $S(P, f) \leq \sup_J f \cdot |J|$ et $\inf_J f \cdot |J| \leq s(P, f)$, le Lemme. (1.1.1) montre :

Corollaire 1.1.5. *On a*

$$\inf_J f \cdot |J| \leq \int_J f \leq \sup_J f \cdot |J|$$

et donc (puisque $\sup_J |f| = \max(|\sup_J f|, |\inf_J f|)$ *) :*

$$\boxed{\left| \int_J f \right| \leq \sup_J |f| \cdot |J|.}$$

Applications 1.1.6. —

1. Une fonction monotone est intégrable.
2. Une fonction continue est intégrable.
3. Une fonction continue sauf en un nombre fini de points est intégrable, par exemple une FONCTION EN ESCALIER e : soit $\{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision et on exige $e|]x_{i-1}, x_i[= c_i$, $i = 1, \ldots, n$ ($e(x_k)$, $k = 1, \ldots, n$ est complètement arbitraire).

Démonstration :

1. On suppose que f soit croissante. Soit $\epsilon > 0$ et on choisit $n \in \mathbb{N}$ telle que
$$\frac{b-a}{n}\,(f(b) - f(a)) < \epsilon.$$

Soit $g = (b-a)$ et $P = \{a, a+g/n, \ldots, a+((n-1)g)/n, a+g=b\}$. Alors

$$\begin{aligned} S(P,f) - s(P,f) &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon. \end{aligned}$$

2. On se donne $\epsilon > 0$ et on choisit $\eta > 0$ telle que

$$(b-a)\eta < \epsilon. \tag{1.2}$$

Puisque f est uniformément continue, pour chaque $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ telle que :

$$|x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \eta. \tag{1.3}$$

Ensuite, on choisit une subdivision P dont le pas est $< \delta$. L'estimation (1.3) montre que sur chaque sous-intervalle $J' \subset J$ de longueur $< \delta$ la variation maximale de f est moins que η :

$$\sup_{J'} f - \inf_{J'} f \leq \eta, \quad \text{si } |J'| < \delta.$$

En particulier c'est vrai pour chaque intervalle de la subdivision P et donc on a

$$S(P,f) - s(P,f) \leq \eta(b-a) < \epsilon$$

par (1.2).

3. Si f est continue par morceaux, il est facile d'adapter l'argument précédent.

1.2 Propriétés de base

D'abord quelques notations. Soit $J = [a,b]$ un intervalle fermé. Soit $f, g : J \to \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} f \vee g &:= \sup(f,g) \\ f \wedge g &:= \inf(f,g). \end{aligned}$$

On pose aussi

$$f_+ := f \vee 0$$

$$f_- := -(f \wedge 0).$$

Donc :

$$f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Propriétés 1.2.1. — Soit $J = [a, b]$ et soit $\mathcal{I}(J)$ l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbb{R}$ bornées et intégrables. Alors :

1. L'intégration
$$\begin{cases} \int & : \mathcal{I}(J) \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \int_J f. \end{cases}$$
est une application linéaire qui respecte l'ordre : si $f \leq g$, alors $\int_J f \leq \int_J g$;
2. Le produit des fonctions intégrables est intégrable ;
3. Si f est intégrable, alors $|f|$ l'est et l'on a
$$\boxed{\left|\int_J f\right| \leq \int_J |f|;}$$
4. Si f et g sont intégrables, alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ le sont. En particulier f_- et f_+ sont intégrables.
5. L'intégration est additive : pour $c \in [a, b]$ les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ existent et on a
$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.}$$

Démonstration :

1. Pour $a \in \mathbb{R}$ on a trivialement que $\int (af) = a \int f$.
Ensuite, on utilise les inégalités valables pour tout sous-intervalle $J' \subset J$:
$$\begin{array}{rcl} \inf_{J'} f + \inf_{J'} g & \leq & \inf_{J'}(f+g) \\ \sup_{J'}(f+g) & \leq & \sup_{J'} f + \sup_{J} g \end{array}$$
et donc
$$\begin{array}{ll} s(P,f) + s(P,g) & \leq s(P, f+g) \\ & \leq S(P, f+g) \quad \leq S(P,f) + S(P,g). \end{array} \tag{1.4}$$
Soit $\epsilon > 0$. On utilise le critère 1.1.4 pour trouver deux subdivisions P_1 et P_2 telles que
$$\begin{array}{rcl} S(P_1, f) - s(P_1, f) & < & \epsilon \\ S(P_2, g) - s(P_2, g) & < & \epsilon. \end{array}$$
Ces inégalités persistent pour leur raffinement commun P. En les additionnant et utilisant (1.4) on trouve
$$S(P, f+g) - s(P, f+g) < 2\epsilon$$

et donc $f+g$ est intégrable (par 1.1.4).
Pour montrer que $\int(f+g) = \int f + \int g$ on utilise que

$$\begin{aligned} S(P,f) &< \int f + \epsilon \\ S(P,g) &< \int g + \epsilon \end{aligned}$$

a donc

$$\int (f+g) \leq S(P, f+g) \leq S(P,f) + S(P,g) < \int f + \int g + 2\epsilon.$$

Puisque c'est valable pour tout $\epsilon > 0$ l'inégalité $\int(f+g) \leq \int f + \int g$ s'en déduit. En remplaçant f par $-f$ et g par $-g$ on trouve l'inégalité opposée et donc égalité. Cela complète la démonstration de la linéarité.
Finalement on suppose $f \leq g$. Alors, pour tout sous-intervalle $J' \subset J$ on a $\inf_{J'} f \leq \inf_{J'} g$ et donc $s(P,f) \leq s(P,g)$ et

$$\int f = \sup_P s(P,f) \leq \sup_P s(P,g) = \int g.$$

2. On a $4f \cdot g = (f+g)^2 - (f-g)^2$ et donc il suffit de montrer que h^2 est intégrable si h l'est. Si $|h| \leq M$, on a

$$\begin{aligned} |h^2(x) - h^2(y)| &= |h(x) + h(y)| \cdot |h(x) - h(y)| \\ &\leq 2M\,|h(x) - h(y)| \end{aligned}$$

et donc pour tout sous-intervalle $J' \subset J$ on a :

$$\sup_{J'} h^2 - \inf_{J'} h^2 \leq 2M(\sup_{J'} h - \inf_{J'} h).$$

3. On utilise $||u| - |v|| \leq |u - v|$ pour en déduire pour tout sous-intervalle $J' \subset J$:

$$\sup_{J'} |f| - \inf_{J'} |f| \leq \sup_{J'} f - \inf_{J'} f.$$

Alors, pour $\epsilon > 0$ on a une subdivision P avec $S(P,f) - s(P,f) < \epsilon$ et l'inégalité précédente montre :

$$S(P,|f|) - s(P,|f|) \leq S(P,f) - s(P,f) < \epsilon$$

et donc $|f|$ est intégrable. De plus, utilisant que $f = f_+ - f_- \leq f_+ + f_- = |f|$, on a

$$\begin{aligned} \int f &= \int (f_+ - f_-) \\ &\leq \int (f_+ + f_-) \\ &= \int (f_+ + f_-) = \int |f| \end{aligned}$$

et de même en utilisant $-f = f_- - f_+ \leq |f|$ on trouve que $-\int f \leq \int |f|$.

4. On utilise $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ et $\inf(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$.
5. Soit P une subdivision de $[a,b]$. Soit P^* la subdivision que l'on obtient en rajoutant le point c à P. Puisque

$$s(P,f) \leq s(P^*,f) \leq S(P^*,f) \leq S(P,f),$$

on peut évaluer l'intégrale $\int_a^b f$ en n'utilisant que des subdivisions contenant le point c. Pour de telles subdivisions, P induit une subdivision P' de $[a,c]$ et P'' de $[c,b]$ et réciproquement à partir de P' et P'' on obtient une subdivision P de $[a,b]$ contenant c. On a

$$s(P,f) = s(P',f) + s(P'',f) \leq S(P',f) + S(P'',f) = S(P,f).$$

Puisque $\sup_P s(P,f) = \inf_P S(P,f)$ on a donc

$$\sup_{P'} s(P',f) + \sup_{P''} s(P'',f) = \inf_{P'} S(P',f) + \inf_{P''} S(P'',f)$$

et l'inégalité $\sup_{P'} s(P',f) \leq \inf_{P'} S(P',f)$ et l'inégalité analogue pour P'' impliquent alors qu'on a égalité pour les deux inégalités. Cela montre bien $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ existent et que leur somme vaut $\int_a^b f$.

1.3 Intégrale comme limite de sommes

On reprend ici la définition "classique" de l'intégrale de Riemann utilisant des sommes de Riemann $s(P,f,\vec{\xi})$ associées à une subdivision P de $J = [a,b]$ introduites dans le paragraphe 1.1. Ici $P = \{a = x_0, \ldots, x_N = b\}$ et

$$\vec{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{N-1}), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] = J_i, \quad (i = 0, \ldots, N-1).$$

Définition 1.3.1. On dit que

$$\boxed{\mathbb{I} = \lim_{\mu(P)\to 0} s(P,f,\xi)}$$

si pour tout $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ telle que pour chaque subdivision P dont le pas est $< \delta$ et chaque choix $\vec{\xi}$ des points intermédiaires, on ait $|s(P,f,\xi) - \mathbb{I}| < \epsilon$.

Remarque. On a les inégalités

$$s(P,f) \leq s(P,f,\vec{\xi}) \leq S(P,f)$$

qui découlent du fait que

$$\begin{aligned} s(P,f) &= \inf_{\vec{\xi}} s(P,f,\vec{\xi}) \\ S(P,f) &= \sup_{\vec{\xi}} s(P,f,\vec{\xi}). \end{aligned}$$

En fait, on a le théorème de comparaison suivant :

Théorème 1.3.2. *Une fonction f bornée sur $J=[a,b]$ est intégrable avec $\mathbb{I}=\int_a^b f$ si et seulement si $\mathbb{I}=\lim_{\mu(P)\to 0} s(P,f,\xi)$ (i.e. la limite existe et est égale à $\mathbb{I}$).*

Démonstration :
$\Longleftarrow$ Soient $\epsilon>0$ et δ, P et $\mathbb{I}$ comme dans la définition. Remplaçant ϵ par $\epsilon/2$, on trouve pour tout $\vec{\xi}$:

$$\mathbb{I}-\epsilon/2 < s(P,f,\vec{\xi}) < \mathbb{I}+\epsilon/2. \tag{1.5}$$

On obtient $s(P,f)$ à partir de $s(P,f,\vec{\xi})$ si on remplace $f(\xi_i)$ par $\inf_{J_i} f$ et $f(\xi_i)$ par $\sup_{J_i} f$ pour $S(P,f)$. Par conséquent, 1.5 implique :

$$\mathbb{I}-\epsilon/2 \leq s(P,f) \leq S(P,f) \leq \mathbb{I}+\epsilon/2.$$

Donc d'une part $S(P,f)-s(P,f) \leq (\mathbb{I}+\epsilon/2)-(\mathbb{I}-\epsilon/2)=\epsilon$ et donc f est intégrable. D'autre part on a

$$\mathbb{I}-\epsilon/2 \leq s(P,f) \leq \int f \leq S(P,f) \leq \mathbb{I}+\epsilon/2$$

et donc, en laissant ϵ tendre vers 0, on trouve $\mathbb{I}=\int f$.
$\Longrightarrow$ On suppose f intégrable. Utilisant Prop. 1.1.4, on choisit d'abord P^* telle que

$$S(P^*,f)-\mathbb{I} < \epsilon/2, \quad \mathbb{I}-s(P^*,f) < \epsilon/2. \tag{1.6}$$

Avec n^* le nombre d'intervalles de P^*, et en posant

$$M=\sup|f|$$

on pose

$$\delta=\frac{\epsilon}{4Mn^*}. \tag{1.7}$$

Soit P une subdivision telle que $\mu(P)<\delta$ et on compare P et P^*. Il y a deux sortes d'intervalles pour P : d'une part, les intervalles qui sont inclus dans un des intervalles de P^* et d'autre part ceux qui sont “à cheval”, c.à.d. les intervalles $I_i=[x_{i-1},x_i]$ avec $x^*\in P^*$ tel que $x^*\in]x_{i-1},x_i[$. Les intervalles contenus dans un intervalle de P^* contribuent $<\epsilon/2$ à $S(P,f)-s(P,f)$

par l'hypothèse (1.6). On a au plus $(n^* - 1)$ d'autres intervalles et leur contribution à $S(P,f) - s(P,f)$ est donc

$$\begin{aligned} \leq (n^* - 1)M\mu(P) &< (n^* - 1)2M\delta \\ &= \frac{n^* - 1}{2n^*}\epsilon \\ &< \frac{1}{2}\epsilon. \end{aligned}$$

par (1.7) et donc

$$S(P,f) - \mathbb{I} < \epsilon, \quad \mathbb{I} - s(P,f) < \epsilon.$$

Si $\mu(P) < \delta$, cet estimation combinée avec l'estimation élémentaire de la remarque précédente $s(P,f) \leq s(P,f,\vec{\xi}) \leq S(P,f)$ donne le résultat souhaité :

$$|s(P,f,\vec{\xi}) - \mathbb{I}| < \epsilon.$$

La démonstration implique :

Corollaire 1.3.3. *On suppose que f est intégrable sur l'intervalle J. Si on se donne une suite de subdivisions P_n de J dont le pas converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini, alors, pour n'importe quel choix (relatif à P_n) de points intermédiaires $\vec{\xi_n}$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} s(P_n, f, \vec{\xi_n}) = \lim_{n\to\infty} s(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} S(P_n, f) = \int_J f.$$

1.4 Intégration et dérivation

Théorème 1.4.1. *Soit $f : J = [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable. Soit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad t \in [a,b].$$

Alors, F est continue et si f est continue en $x = x_0$, alors F est dérivable en ce point et

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Démonstration : Soit $\sup |f| = M$. Soient $x, y \in [a,b]$ telle que $x < y$. On a

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f \right| \leq M(y - x)$$

et donc F est continue car Lipschitzienne.

Pour la dérivabilité de F en x_0 on suppose que f est continue en x_0, c.à.d. pour $\epsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ telle que :

$$|x_0 - t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Alors, si $x_0 - \delta < s < x_0 < t < x_0 + \delta$ on a :

$$\left|\frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{t - s}\int_s^t (f - f(x_0))\right| < \epsilon,$$

et donc $F'(x_0) = f(x_0)$.

Théorème 1.4.2. *Soit $f : J = [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable et soit $F : J \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$, alors*

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Avant de montrer l'énoncé, on fait un
RAPPEL : (THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS) Soit F continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il y a $\xi \in]a, b[$ telle que

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

Démonstration : Soit $P = \{a = x_0, \ldots, x_N = x\}$ une subdivision quelconque de $[a, x]$. On applique le théorème des accroissements finis à l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$: il y a $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$ avec

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f(\xi_i).$$

Donc

$$F(x) - F(a) = \sum F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum f(\xi_i)\Delta_i.$$

Le membre de droite tend vers $\int_a^x f$ (utilisant la caractérisation de l'intégrale comme limite de sommes de Riemann).

Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ? :

1. Une fonction monotone (sur un intervalle fermé) est bornée.
2. Si les fonctions bornées $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont intégrables, alors f/g est intégrable.
3. L'intégrale $F(x) = \int_a^x f$ d'une fonction intégrable (sur un intervalle fermé contenant $[a, x]$) est continue. Elle est dérivable et $F'(x) = f(x)$.
4. L'intégrale $F(x)$ d'une fonction positive $f(x)$ est croissante.
5. La fonction caractéristique d'un sous-ensemble dénombrable de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est intégrable.
6. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $|f|$ est intégrable. Alors f est intégrable.

Exercices

1. Déterminer un polynôme réel Q, de degré 4, qui vérifie : $Q(0) = 0$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x+1) - Q(x) = x^3$. En déduire une expression pour $\sum_{k=1}^n k^3$, puis la valeur de $\int_0^1 x^3 dx$.
2. Évaluer pour $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{k=1}^n \cos(kx)$. En déduire la valeur de $\int_0^1 \cos(t)dt$.
3. Discuter les discontinuités des fonctions suivantes et mentionner si elles sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ ou pas.

   a)
   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   b)
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   c)
   $$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   d)
   $$f(x) = \sin(x) \cdot \mathrm{frac}(\frac{1}{x}),$$
   où $[x]$ est l'entier le plus grand $\leq x$ et $\mathrm{frac}(x) = x - [x]$.

   e)
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = m/n,\ x \neq 0. \end{cases}$$

   où on écrit un rationnel $x = m/n$ avec $n > 0$ et m et n sans diviseurs en commun.
4. On définit f sur $[0, 1]$ ainsi
   $$f(x) = \begin{cases} x \cdot \mathrm{frac}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Représenter le graphe de f restreint au segment $[\frac{1}{5}, 1]$. Étudier la continuité de f. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ la fonction f est intégrable sur $[\frac{1}{n}, 1]$. Calculer l'intégrale γ_n. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n$ existe ; trouver cette limite.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt$. Fixons $b > 0$. Montrer par récurrence que pour tout $x \in [-b, b]$ on a :
   $$|f(x)| \leq M\frac{|x|^n}{n!}, \quad M = \sup_{[-b,b]} |f|.$$

Conclure que $f = 0$.

6. Soit $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$ bornée et intégrable. Soit $U \subset \mathbb{R}$ une voisinage de 0 contenant $f(J)$ et soit $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $M > 0$.
   (a) Montrer que pour chaque sous-intervalle $J' \subset J$ on a
   $$\sup_{J'}(g\circ f) - \inf_{J'}(g\circ f) \leq M\left(\sup_{J'}(f) - \inf_{J'}(f)\right).$$
   (b) Déduire que $g\circ f$ est intégrable sur J.
   (c) Appliquer ce résultat pour montrer que f^n, $n \geq 1$ est intégrable.
   (d) On suppose que $|f| \geq \epsilon > 0$ sur J. Montrer que alors $1/f$ est intégrable sur J. Indication : on posera $g(y) = 1/y$ si $|y| \geq \epsilon$ et $g(y) = y/\epsilon^2$ si $|y| < \epsilon$.
7. Soit $f \geq 0$ décroissante sur $[1, \infty[$
   – Comparer pour $k \in \mathbb{N}$: $f(k), f(k+1)$ et $\int_k^{k+1} f\,dx$,
   – En déduire la convergence de la suite $\{\sum_1^n f(k) - \int_1^n f\,dx\}_{n=1,2,\ldots}$ vers une limite appartenant à $[0, f(1)]$.
   – En déduire :
   (a) $\exists \gamma \in [0,1]$ tel que
   $$\sum_1^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \varepsilon(n), \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0.$$
   (b) La convergence de la série $\sum \frac{1}{k^2}$.

Chapitre 2

Quelques compléments

2.1 Quelles sont les fonctions intégrables ?

Avant de donner le résultat, on a besoin d'une notion :

Définition 2.1.1. —

- Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est NÉGLIGEABLE ou DE MESURE 0, si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver une famille dénombrable d'intervalles ouverts recouvrant E et dont la somme des longueurs est $\leq \epsilon$.
- On dit qu'une propriété est PRESQUE PARTOUT vraie si elle est vraie dans le complémentaire d'un ensemble négligeable.

Exemple 2.1.2. —

- Un intervalle (non-vide et non-réduit à un point) n'est pas négligeable : un ensemble négligeable n'a aucun point intérieur.
- Si $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ est un ensemble dénombrable, E est négligeable : les intervalles $]e_n - \frac{1}{2^{n+1}}\epsilon, e_n + \frac{1}{2^{n+1}}\epsilon[$ de longueur $\frac{1}{2^n}\epsilon$ recouvrent E et la somme de leurs longueurs est ϵ.
- Soient $E_k \subset \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ des ensembles négligeables, alors $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ est négligeable.

Définition 2.1.3. Soit $f : J = [a, b] \to \mathbb{R}$.

- La VARIATION de f est

$$\operatorname{var}(f, V) = \text{diamètre de } f(V) = \sup_{y,z \in V} |f(y) - f(z)|.$$

- L'OSCILLATION de f en $x \in J$ est

$$\operatorname{osc}(f, x) := \inf_{V \ni x} \operatorname{var}(f, V), \qquad V \text{ voisinage de } x.$$

-

$$O_\alpha(f) = \{x \in J \mid \operatorname{osc}(f, x) \geq \alpha\}.$$

Une fonction est continue en x si et seulement si son oscillation est 0 en x. Une fonction qui n'est pas continue en x peut quand même avoir une limite à droite et à gauche et il y a un SAUT :

$$|\lim_{y\uparrow x} f(y) - \lim_{z\downarrow x} f(z)| > 0.$$

On appelle une telle discontinuité une DISCONTINUITÉ DE PREMIÈRE ESPÈCE. Les autres sont de DEUXIÈME ESPÈCE.

Remarques : —

- Les ensembles $O_\alpha(f)$ sont fermés : si x est un point adhérent à $O_\alpha(f)$, alors chaque intervalle $]x-a, x+a[$, $a > 0$ rencontre $O_\alpha(f)$ et on a :

$$\mathrm{var}(f,]x-a, x+a[) \geq \alpha.$$

  Donc $x \in O_\alpha(f)$.
- On a

$$\{\text{Discontinuités de} \quad f\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_{1/k} f. \tag{2.1}$$

Théorème 2.1.4. *Une fonction bornée sur un intervalle $J = [a, b]$ est intégrable si et seulement si f est continue hors d'un ensemble négligeable*

Démonstration :

$\Longrightarrow$ Si l'ensemble des discontinuités n'est pas négligeable, la formule (2.1) montre qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, telle que $E = O_{1/k}(f)$ n'est pas négligeable. Donc il existe $c > 0$ telle que si on recouvre cet ensemble par une union finie d'intervalles, la somme des longueurs est $\geq c$. Soit $P = \{a = x_0, \dots, x_N = b\}$ une subdivision de J. Les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ qui rencontrent E recouvrent cet ensemble à un ensemble fini près. Donc la somme de leurs longueurs est $\geq c$. Pour un intervalle $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ contenant un point de $E = O_{1/k}(f)$ on a $\sup_{I_i} - \inf_{I_i} \geq 1/k$ et donc

$$S(P, f) - s(P, f) \geq c/k,$$

un nombre > 0, indépendant de P. Donc f n'est pas intégrable.

$\Longleftarrow$ Soit $\epsilon > 0$ et on pose

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

On sait par hypothèse que $O_{\tilde{\varepsilon}}$ est négligeable, mais aussi par la remarque ci-dessus, que cet ensemble est fermé et donc compact. Cela entraîne que pour tout $\eta > 0$ on peut recouvrir cet ensemble par un nombre fini d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est $\leq \eta$. On choisit

$$\eta = \frac{1}{4\|f\|}\epsilon, \tag{2.2}$$

ce qui donne des intervalles $I_1, \ldots, I_n$ dont la réunion V recouvre $O_{\tilde{\varepsilon}}$ et dont la longueur totale est $\leq \eta$. L'ensemble $K = J - V$ étant compact il sera recouvert par la réunion d'un nombre fini d'intervalles $J_1, \ldots, J_m$ telles que :

$$\mathrm{var}(f, J_k) < \tilde{\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Soit P la subdivision formée par toutes les extrémités des intervalles I_i et J_k. La longueur totale des intervalles I_i étant majorée par (2.2), la contribution de ces intervalles à $S(P, f) - s(P, f)$ est donc au plus

$$2\|f\|\frac{1}{4\|f\|}\epsilon = \epsilon/2.$$

Pour les intervalles J_k, on a $\left(\sup_{J_k} f - \inf_{J_k} f\right) < \tilde{\varepsilon}$ grâce à (2.3). Donc la contribution de ces intervalles à $S(P, f) - s(P, f)$ est au plus

$$\tilde{\varepsilon} \cdot \text{(longueur totale des } J_k) \leq \epsilon \frac{1}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon/2.$$

Donc, en rajoutant ces deux contributions on trouve $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$.

Applications 2.1.5. —

1. Puisque les discontinuités d'une fonction monotone forment au plus un ensemble dénombrable de sauts, une telle fonction est intégrable.
2. Si $f \geq 0$ et bornée intégrable sur J, alors $\int f = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.
3. Si f est intégrable, alors il existe une suite croissante, respectivement décroissante de fonctions e_n, respectivement e'_n en escalier telle que

$$\begin{aligned}
e'_n \quad &\leq \quad f \quad \leq \quad e_n \\
f(x) \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} e'_n(x) \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} e_n(x) \quad \text{presque partout,} \\
\int_J f \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} \int_J e'_n = \lim_{n\to\infty} \int_J e_n.
\end{aligned}$$

   Pour montrer cela, on prend une subdivision $\{x_0, \ldots, x_N\}$ équidistante de pas $(b-a)/2^n$ (donc $N = 2^n$). On définit $e'_n|[x_{i-1}, x_i[= \inf_{I_i} f$ et $e_n|[x_{i-1}, x_i[= \sup_{I_i} f$, $i = 1, \ldots, N$. Là où f est continue (donc hors d'un ensemble négligeable), clairement $\lim e_n = \lim e'_n = f$. Les subdivisions utilisées, disons P_n, ayant un pas qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, par le Coroll. 1.3.3, la limite de la suite $s(P_n, f) = \int_J e'_n$ existe et est égal à l'intégrale de f. Pareil pour $S(P_n, f) = \int_J e_n$.

2.2 Changement de variable

Supposons que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue. Il est souvent souhaitable de changer de variable : au lieu de $f(x)$ on utilise $f(x(t))$, où $x(t)$ est une fonction de $t \in [c,d]$. Si f est définie sur J il faut donc que x applique $[c,d]$ dans $[a,b]$. On suppose de plus que $a = x(c) < x(d) = b$ et que $t \mapsto x(t)$ soit continue et C^1 par morceaux. [1] Cela implique que $t \mapsto f(x(t))x'(t)$ est continue par morceaux et donc intégrable.

Lemme 2.2.1. *Sous ces hypothèses on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(t))x'(t)dt.$$

Avant de donner la preuve, on a le :
Rappel : La règle de dérivation des fonctions composées :

$$\boxed{\frac{d}{dt}f(x(t)) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x(t)} \cdot x'(t)}$$

ou

$$(f \circ x)' = (f' \circ x) \cdot x',$$

Démonstration : Soit F une primitive de f. Alors $F(b) - F(a) = F(x(d)) - F(x(c)) = \int_{x(c)}^{x(d)} f(x)dx$. De la règle de dérivation des fonctions composées on trouve :

$$(F \circ x)' = (f \circ x) \cdot x'$$

et donc $F(x(d)) - F(x(c)) = \int_c^d (f \circ x) \cdot x' \, dt$.

On peut étendre cette formule au cas où f est intégrable et x est strictement croissante (ou strictement décroissante) :

Proposition 2.2.2. *Soit $x : [c,d] \to \mathbb{R}$, strictement croissante, continue et C^1 par morceaux. Soit $a = x(c)$, $b = x(d)$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée et intégrable. Alors*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(t))x'(t)dt.}$$

Démonstration : On traite d'abord le cas d'une fonction f en escalier. Donc $f \circ x$ est aussi en escalier car x est strictement croissante. Par additivité, on peut même supposer que f est constante et donc continue, le cas déjà traité.

[1] Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est C^r par morceaux s'il y a une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f sur les intervalles ouverts $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \ldots, n$ soit C^r et soit prolongeable à une fonction C^r sur l'intervalle fermé $[x_{k-1}, x_k]$.

Dans le cas général il faut montrer que la fonction $f\circ x \cdot x'$ est intégrable. Par (2.1.5, 3) on peut encadrer f par deux fonctions en escalier e'_n et e_n qui convergent presque partout vers f et dont les intégrales convergent vers $\int_a^b f$. On vient de montrer que $e'_n\circ x \cdot x'$ et $e_n\circ x \cdot x'$ sont intégrables sur $[c, d]$ et que leurs intégrales valent $\int_a^b e'_n$ et $\int_a^b e_n$ respectivement. Puisque x est strictement croissante, on a aussi un encadrement

$$e'_n\circ x \cdot x' \leq f\circ x \cdot x' \leq e_n\circ x \cdot x'.$$

L'intégrabilité de $f\circ x \cdot x'$ suit alors du Lemme suivant dont la preuve est laissée au lecteur :

Lemme 2.2.3. *Soit $f : J = [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $h, g : J \to \mathbb{R}$ bornées et intégrables telles que*

$$\begin{gathered} g \quad \leq f \quad \leq h \\ \int_J h - \int_J g < \epsilon \end{gathered}$$

Alors, f est intégrable.

Ensuite, on doit montrer l'égalité des deux intégrales. D'abord on a l'encadrement des intégrales :

$$\int_a^b e'_n \leq \int_c^d f\circ x \cdot x' \leq \int_a^b e_n$$

et donc, en prenant les limites on trouve que $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f\circ x \cdot x'$.

2.3 Théorèmes de la moyenne

Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires Soit f continue sur $J = [a, b]$. Alors pour c telle que $m = \min_J f \leq c \leq M = \max_J f$, il existe $\xi \in J$ tel que $f(\xi) = c$.

Puisque $m(b - a) \leq \int_J f \leq M(b - a)$ on peut appliquer ce théorème avec c égal à la moyenne de f sur J, c.à.d. $c = (\int_J f)/(b - a)$. On souhaite généraliser cela pour certains produits :

Théorème 2.3.1. (Premier théorème de la moyenne) *Soit f continue et $g \geq 0$ intégrable sur $J = [a, b]$. Alors il existe $\xi \in [a, b]$ telle que :*

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \int_a^b g.}$$

Démonstration : On peut supposer que $\int_a^b g \neq 0$ (pourquoi ?) et on considère le nombre

$$c = \frac{\int_a^b f \cdot g}{\int_a^b g}.$$

Avec $m = \min_J f$ et $M = \max_J f$ on a :

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b f \cdot g \leq M \int_a^b g$$

et donc $m \leq c \leq M$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $\xi \in [a, b]$ telle que $f(\xi) = c$.

Remarque. La condition $g \geq 0$ est nécessaire : considérez $f(x) = g(x) = \sin x$ sur $[-\pi, \pi]$.

On a un théorème avec des hypothèse un peu différentes :

Théorème 2.3.2. (Deuxième théorème de la moyenne) *Soit f une fonction de classe C^1 et décroissante sur $[a, b]$ et soit g continue sur $[a, b]$. Alors, il y a $\xi \in [a, b]$ telle que*

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g = f(a) \int_a^\xi g + f(b) \int_\xi^b g.}$$

Démonstration : On sait que $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ existe et qu'elle est dérivable avec dérivée g. Une intégration par parties donne

$$\int_a^b fG' = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b Gf'. \tag{2.4}$$

Les hypothèse du premier théorème de la moyenne sont satisfaites pour G et $-f'$ (pourquoi ?) Il existe donc $\xi \in [a, b]$ telle que $\int_a^b Gf' = G(\xi) \int_a^b f' = G(\xi)(f(b) - f(a))$ et le résultat découle de la formule 2.4.

Remarque. On va montrer ce théorème avec des hypothèses plus faibles. Voir le théorème 3.4.1.

Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ? :

1. La fonction caractéristique d'un sous-ensemble de $[a, b]$ dont le complémentaire est négligeable est intégrable.
2. Soient f et g deux fonctions bornées sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ telles qu'elles coïncident hors d'un ensemble négligeable. Si f est intégrable, aussi g l'est et $\int_a^b f = \int_a^b g$.

3. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est presque partout continue sur chaque intervalle bornée est presque partout continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
4. La fonction $x \to \sin(1/x)$ sur $x > 0$ peut s'étendre en 0 à une fonction n'ayant que des discontinuités de la première espèce.
5. La limite d'une suite de fonctions en escalier sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable (si elle existe).
6. Soient f et g continues sur $[a, b]$, alors il y a un $c \in [a, b]$ telle que $\int_a^b f \cdot g = f(c) \int_a^b g$.
7. Dans les énoncés des théorèmes de la moyenne on peut supposer $\xi \in]a, b[$ au lieu de $\xi \in [a, b]$.

Problèmes

1. Le but de cet exercice est de montrer la formule de TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL :
   Soit $f : J \to \mathbb{R}$ de classe C^k. Alors pour $t \in J$ on a

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f(t) & = & f(a) + \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + R_k(t), \\ R_k(t) & = & \displaystyle\int_a^t \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x)dx. \end{array}}$$

   (a) Montrer le résultat pour $n = 1$.
   (b) Utilisant une intégration par parties, montrer que

$$R_{n-1}(t) = \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(t).$$

   (c) Conclure.
2. Montrer le LEMME DE LEBESGUE :
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a pour tout f de classe C^1 sur un intervalle $J = [a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f(t) \sin(nt)\, dt = 0.$$

   Indication : intégration par parties.
   (b) Montrer la même assertion pour une fonction bornée et intégrable sur J en utilisant une approximation par fonctions en escalier.
3. Soit f continue sur $[a, b]$. Montrer

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

   Calculer ensuite $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$.

4. Soit
$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2)dt.$$
Montre que $|f(x)| < 2/x$ si $x > 0$. Indication : faites la substitution $t^2 = u$ et utiliser le deuxième théorème de la moyenne.

5. Soit f une fonction intégrable sur $[0, \pi]$. Déterminer
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(t)|\sin(nt)|dt.$$
(Indication : partager le segment $[0, \pi]$ et utiliser le premier théorème de la moyenne).

6. Soit f une fonction de classe C^1 sur $J = [0, 2\pi]$ telle que $f(0) = f(2\pi)$.
   (a) Pourquoi $|f'|$ est-elle intégrable ? Soit $V(f, x) = \int_0^x |f'|$ et $V(f) = V(f, 2\pi 0$.
   (b) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ telle que $0 \le V(f, x) < \epsilon$ pour $x \in [0, \delta]$.
   (c)
$$\begin{aligned} n\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx\right| &\le V(f) \\ n\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx\right| &\le V(f). \end{aligned}$$

Chapitre 3

Intégrales et suites de fonctions

3.1 Introduction

RAPPELS 1. Soit $f_n : J \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On dit que f_n CONVERGE UNIFORMÉMENT vers une fonction f si pour tout $\epsilon > 0$, il existe N telle que pour tout $x \in J$ et $n \geq N$ on ait $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
2. Si $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f, alors f est continue. En particulier, f est intégrable. C'est un cas spécial du théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ une suite de fonctions intégrables sur un intervalle $J = [a, b]$. On suppose que $\{f_n\}$ converge uniformément vers f. Alors f est intégrable et*

$$\boxed{\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.}$$

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Par convergence uniforme il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq N$ et $x \in J$ on a l'inégalité

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3\epsilon|J|}, \quad |J| = b - a \quad \text{(la longueur de l'intervalle)}.$$

Puisque f_N est intégrable, il y a une subdivision P de J telle que

$$S(P, f_N) - s(P, f_N) < \frac{1}{3}\epsilon. \tag{3.1}$$

Puisque $f \leq f_N + \dfrac{1}{3\epsilon|J|}$ on a

$$S(P, f) \leq S(P, f_N) + \frac{1}{3}\epsilon \tag{3.2}$$

et l'inégalité $f \geq f_N - \dfrac{1}{3\epsilon|J|}$ donne

$$s(P, f) \geq s(P, f_N) - \frac{1}{3}\epsilon. \tag{3.3}$$

Combinant les trois inégalités (3.1)–(3.3), on trouve :

$$S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$$

et donc f est intégrable. Alors, pour $n \geq N$ on a :

$$\left| \int f - \int f_n \right| = \left| \int (f - f_n) \right| \leq \frac{1}{3}\epsilon$$

et donc $\int f = \lim_{n\to\infty} f_n$.
RAPPEL Soit $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ une suite de réels. On dit que LA SÉRIE $\sum a_n$ CONVERGE VERS a si la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ converge vers a.

Corollaire 3.1.2. *Soit $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ une suite de fonctions bornées et intégrables sur un intervalle $[a, b]$ telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers s. Alors*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

est intégrable et

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) \right).}$$

3.2 Le théorème de la convergence monotone

On a besoin des cas où la convergence n'est plus uniforme. Le cas le plus simple est celui des fonctions en escalier :

Lemme 3.2.1. *Soit $\{e_n\}$, $n = 1, \ldots$ une suite de décroissante de fonctions positives bornées et en escalier toutes définies sur $J = [a, b]$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(x) = 0$ presque partout. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \int e_n = 0$.*

Démonstration : Soit E' l'ensemble des points de discontinuités des e_n et soit E'' l'ensemble des points y ou les $e_n(y)$ ne convergent pas vers 0. Alors $E = E' \cup E''$ est un ensemble négligeable. Soit $\epsilon > 0$. On recouvre E par des intervalles ouverts dont la somme des longueurs est $\leq \epsilon$. Soit V la réunion de ces intervalles.

En dehors de E on a $\lim e_n(x) \to 0$ et il y a $N = N(x)$ telle que

$$e_n(x) < \epsilon, \quad n \geq N(x). \tag{3.4}$$

Puisque e_n est une fonction en escalier et x n'est pas un saut, e_n est localement constant en x. De plus, les e_n forment une suite décroissante, donc (3.4) reste vrai dans voisinage ouvert U_x de x. Les $\{U_x\}_{x \in J-E}$ forment un recouvrement ouvert du compact $J - V$ et un nombre fini de tels intervalles suffisent. On peut donc trouver N INDÉPENDANT de x telle que (3.4) est vrai pour $x \in J - V$. Les ensembles $\bar{V}$ ainsi que $J - V$ sont des unions finis d'intervalles fermés. Donc, par le règle d'additivité $\int_J = \int_{\bar{V}} + \int_{J-V}$. On trouve pour $n \geq N$:

$$0 \leq \int_J e_n = \int_{\bar{V}} e_n + \int_{J-V} e_n \leq \epsilon \|e_1\| + \epsilon(b-a).$$

Rappelant qu'une SUITE MONOTONE $\{f_n\}$ de fonctions (définies sur le même intervalle) est soit une suite croissante, soit une suite décroissante, le lemme implique :

Théorème 3.2.2. (CONVERGENCE MONOTONE – CAS DES FONCTIONS BORNÉES) *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions bornées intégrables sur $J = [a,b]$. On suppose que la suite $\{f_n\}$ est monotone. On suppose en plus qu'il y a une fonction bornée f et intégrable, telle*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

presque partout. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Démonstration : On peut supposer que la suite des $f_n(x)$ est croissante et donc $u_n(x) = \{(f(x) - f_n(x))\}$ est une suite décroissante qui décroît vers zéro presque partout. Donc la partie négative de $u_n(x)$ est presque partout égal à zéro. Donc on peut supposer que $u_n \geq 0$ et il suffit de montrer le théorème pour une suite décroissante de fonctions positives u_n et intégrables ayant limite 0 presque partout. Par 2.1.5, 3 on peut approximer u_1 par une fonction en escalier e_1 avec $0 \leq e_1 \leq u_1$ et dont l'intégrale est arbitrairement proche de $\int u_1$, disons

$$\int u_1 - \int e_1 < \epsilon$$

pour un $\epsilon > 0$ donné d'avance.

Ensuite on compare $\int u_2$ et $\int u_2 \wedge e_1$. On a $u_2 = u_2 \wedge e_1 + (u_2 - e_1)_+$ et puisque $u_2 \leq u_1$ cela entraîne :

$$\int u_2 - \int u_2 \wedge e_1 = \int (u_2 - e_1)_+ \leq \int (u_1 - e_1) < \epsilon.$$

On peut donc répéter la procédure : il y a une fonction en escalier e_2 telle que $0 \leq e_2 \leq u_2 \wedge e_1 \leq e_1$ et telle que

$$\int u_2 - \int e_2 < \epsilon.$$

On répète avec $u_3 \wedge e_2$ etc. On trouve une suite décroissante de fonctions positives et en escalier e_n ayant limite presque partout 0. Utilisant le Lemme 3.2.1 on trouve $\lim_{n\to\infty} \int e_n = 0$. D'autre part

$$\int u_n < \int e_n + \epsilon$$

et donc pour tout $\epsilon > 0$ on a :

$$\limsup_{n\to\infty} \int u_n \leq \epsilon$$

d'où :

$$\limsup_{n\to\infty} \int u_n = 0.$$

Puisque $\int u_n \geq 0$, on a $\liminf\limits_{n\to\infty} \int u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \int u_n = 0$.

On peut appliquer ce théorème à des séries de fonctions POSITIVES :

Corollaire 3.2.3. *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions positives et intégrables sur $J = [a,b]$ telle que la série $\sum f_n$ converge presque partout vers une fonction intégrable s. Alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_J f_n = \int_J s = \int_J \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

3.3 Le théorème de la convergence bornée

On veut étendre le théorème de convergence 3.2.2. D'abord un exemple instructif :

Exemple 3.3.1.

$$f_n = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2 x & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Les f_n sont intégrables sur $[0,1]$: leur intégrale est 1 et donc la limite des intégrales existe. D'autre part, $f_n \longrightarrow 0$ (presque partout) et donc l'intégrale de la limite f (qui est 0) est différent de 1, la limite des intégrales. On remarque que $\max f_n = n$ et donc les f_n ne sont pas uniformément bornées. Rappelons ici qu'une suite de fonctions $\{f_n\}$ sur un intervalle J est UNIFORMÉMENT BORNÉE s'il y a une constante M (qui ne dépend pas de n) telle que pour tout n on ait $|f_n| \leq M$.

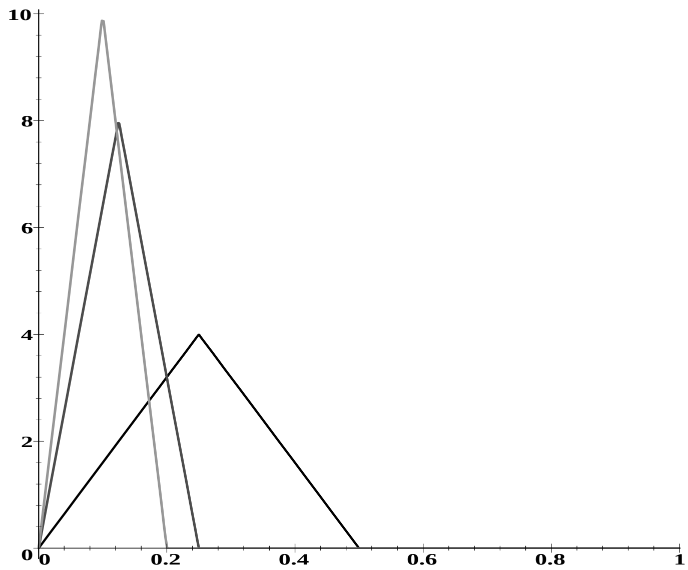

FIG. 3.1 – Les fonctions $f_n(x)$, $n = 4, 8, 10$

Théorème 3.3.2. (CONVERGENCE BORNÉE) *Soit* $f : J = [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable. On suppose qu'il y a une suite de fonctions* $\{f_n\}_{n=1,\ldots}$ *uniformément bornées et intégrables, telle que* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *presque partout. Alors on a :*

$$\boxed{\int_J f = \lim_{n\to\infty} \int_J f_n.}$$

**Démonstration* : En remplaçant f_n par $(f_n - f)$ on peut se ramener au cas où $f = 0$. On peut de plus supposer que $f_n \geq 0$. On pose alors

$$g_n := \sup_{p>n} f_p, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Cette suite $\{g_n\}$ est évidemment une suite décroissante de fonctions qui converge vers 0 presque partout, ce qui permettrait d'utiliser le Thm. 3.2.2, mais l'intégrabilité des g_n n'est pas assurée. L'idée est de remplacer g_n par des fonctions h_n proche de f_n (en un sens à préciser) qui soient *intégrables* et pour lesquelles on puisse utiliser ce théorème. On a besoin d'un outil crucial :

Lemme 3.3.3. *Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction positive bornée et $\epsilon > 0$. Alors il existe h, une fonction bornée positive* intégrable, *$h \leq g$ et pour tout $f : J \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $f \leq g$, on ait*

$$\int f \wedge h > \int f - \epsilon. \tag{3.5}$$

* *Preuve du lemme* : On pose

$$s = \sup_{\substack{k \text{ intégrable} \\ k \leq g}} \int_J k$$

et notons h une fonction intégrable telle que $\int_J h > s - \epsilon$. Si Si f est intégrable, on a évidemment

$$\int f = \int f \wedge h + \int (f - h)_+. \tag{3.6}$$

D'autre part, si de plus $f \leq g$, on a $h + (f - h)_+ = \sup(f, g) \leq g$ et donc $\int (f - h)_+ + \int h \leq s$ par la définition de s. Autrement dit, on a

$$\int (f - h)_+ \leq s - \int h < \epsilon,$$

soit, en reportant dans 3.6

$$\int f \wedge h > \int f - \epsilon.$$

Démonstration du théorème :
Première Étape : Soit $\epsilon > 0$; on va construire une suite $\{h_n\}$ décroissante de fonctions positives et intégrables telles que

1. $h_n \leq g_n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f \leq g_n$ est une fonction intégrable
$$\int f \wedge h_n > \int f - \epsilon.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le lemme précédent fournit une fonction $\tilde{h}_n \leq g_n$ telle que, pour tout f intégrable avec $f \leq g_n$ on ait

$$\int f \wedge \tilde{h}_n > \int f - \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Posons alors $h_n = \tilde{h}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{h}_n$. Montrons par récurrence sur n que pour tout $f \leq g_n$:

$$\int f \wedge h_n > \int f - \epsilon \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Si $n = 1$ et si $f \leq g_1$, alors

$$\int f \wedge h_1 = \int f \wedge \tilde{h}_1 > \int f - \epsilon/2,$$

ce qui montre le résultat pour $n = 1$.

Supposons le résultat vrai pour $n = k$. Si $f \leq g_k$, alors $\int f \wedge h_k > \int f - \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$. Soit $f \leq g_{k+1}$; on a :

$$\begin{aligned}
\int f \wedge h_{k+1} = \int (f \wedge h_k) \wedge \tilde{h}_{k+1} \quad &> \quad \int f \wedge h_k - \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \\
&> \quad \int f - \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) - \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \\
&> \quad \int f - \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)
\end{aligned}$$

Deuxième Étape : La suite $\{h_n\}$ ainsi construite est évidemment une suite décroissante de fonctions intégrables positives qui converge presque partout vers 0 (on se rappelle que $h_n \leq g_n$). D'après le théorème de convergence monotone (3.2.2) on a $\lim_{n\to\infty} \int h_n = 0$.

On a d'autre part, grâce à la première étape

$$\int |f_n| < \int |f_n| \wedge h_n + \epsilon \leq \int h_n + \epsilon,$$

d'où

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \int_J |f_n| < \epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $\limsup_{n\to\infty} \int_J |f_n| = 0$. Puisque $\int |f_n| \geq 0$, on a $\liminf_{n\to\infty} \int_J |f_n| \geq 0$. Donc $\lim_{n\to\infty} |f_n| = 0$, ce qui entraîne que la suite $\{\left|\int f_n\right|\}$ converge vers 0 aussi.

3.4 Applications

Voici une autre version du deuxième théorème de la moyenne :

***Théorème 3.4.1.** (DEUXIÈME THÉORÈME DE LA MOYENNE.) *Soit f décroissante et g intégrable sur $J = [a, b]$. Alors, il y a $\xi \in [a, b]$ telle que*

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g = f(a) \int_a^\xi g + f(b) \int_\xi^b g.}$$

Démonstration : En remplaçant f par $(f - f(b))$ on se ramène au cas d'un fonction f positive avec $f(b) = 0$. On peut aussi supposer que $f(a) > 0$ (sinon $f = 0$). Soit

$$G(u) = \int_a^u g(t)dt,$$

une fonction continue. Donc $m = \min G$ et $M = \max G$ existent. On montrera l'inégalité

$$mf(a) \leq \int f \cdot g \leq Mf(a). \tag{3.7}$$

En effet, si cela est prouvé, le résultat se déduit immédiatement du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction G et la valeur

$$c = \frac{\int f \cdot g}{f(a)}.$$

Les deux inégalités se réduisant à la seconde : remplacer g par $-g$. On va donc montrer la seconde inégalité.

On suppose d'abord que f est une fonction en escalier définie par une subdivision $\{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ constant égale à c_i sur l'intervalle $I_i = [x_{i-1}, x_i[$. Alors (utilisant que $c_n = 0$ et $G(x_0) = 0$)

$$\begin{aligned}
\int f \cdot g &= \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{I_k} g \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k [G(x_k) - G(x_{k-1})] \\
&= c_n G(x_n) - c_1 G(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} G(x_k)(c_k - c_{k+1}) \\
&\leq M \left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k - c_{k+1} \right) \\
&= Mc_1 = Mf(a).
\end{aligned}$$

Cela montre la seconde inégalité de (3.7) pour une fonction en escalier.

Ensuite, on utilise qu'une fonction intégrable est la limite d'une suite de fonctions $\{e_n\}$ en escalier (application 2.1.5, 3). On peut supposer $e_n(a) = f(a)$ et $e_n(b) = f(b)$. On utilise ensuite le théorème 3.3.2 pour déduire

$$\int_a^b f \cdot g = \lim_{n \to \infty} \int_a^b e_n \cdot g \leq Mf(a).$$

cela montre la seconde inégalité de (3.7) aussi pour f.

Voici une autre application :

Théorème 3.4.2. (σ-ADDITIVITÉ.) *Soit f bornée et intégrable sur J et soit*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = b$$

une subdivision de J en sous-intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Alors la série $\sum \int_{I_k} f$ converge et on a :

$$\int_J f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} f$$

Démonstration : On considère les sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{I_k} f = \int_a^{x_N} f = \int_a^b f \cdot \mathbb{1}_{J_N}, \quad J_N = [a, x_N].$$

Puisque $|f \cdot \mathbb{1}_{J_N}| \leq |f|$ est bornée sur J on peut appliquer le théorème 3.3.2 et le résultat suit.

Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ? :

1. Une suite convergente de fonctions intégrables est intégrable. Indication : écrire la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ comme limite de fonctions caractéristiques d'ensembles finis.
2. Si la limite d'une suite de fonctions intégrables existe, cette limite vaut l'intégrale de la limite.
3. Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions intégrables sur $J = [a, b]$ telle que la série $\sum f_n$ converge presque partout vers une fonction intégrable s. Alors
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_J f_n = \int_J s = \int_J \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$
Indication : reconsidérer l'exemple 3.3.1 en écrivant f_n comme une somme partielle.
4. Soit $\{g_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ une collection dénombrable de fonctions intégrables. Alors $\sup_{n=1,\ldots} g_n$ est intégrable. Indication : écrire la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ comme sup de fonctions intégrables.

Problèmes

1. Soit
$$f_n = n^p x(1 - x^2)^n, \quad (0 \leq x \leq 1, n = 1, 2, 3, \ldots).$$
   (a) Esquisser les fonctions f_n, $n = 1, 2, 3$ si $p = 1$.
   (b) Calculer $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $F_n(x) = \int_0^1 f_n(x)dx$ et $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$.
   (c) Pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{R}$ a-t-on $F(x) = \int_0^1 f(x)dx$?
2. On se donne une suite $x_n \in]a, b[$, $n = 1, 2, \ldots$ de points distincts et soit $\sum |c_n|$ une série convergente. On pose $I_n =]x_n, b[$ et soit $\mathbb{1}_{I_n}$ sa fonction caractéristique. On définit
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbb{1}_{I_n}(x).$$

(a) Montrer que cette série converge uniformément.

(b) Montrer que f est continue hors des points x_n.

(c) Donner une expression pour $\int_a^b f(x)$ en termes de $\sum c_n$ et $\sum x_n c_n$.

3. Soit
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{frac}(nx)}{n^2}.$$

(a) Trouver les points de discontinuité de f et montrer qu'elles forment un ensemble dense de $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est intégrable sur chaque intervalle borné.

4. Soit x un réel, $x \neq \pm 1$; soit n un entier positif.

(a) Justifier l'existence de
$$J_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{x^2 + 1 - 2x \cos t} dt.$$

(b) Calculer $J_n(0)$. La fonction J_n est-elle paire ou impaire ?

On suppose désormais : $0 < x < 1$.

(c) Calculer $J_0(X)$ en faisant le changement de variable $t = 2\text{Arctan}(u)$.

(d) Exprimer $2xJ_1(x)$ en fonction de x et $J_0(x)$.

(e) Calculer $J_{n+2}(x) + J_n(x) - (x + \frac{1}{x})J_{n+1}(x)$.

(f) Expliciter $J_n(x)$.

Chapitre 4

Intégrales : le cas non-borné

4.1 Le cas des intervalles bornés

Soit $J = |a, b| \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné. La notation signifie que les extrémités peuvent ou ne peuvent pas être incluses. On se restreindra au cas de fonctions $f : J \to \mathbb{R}$ qui sont presque partout continues, mais pas forcément bornées. Si on étend f aux extrémités de façon arbitraire, la fonction reste presque partout continue. En cas de besoin, on pourra donc travailler avec un intervalle compact $J = [a, b]$.

Exemple 4.1.1. Une fonction comme $1/\sin(1/x)$ sur l'intervalle $|-1, 1|$ a des singularités aux points $1/k\pi i$ ou elle devient $\pm\infty$. Donc elle est presque partout continue, mais elle n'est pas bornée sur aucun sous-intervalle qui inclut 0 (on a un point d'accumulation de points où la fonction devient $\pm\infty$).

On se contente d'abord de regarder les fonctions *positives*. Dans ce cas la suite des fonctions $f_n = f \wedge n$, $n = 1, 2, ..$ converge vers f. On peut supposer que la fonction f_n est définie sur $[a, b]$ et par nos hypothèses, elle est intégrable (pourquoi ?). Aussi, si f est déjà bornée, $f = f_n$ pour tout n suffisamment grand. Il est donc naturel de postuler :

Définition 4.1.2. Soit J un intervalle borné. Soit $f : J \to \mathbb{R}_+$ presque partout continue. On dit que f est INTÉGRABLE si

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f \wedge n = \mathbb{I}$$

existe ; dans ce cas on pose :

$$\int_J f = \mathbb{I}.$$

On utilisera plusieurs fois :

Lemme 4.1.3. *Si $f : J \to \mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable dans ce sens et si g est presque partout continue sur J et telle que $0 \leq g \leq f$ presque partout, alors g est intégrable et $\int_J g \leq \int_J f$.*

Démonstration : On a $0 \leq g \wedge n \leq f$ et donc $\mathbb{I}_n := \int_J g \wedge n \leq \int_J f$. La suite croissante $\mathbb{I}_n$ reste bornée, donc elle a une limite.

Ce lemme permet de traiter les fonctions $f : J \to \mathbb{R}$ presque partout continues, mais pas forcément positives. Puisque $0 \leq f_+ \leq |f|$ et $0 \leq f_- \leq |f|$, on a donc :

Définition 4.1.4. Soit $f : J \to \mathbb{R}$ presque partout continue. On dit que f est INTÉGRABLE si $|f|$ est intégrable. Dans ce cas $\int_J f_+$ et $\int_J f_-$ existent et on pose

$$\int_J f = \int_J f_+ - \int_J f_-.$$

La classe des fonctions intégrables dans ce sens sera notée par $\mathcal{I}(J)$.

Remarque. Dans le Chap. 1 on a vu : une fonction bornée intégrable est absolument intégrable. La réciproque n'est pas vraie. La nouvelle définition est donc plus restrictive. Mais pour la classe des fonctions presque partout continues et bornées on a trivialement que f est intégrable si et seulement si $|f|$ est intégrable.

Il est souhaitable de remplacer la définition ci-dessus par une définition plus flexible. Par exemple, on souhaite remplacer $f_n = f \wedge n$ par n'importe quelle suite convergente de fonctions presque partout continues.

Proposition 4.1.5. *Soit $f : J \to \mathbb{R}_+$ une fonction presque partout continue. On considère l'ensemble*

$$I(f, J) = \left\{ \int_J g \mid g : J \to \mathbb{R} \text{ bornée et intégrable, } 0 \leq g \leq f \text{ presque partout.} \right\}$$

Alors f est intégrable si et seulement si $I(f, J) \subset \mathbb{R}_+$ est borné. Si c'est le cas, on a

$$\int_J f = \sup I(f, J).$$

Démonstration :
$\Longrightarrow$ Si $I(f, J)$ est bornée, f est clairement intégrable et $\int_J f \leq \sup I(f, J)$. D'autre part, si g est bornée, intégrable sur J telle que $0 \leq g \leq f$, les fonctions $g_n = g \wedge n \leq f_n = f \wedge n$ sont intégrables et convergent vers g. Par convergence monotone (Thm. 3.2.2) $\lim \int_J g_n = \int_J g$ et donc $\lim \int f_n = \int_J f \geq \int_J g$. En prenant le sup on trouve $\int_J f \geq \sup I(f, J)$.
$\Longleftarrow$ Si f est intégrable, et si g est intégrable et bornée et $g \leq f$, alors $g \leq f_n$ si n est assez grand. Donc $\int_J g \leq \int_J f_n \leq \int_J f$. L'ensemble $I(f, J)$ est alors borné. Le nombre $\lim n \to \infty \int_J f \wedge n$ réalise $\sup I(f, J)$ et donc $\int_I f = \sup I(f, J)$.

Avec cette définition équivalente on peut montrer une généralisation du théorème 3.2.2 :

Théorème 4.1.6. (CONVERGENCE MONOTONE – SUITE) *Soit $J = |a, b|$ un intervalle borné et soit $f : J \to \mathbb{R}_+$ presque partout continue. On suppose qu'il y a une suite croissante de fonctions intégrables $f_n : J \to \mathbb{R}_+$, telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

presque partout. Alors
1) *Si $\lim_{n\to\infty} \int_J f_n$ existe, f est intégrable et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f_n = \int_J f.$$

2) *Si $\lim_{n\to\infty} \int_J f_n = +\infty$, alors f n'est pas intégrable sur J.*

Démonstration : On a

$$\bigcup_n I(f_n, J) \subset I(f, J)$$

ce qui montre 2).

En ce qui concerne 1), pour tout $g \leq f$, g intégrable et bornée, la fonction $g \wedge f_n$ est bornée et intégrable, et la suite $\{g \wedge f_n\}$ converge presque partout vers la fonction bornée et intégrable g. Par le théorème 3.2.2, $\lim_{n\to\infty} \int_J g \wedge f_n = \int_J g$. Puisque $g \wedge f_n \leq f_n$, cela implique $\int_J g \leq \lim_{n\to\infty} \int_J f_n$ et donc en prenant le sup sur les g :

$$\int_J f \leq \lim_{n\to\infty} \int_J f_n.$$

Par lemme 4.1.3 l'inégalité $f_n \leq f$ donne l'inégalité opposée.

Corollaire 4.1.7. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction* positive et presque partout continue *telle que $f|J'$ soit intégrable pour tout J', sous-intervalle compact de $[a, b[$. Supposons que pour une suite croissante $\{b_n\}_{n=1,\dots}$ avec limite b on ait :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f = \mathbb{I},$$

alors f est intégrable avec intégrale $\int_a^b f = \mathbb{I}$.

Démonstration : On applique Prop. 4.1.6 à la suite des fonctions $f \cdot \mathbb{1}_{[a,b_n]}$.

4.2 Les propriétés de base (I)

Pour les fonctions intégrables dans le nouveau sens, on a des propriétés de base analogues à celles valables pour la classe des fonctions bornées intégrables :

Propriétés 4.2.1. Soit $J = |a, b|$ un intervalle *borné*. Alors :

1. L'intégration
$$\begin{cases} \int & : \mathcal{I}(J) \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \int_J f. \end{cases}$$
est une application linéaire qui respecte l'ordre : si $f \leq g$, alors $\int_J f \leq \int_J g$;
2. Soient f et g presque partout continues sur J, f intégrable et g bornée, alors fg est intégrable ;
3. f et g sont intégrables, alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ le sont.
4. L'intégration est additive : pour $c \in [a, b]$ les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ existent et on a
$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.}$$
5. Soit $f \in \mathcal{I}(J)$, alors
$$\left| \int_J f \right| \leq \int_J |f|.$$

Démonstration :

1. — Si f est intégrable, af est intégrable : par la définition de l'intégrale $\lim_{n\to\infty} \int_J |f| \wedge n = \int_J |f|$ et $|a|(|f| \wedge n)$ est une suite croissante qui converge vers $|a||f|$ et donc, par le théorème 4.1.6, $|af|$ est intégrable et $\displaystyle\int_J |af| = |a| \lim_{n\to\infty} \int_J |f| \wedge n = |a| \int_J |f|$. De là on déduit que $\int_J af = a \int_J f$.
— Complétons la linéarité d'abord pour les fonctions *positives*. Or, par la définition de l'intégrale $\lim_{n\to\infty} \int_J f \wedge n = f$ et $\lim_{n\to\infty} \int_J g \wedge n = g$. On considère $f \wedge n + g \wedge n$, une suite croissante qui converge vers $f + g$. Puisque $\int_J (f \wedge n + g \wedge n) = \int_J f \wedge n + \int_J g \wedge n$ converge vers $\int_J f + \int_J g$, le résultat est une conséquence du théorème 4.1.6. Ensuite, puisque $|f + g| \leq |f| + |g|$, le lemme 4.1.3 garantit que $f + g$ est intégrable en général. Finalement, pour calculer l'intégrale, décomposons $f = f_+ - f_-$ et $g = g_+ - g_-$; on a une égalité entre fonctions *positives* : $(f + g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f + g)_-$. Donc, pour leurs intégrales on a :
$$\int_J (f + g)_+ + \int_J f_- + \int_J g_- = \int_J f_+ + \int_J g_+ + \int_J (f + g)_-$$

et, par la définition même des intégrales :

$$\int_J (f+g) = \int_J f + \int_J g.$$

— On a déjà remarqué que pour des fonctions positives $f \le g$ implique $\int_J f \le \int_J g$. En décomposant $f = f_+ - f_-$ et $g = g_+ - g_-$ on voit que $f \le g$ signifie $f_+ \le g_+$ et $f_- \ge g_-$, d'où le résultat en général.

2. Soient f, g presque partout continues, f intégrable et $|g| \le M$. Alors fg est presque partout continue et $|fg|$ est majorée par la fonction intégrable $M|f|$. Le lemme 4.1.3 implique alors que $|fg|$ (et donc fg) est intégrable.
3. Utiliser $f \vee g = \frac{1}{2}\left[(f+g) + |f-g|\right]$ et $f \wedge g = \frac{1}{2}\left[f+g-|f-g|\right]$.
4. Cela découle de l'additivité pour les fonctions $f \wedge n$, $n = 1, 2, \ldots$.
5. Par définition $\int_J f = \int_J f_+ - \int_J f_-$ et donc

$$\left|\int_J f\right| \le \int_J f_+ + \int_J f_- = \int_J (f_+ + f_-) = \int_J |f|.$$

L'additivité a des conséquences importantes, par exemple, si f est intégrable sur un intervalle J, elle est intégrable sur tout sous-intervalle de J. Cela entraîne qu'on peut calculer une intégrale sur un intervalle $[a, b[$ comme limite d'intégrales sur des intervalles fermés ; plus généralement on a :

Proposition 4.2.2. *Soit $J = |a, b|$ et $f \in \mathcal{I}(J)$. Alors pour tout suite $\{b_n\}$ qui converge vers b on a :*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f = \int_a^b f.}$$

Démonstration : En remplaçant b_n par $c_n = \min_{m \ge n} b_m$, la suite $\{c_n\}$ converge de façon monotone vers b. Si f est intégrable sur J, f est intégrable sur tout sous-intervalle de J et on a

$$\left|\int_{b_n}^b f\right| \le \int_{b_n}^b |f| \le \int_{c_n}^c |f|. \tag{4.1}$$

La suite des fonctions positives $|f|\mathbb{1}_{[a,c_n]}$ converge de façon monotone vers $|f|$ et donc, par le thm. 4.1.6, $\lim_{n\to\infty} \int_a^{c_n} |f| = \int_a^b |f|$. Par 4.1 $|\int_a^b f - \int_a^{b_n} f| = |\int_{b_n}^b f| \le \int_{c_n}^b |f|$ et converge donc vers 0.

4.3 Le cas des intervalles non-bornées

Le but est d'étendre la définition d'intégrale de Riemann à des fonctions définies sur un intervalle $J = |a, b| \subset \mathbb{R}$ quelconque, donc $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ sont possibles. L'idée est qu'on souhaite partir de la définition de la section 4.1 tout en conservant la σ-additivité de l'intégrale.

Exemple 4.3.1.

1. Sur $J = [1, \infty[$ on considère $x \to 1/x$. On découpe J en sous-intervalles de la forme $J_n = [n, n+1]$. Les intégrales $\int_{J_n} f$ ont un sens. Si on veut que la règle de σ-additivité reste vraie, il faut postuler
$$\int_J f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$
et c'est une somme divergente. Donc on s'attend à ce que $1/x$ ne soit pas intégrable sur $[1, \infty[$. Voir l'exemple 4.7.4, 2.
2. Sur $J = [1, \infty[$ on considère la fonction $x \to x^{-5/3}$. Si on fait le même calcul (avec la même subdivision) on trouve cette fois la somme
$$\frac{3}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} - \frac{1}{(n+1)^{2/3}}\right] = \frac{3}{2}.$$
On s'attend à ce que l'intégrale soit égale à $\frac{3}{2}$. Voir l'exemple 4.7.4, 2.

Ces exemples montrent qu'il est naturel découper un intervalle donné en sous-intervalles où la fonction est intégrable. En découpant l'intervalle si nécessaire, on peut réduire au cas d'un intervalle de la forme $|a, +\infty|$ ou $|-\infty, b|$. Par symétrie on peut se placer dans le premier cas.

• **Le cas des fonctions positives** :

Définition 4.3.2. On dit qu'une fonction $f : J = [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, *presque partout continue* est INTÉGRABLE si l'on peut trouver une subdivision
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$
de J en sous-intervalles $J_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ tels que :

– La restriction de f à J_k soit intégrable (au sens du §4. 1),

– la série des intégrales de f sur J_k, i. e. $\sum_k \int_{J_k} f$ soit convergente.

Dans ce cas on pose
$$\int_J f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} f,$$
ce que l'on appelle L'INTÉGRALE DE f.

Maintenant se pose un problème naturel : qu'est-ce que ce passe si on choisit une autre subdivision ? La σ-additivité nous prescrit de considérer le raffinement commun et cela mène à une série double dans laquelle on souhaite échanger l'ordre de sommation.

Plus précisément on introduit

Définition 4.3.3. Soit $\sum a_n$ une série de réels ou de complexes, et soit $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. On note $a'_i = a_{k(i)}$. On dit que $\sum a'_n$ est un RÉARRANGEMENT DE $\sum a_n$.

En général, si $\sum a_n$ converge, un réarrangement peut ou ne peut pas converger et s'il converge, la somme peut être différente. Mais si la série est absolument convergente on a :

Proposition 4.3.4. (RAPPEL) *Soit $\sum a_n$ une série, telle que $\sum |a_n|$ soit convergente. Alors $\sum a_n$ est convergente et tout réarrangement donne une série convergente avec même somme.*

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Par le critère de Cauchy, il existe N telle que

$$\sum_{i=m}^{n} |a_i| < \epsilon, \quad n \geq m \geq N. \tag{4.2}$$

Soit $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection, $\sum a'_i$ le réarrangement de $\sum a_i$ qu'elle définit. On choisit p suffisamment grand : les entiers $1, 2, \ldots, N$ sont tous contenus dans $\{k(1), \ldots, k(p)\}$. Ce nombre p ne dépend que de ϵ et si $\ell > p$ les nombres $a_1, \ldots, a_N$ figurent dans $s_\ell = a_1 + \cdots + a_\ell$ et dans $s'_\ell = a'_1 + \cdots + a'_\ell$. Donc

$$|s'_\ell - s_\ell| \leq \sum_{i=N+1}^{M} |a_i| < \epsilon, \quad M := \max(\ell, k(1), \ldots, k(\ell))$$

par 4.2. Cela veut dire que $\sum s'_k$ est convergente avec somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} s_k$.

Corollaire 4.3.5. *Soient a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots$ des réels ou des complexes tels que*

- *pour chaque i fixé, $a_{ij} = 0$ si $j > n_i$,*
- *pour chaque j fixé, $a_{ij} = 0$ si $i > m_j$.*

On suppose que la série

$$a_{11} + \cdots + a_{1n_1} + a_{21} + \cdots + a_{2n_2} + \cdots$$

converge absolument. Posant $A_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}$ et $A'_j = \sum_{i=1}^{m_j} a_{ij}$, on a

$$\sum_i A_i = \sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij} = \sum_j A'_j.$$

Utilisant ce corollaire, on peut montrer que la définition ne dépend pas de la subdivision de J qu'on a utilisée. Soit

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_\ell < \cdots, \quad J_\ell = [y_{\ell-1}, y_\ell]$$

une autre subdivision satisfaisant aux conditions de la définition. On pose $I_{k\ell} = I_k \cap J_\ell$. Alors les $I_{k\ell}$ forment une troisième subdivision de I, le raffinement commun des deux. Un intervalle $[c,d] \subset J$ ne rencontre qu'un nombre fini d'intervalles J_ℓ. Donc, en particulier, la somme $\sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{I_{k\ell}} f = \int_{I_k} f$ est finie. Pareil pour la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_{k\ell}} f = \int_{J_\ell} f$. Donc, par le corollaire :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} f = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{J_\ell} f.$$

• **Le cas général** :

On utilise le Corollaire 4.3.5, pour définir $\int_J f$ dans le cas général : si $\sum_k \int_{J_k} |f|$ converge, aussi $\sum_k \int_{J_k} f$ converge et on arrive à la définition suivante :

Définition 4.3.6. On dit qu'une fonction $f : J = [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, *presque partout continue* est INTÉGRABLE si $|f|$ est intégrable. Pour tout subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots , \quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

de J en sous-intervalles $J_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ tels que la restriction de f à J_k soit intégrable et $\sum_k \int_{J_k} |f|$ soit convergente, la série $\sum_k \int_J f$ est convergente ; la somme ne dépend pas de la subdivision et on pose

$$\boxed{\int_J f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} f,}$$

ce que l'on appelle L'INTÉGRALE DE f.

Remarque. De ce qui précède, on voit que si on sait que f est intégrable sur $J = [a, \infty[$ et sur les intervalles J_k de n'importe quelle subdivision de J, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} f = \int_J f$.

On étend la propriété d'additivité :

Lemme 4.3.7. *Soit $f : J = [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable. Alors pour tout $b \geq a$*

$$\boxed{\int_J f = \int_a^b f + \int_b^{\infty} f.}$$

Démonstration : Soient $\{J_k\}$ les sous-intervalles telles que $\int_J f = \sum_k \int_{J_k} f$. Pour leurs intersections avec $I_1 := [a, b]$ et $I_2 := [b, \infty[$ l'additivité dans le cas borné donne :

$$\int_{J_k} f = \int_{J_k \cap I_1} f + \int_{J_k \cap I_2} f. \tag{4.3}$$

Par la définition de l'intégrale on a

$$\sum_k \int_{J_k} |f| < \infty.$$

Les estimations

$$\int_{J_k \cap I_\alpha} |f| \leq \int_{J_k} |f|, \quad \alpha = 1, 2$$

donnent alors que

$$\sum_k \int_{J_k \cap I_\alpha} |f| < \infty, \quad \alpha = 1, 2;$$

donc les intégrales de f sur I_1 et I_2 existent et par (4.3) leur somme vaut $\int_J f$.

Ce lemme se généralise aux cas d'une subdivision (finie ou même dénombrable) de l'intervalle J : si $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ est une suite avec limite $+\infty$, et f est intégrable sur $[a, \infty[$, f est intégrable sur chaque sous-intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ et, par la remarque ci-dessus, $\sum \int_{I_k} f$ est convergente avec somme $\int_J f$. Cela donne la version de la Prop. 4.2.2 dans le cas d'un intervalle non borné :

Proposition 4.3.8. *Soit $f : J = [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable. Alors pour toute suite $\{b_n\}$ avec limite $+\infty$ on a :*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f = \int_a^\infty f.}$$

Démonstration : Comme dans la démonstration de la Prop. 4.2.2, on peut supposer que la suite $\{b_n\}$ est croissante. On peut aussi supposer que $b_1 = a$ et donc, par la définition de l'intégrale, $\int_J f = \sum_{k=1}^\infty \int_{b_k}^{b_{k+1}} f$ est la somme d'une série absolument convergente et donc convergente. En d'autre termes, on a $\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f = \int_J f$.

On étend le lemme 4.1.3 au cas d'un intervalle non-borné :

Lemme 4.3.9. *Soient $f, g : |a, \infty| \to \mathbb{R}_+$ presque partout continues telles que $0 \leq g \leq f$ presque partout. Si f est intégrable, alors g est aussi intégrable et $\int_J g \leq \int_J f$.*

Démonstration : Soit $a = b_1, b_2, \ldots$ une suite croissante tendant vers l'infini. Par hypothèse $\mathbb{I}_n = \int_{b_n}^{b_{n+1}} f$ existe et $\mathbb{J}_n = \int_{b_n}^{b_{n+1}} g \leq \mathbb{I}_n$. Par hypothèse $\sum \mathbb{I}_n$ est une série convergente et donc aussi $\sum \mathbb{J}_n$ est convergente. Par définition cela veut dire que g est intégrable. De plus, $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{J} = \int_J g \leq \sum_{n=1}^\infty \mathbb{I} = \int_J f$.

Cela peut être appliqué à f_+ et f_-, où f est une fonction intégrable ; donc la définition pour le cas d'un intervalle non-borné est consistante avec celle dans le cas d'un intervalle borné :

Corollaire 4.3.10. *Soit $f : J = [a, \infty[\to \mathbb{R}$ intégrable, alors f_+ et f_- sont intégrables et $\int_J f = \int_J f_+ - \int_J f_-$.*

4.4 Les propriétés de base (II)

On peut maintenant généraliser les propriétés 4.2.1 au cas général :

Propriétés 4.4.1. Soit $J = |a, b|$ un intervalle quelconque (donc $a = -\infty$ ou $b = \infty$ est possible). Soit $\mathcal{I}(J)$ la classe des fonctions intégrables.

1. L'intégration est une fonction linéaire $\int : \mathcal{I}(J) \to \mathbb{R}$ qui respecte l'ordre : si $f \leq g$, alors $\int_J f \leq \int_J g$;
2. Soient f et g presque partout continues sur J, f intégrable et g bornée, alors fg est intégrable ;

3. Si $f,\, g \in \mathcal{I}(J)$, alors $f \vee g,\, f \wedge g \in \mathcal{I}(J)$.
4. Si f est intégrable sur J, elle est intégrable sur chaque sous-intervalle de J et
$$\int_a^b f = \int_a^c + \int_c^b f.$$
5. Soit $f \in \mathcal{I}(J)$, alors
$$\left|\int_J f\right| \leq \int_J |f|.$$

Démonstration : Les propriétés ont été montrées pour le cas d'un intervalle borné (Prop. 4.2.1). L'additivité a été montré pour le cas d'un intervalle du type $[a, +\infty[$; la même démonstration s'applique aux autres cas. Pour cette raison et par symétrie, pour montrer les autres propriétés, on peut ce restreindre au cas $[a, +\infty[$. L'additivité implique que f est intégrable sur $[a, b_n]$ pour une suite $\{b_n\}$ qui converge vers $+\infty$ et on utilise Prop. 4.3.8 pour montrer les propriétés 1), 2) et 5) dans ce cas. Par exemple, utilisant que la somme de deux séries convergentes $\sum A_i$ et $\sum B_i$ est convergente avec somme $\sum_{i=1}^{\infty}(A_i + B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i + \sum_{i=1}^{\infty} B_i$, la Prop. 4.3.8 implique que si $f, g \in \mathcal{I}(J)$, alors $f + g \in \mathcal{I}(J)$ et
$$\int_a^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} (f+g) = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f + \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} g = \int_a^{\infty} f + \int_a^{\infty} g.$$
La propriété 3) se déduit comme pour les intervalles bornés.

4.5 La formule du changement de variables

Il s'agit d'une généralisation du Thm. 2.2.2 :

Théorème 4.5.1. *Soit $x : |c, d| \to |a, b|$ surjective, strictement croissante, continue et C^1 par morceaux. Soit $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ intégrable. Alors*
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f((x(t))x'(t)dt.}$$

Démonstration : Si $f \geq 0$, alors $(f\circ x)x' \geq 0$, donc $(f\circ x)x')_{\pm} = (f_{\pm}\circ x)x'$ et il suffit donc de traiter le cas des fonctions positives.

On a $x(c) = a$ et $x(d) = b$ et x envoit chaque sous-intervalle borné et fermé de $|c, d|$ vers un intervalle borné et fermé de $|a, b|$. Puisqu'on peut calculer les intégrales en prenant des limites sur des intégrales évaluées sur un intervalle borné (Thm. 4.2.2 et 4.3.8), il suffit de traiter le cas des intervalles bornés, fermés. Si f est bornée, $f\circ x$ est aussi bornée, le cas déjà connu. Cela s'applique aux fonctions $f \wedge n$. La suite $\{f \wedge n\}$ converge de façon monotone vers f et la suite $\{(f \wedge n)\circ x\}$ converge de façon monotone vers $f\circ x$. Le théorème 4.1.6 (convergence monotone) implique alors le résultat.

Remarque. Si la fonction $x(t)$ est strictement décroissante, il faut remplacer x' par $-x'$ dans la formule du changement des variables ; dans le cas général on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f((x(t))|x'(t)|dt.$$

4.6 Convergence dominée

Il s'agit d'une généralisation du Thm. 3.3.2 :

Théorème 4.6.1. (Convergence Dominée) *Soit $J = |a,b| \subset \mathbb{R}$ et soient f_n, $n = 1, 2, \ldots$ et f des fonctions presque partout continues telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ presque partout. Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \textit{presque partout.}$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables et

$$\lim_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| = 0.$$

En particulier

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_J f_n = \int_J f.}$$

Démonstration : Par le lemme 4.3.9 $|f|$, $|f_n|$ et donc aussi f et f_n sont intégrables. Il reste à montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| = 0$.

• Cas d'un intervalle borné : pour tout $M \in \mathbb{R}$ la suite $|f_n - f| \wedge M$ converge vers 0 presque partout et reste uniformément bornée. Le Thm. 3.3.2 (convergence bornée) implique alors que $\lim_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| \wedge M = 0$.

D'autre part, par le théorème de convergence monotone (4.1.6) (appliqué à la suite $g \wedge n$), pour tout $\epsilon > 0$, il y a M telle que $\int_J g \leq \int_J g \wedge M + \epsilon/2$. Donc, utilisant l'estimation $|f_n(x) - f(x)| \leq 2g(x)$, on trouve d'abord :

$$|f_n(x) - f(x)| - |f_n(x) - f(x)| \wedge M \leq 2g - 2g \wedge M$$

et en intégrant :

$$\int_J |f_n - f| \wedge M \leq \int_J |f_n - f| + \epsilon.$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$:

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| \leq \epsilon$$

et par conséquent $\limsup_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} \int_J |f_n - f| = 0$. Ceci complète la démonstration si J est borné.

• Cas d'un intervalle non-borné : on complétera la démonstration dans le cas $J = [a, +\infty[$. Soit $\{b_n\}$ une suite croissante avec limite $+\infty$. On pose

$$h_n = |f - f_n|.$$

On a $h_n \leq 2g(x)$ presque partout, c.à.d. $(h_n - 2g(x))_+$ est presque partout nulle, donc son intégrale est nulle ; on peut donc supposer que $h_n \leq 2g(x)$ est vrai partout. D'après ce qui précède (le cas d'un intervalle borné) , en prenant $J' = [a, b_m]$, il y a un entier $N = N(m)$ telle que $\int_a^{b_m} h_n \leq \epsilon/2$ si $n \geq N$. L'estimation uniforme $\int_{b_m}^b h_n \leq \int_{b_m}^b 2g = C_m$ avec $\lim_{m\to\infty} C_m = 0$ montre que pour chaque $\epsilon > 0$ on peut trouver m telle que $\int_{b_m}^b h_n < \epsilon/2$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$. Avec ce m et $n \geq N$ on trouve :

$$\int_J h_n = \int_a^{b_m} h_n + \int_{b_m}^b h_n < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Comme application on a :

Corollaire 4.6.2. (CONVERGENCE MONOTONE – CAS GÉNÉRAL) *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque et soit $f : J \to \mathbb{R}_+$ presque partout continue et intégrable. On suppose qu'il y a une suite croissante de fonctions intégrables $f_n : J \to \mathbb{R}$, telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

presque partout. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f_n = \int_J f.$$

4.7 Intégrales généralisées

Détaillons le lien avec la notion d'intégrale généralisée.

Remarque. Une fonction $f : J = |a, b| \to \mathbb{R}$ intégrable est partout LOCALEMENT INTÉGRABLE dans le sens que pour tout $c \in J$ on peut trouver un intervalle I_c autour de c sur lequel f est intégrable. Si de plus $\forall c$, $f|I_c$ est bornée, on dit que f est LOCALEMENT BORNÉE INTÉGRABLE. Une fonction intégrable est partout localement intégrable. Une fonction presque partout continue sur f et localement bornée est localement bornée intégrable, mais pas forcément intégrable. Elle est intégrable sur tout sous-intervalle compact.

Définition 4.7.1. Supposons que $f : J = [a, b[\to \mathbb{R}$ presque partout continue et localement bornée. Si $\lim_{\beta\to b} \int_a^\beta f$ existe on dit f est INTÉGRABLE AU SENS GÉNÉRALISÉ et $\lim_{\beta\to b} \int_a^\beta f$ est appelée une INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE.

Si f est intégrable, f est en particulier presque partout continue, donc si f est aussi localement bornée, f est intégrable sur tout sous-intervalle $[a,\beta]$ de J. Par Thm. 4.2.2 (si J est borné) ou Thm. 4.3.8 (dans le cas ou J est non-borné), on a $\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta = \int_J f$ et donc dans ce cas les notions d'intégrale et intégrale généralisée coïncident. Réciproquement on a :

Lemme 4.7.2. *Si f est non-négative, presque partout continue sur $J = [a,b[$ et bornée sur tout intervalle $[a,\beta]$, $\beta < b$, alors si $\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f$ existe, f est intégrable et*

$$\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f = \int_J f$$

Démonstration : Soit $a = b_1 < b_2 < \cdots < b$ une partition dénombrable de $[a,b[$. Alors, puisque f est presque partout continue sur $[b_n, b_{n+1}]$, elle est intégrable sur cet intervalle et on a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}} f = \lim_{k\to\infty}\int_a^{b_k} f.$$

Dans le cas borné on applique Corr. 4.1.7. Dans le cas où $b = +\infty$, on remarque que la série de gauche est (absolument) convergente et donc f est intégrable sur $[a,\infty[$ par définition.

Remarque. la condition $f \geq 0$ est essentielle : il y a des fonctions non-intégrables dont l'intégrale généralisée existe. Voir les Exercices.

Appliquant ce Lemme à $|f|$ on déduit que l'existence de l'intégrale généralisée pour $|f|$ implique que f est est intégrable et donc l'intégrale généralisée pour f existe et calcule $\int_a^b f$. Donc :

Corollaire 4.7.3. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ presque partout continue et localement bornée. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est intégrable ;*
2. $\displaystyle\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta |f|$ *existe.*

De plus, si f est intégrable on a $\int_a^b f = \displaystyle\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f$.

Exemple 4.7.4. 1. La fonction $1/x$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$. Utilisant le Corollaire précédente, il suffit de remarquer que pour $0 < \delta$ on a

$$\int_\delta^1 \frac{1}{x}dx = -\log(\delta)$$

tandis que $\lim_{\delta\downarrow 0}\log\delta = -\infty$. Plus généralement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ existe si et seulement si $\alpha < 1$: on calcule pour $\alpha \neq 1$

$$\int_\delta^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{-\alpha+1}\left(1-\delta^{-\alpha+1}\right), \quad 0 < \delta \leq 1$$

et on note que $\lim_{\delta\downarrow 0} \delta^{-\alpha+1} = 0$ si $\alpha < 1$

2. L'intégrale
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$
existe si et seulement si $\alpha > 1$.

Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ? :

1. Une fonction est intégrable si et seulement si elle est absolument intégrable.
2. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ intégrable. Alors
$$\lim_{\alpha\to a} \lim_{\beta\to b} \int_\alpha^\beta f = \int_a^b f.$$
3. Soient f, g deux fonctions positives telles que $0 \leq f \leq g$. Alors, si g est intégrable, alors f est intégrable. Indication : penser à la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
4. Soient f, g deux fonctions presque partout continues, telle que $f \leq g$. Alors, si g est intégrable, alors f est intégrable. Indication : penser aux fonctions négatives.

Problèmes

1. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ décroissante avec $\lim_{x\to b} f(x) = 0$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ intégrable sur tout sous-intervalle $[a, \xi] \subset [a, b[$. On suppose qu'il y a $M \in \mathbb{R}$ avec $\int_a^\xi g \leq M$.
   – Montrer que pour $a \leq \xi_1 < \xi_2 < b$ on a :
$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(t)g(t)dt \right| \leq 2f(\xi_1)M$$
   – En déduire que $\lim_{\xi\to b} \int_a^\xi f(t)g(t)dt$ existe
   Ce résultat est souvent appelé le CRITÈRE INTÉGRAL D'ABEL.
2. Montrer que $\lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x^2\, dx$ existe. Indication : faire le changement de variable $x^2 = u$ et appliquer le critère intégral d'Abel. Montrer ensuite que $\cos x^2$ n'est pas intégrable sur $[0, \infty[$. Cela donne une première exemple d'une fonction qui n'est pas intégrable mais dont l'intégrale généralisée existe.

3. On introduit
$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \frac{\sin x}{x^\alpha} \\ I(\alpha,\xi) &= \int_1^\xi f_\alpha(x)dx. \end{aligned}$$
   - Montrer que $f_\alpha(x)$ est intégrable sur $[1,\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
   - Montrer que $\lim_{\xi\to\infty} I(\alpha,\xi)$ existe si et seulement si $\alpha > 0$.
4. Soit $T \subset \mathbb{R}^n$ et soit $f : T \times [a,b[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $\xi \in [a,b[$ et $\epsilon > 0$:
   - $x \to f(t,x)$ est intégrable sur $[a,\xi]$;
   - $t \to f(t,x)$ est continue en t pour presque chaque $x \in [a,b[$;
   - Il y a $g_\xi : [a,\xi] \to \mathbb{R}$ intégrable telle que
   $$|f(t,x) \leq g_\xi(x), \quad \forall (t,x) \in T \times [a,\xi].$$
   - Existe A telle que
   $$\left|\int_\xi^\eta f(t,x)dx\right| \leq \epsilon, \quad A < \xi < \eta < b,\ t \in T.$$

   Montrer que $F(t) := \lim_{\xi\to b} \int_a^\xi f(t,x)dx$ existe pour tout $t \in T$ et que $t \to F(t)$ est continue sur T. Appliquer ce résultat pour montrer que la fonction
   $$\alpha \mapsto I(\alpha) = \lim_{\xi\to\infty} \int_1^\xi \frac{\sin x}{x^\alpha}$$
   est continue sur $]0,1]$. Montrer ensuite que $I(\alpha)$ est continue sur $]0,\infty[$.
5. Soit $0 = x_1 < x_2 < \cdots < 1$, une subdivision dénombrable de $I = [0,1)$ et soit $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ telle que $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f = (-1)^n/n$, $n = 1,2,\ldots$ Montrer que $\int_0^1 f$ n'existe pas, mais $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_0^{1-\epsilon} f = \log 2$. Donner une exemple d'une telle fonction où $x_n = 1 - 1/n$.

Chapitre 5

Applications

5.1 Intégrales dépendant d'un paramètre

On se donne un sous-ensemble $T \subset \mathbb{R}^m$, un "espace de paramètres", $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et une fonction $f_t : J \to \mathbb{R}$ intégrable qui dépend du paramètre t, i. e., on a :

$$\begin{aligned} f &: T \times J \to \mathbb{R} \\ f_t &= f(t, -) : J \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La question est de savoir comment

$$F(t) := \int_J f_t(x)dx$$

se comporte par rapport à t. Le cas le plus facile est :

Lemme 5.1.1. *On suppose $J = [a, b]$ et $f : T \times J \to \mathbb{R}$ continue. Alors $F : T \to \mathbb{R}$ est continue.*

Démonstration : Soit $\{t_n\}$ une suite de points de T qui converge vers $t \in T$. Il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(t)$ (critère séquentiel de continuité). Or, l'ensemble $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} t_n \cup t$ et $K \times J$ étant compact, la restriction de f à $K \times J$ est uniformément continue. Alors f_{t_n} converge uniformément vers f_t et le résultat est une conséquence du Thm. 3.1.1.

On peut renforcer cela en utilisant le théorème de la convergence bornée :

Proposition 5.1.2. *Soit $E \subset J = [a, b]$ de mesure 0 et $M \geq 0$ telles que*

1. *la fonction f est continue sur $T \times (J - E)$;*
2. *pour tout $(t, x) \in T \times J$ on a une estimation uniforme :*

$$|f(t, x)| \leq M.$$

Alors F est continue sur T.

Démonstration : On reprend la démonstration précédente utilisant Thm. 3.3.2 au lieu de Thm. 3.1.1.

On obtient une version plus forte en utilisant le Thm. 4.6.1 :

Proposition 5.1.3. *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque, $E \subset J$ un ensemble de mesure 0, et $g : J \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable. Soit $f : T \times J \to \mathbb{R}$ telle que :*

1. *pour tout $x \in J - E$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue ;*
2. *pour tout $t \in T$ la fonction $f_t : x \mapsto f(t,x)$ est presque partout continue sur J ;*
3. *Pour $(t,x) \in T \times J$ on a :*

$$|f(t,x)| \leq g(x).$$

Alors, F est continue sur T.

On peut aussi se demander si $F(t)$ est dérivable :

Proposition 5.1.4. *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque, et $g : J \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable. Soit $f : T \times J \to \mathbb{R}$ telle que :*

1. *pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur J ;*
2. *$\dfrac{\partial f}{\partial t}$ existe pour tout $(t,x) \in T \times J$ et on a :*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x), \quad \forall (t,x) \in T \times J;$$

3. *pour tout $t \in T$ la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est intégrable sur J.*

Alors $F(t)$ est dérivable et

$$F'(t) = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx.$$

Démonstration : On prend une suite $h_n \to 0$ $(n \to \infty)$ et on calcule :

$$\frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = \int_J \frac{f(t+h_n,x) - f(t,x)}{h_n} dx.$$

Par "le théorème des accroissements finis" il existe $\theta \in [0,1]$ telle que :

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t+\theta h_n, x)\right| &= \left|\frac{f(t+h_n,x) - f(t,x)}{h_n}\right| \\ &\leq g(x). \end{aligned}$$

La membre de droite tend vers $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, une fonction intégrable. Une application du Thm. 4.6.1 montre :

$$F'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}.$$

5.2 Convolution et Approximation

Définition 5.2.1. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et presque partout continue. La CONVOLUTION de f et θ est la fonction donnée par :

$$\boxed{f * \theta(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\theta(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

L'intégrale de la définition existe à cause de Prop. 4.4.1, 2.

Exemple 5.2.2. On utilise souvent des FONCTIONS θ_{ab} EN CLOCHE On a besoin de la notion suivante :
RAPPEL : Le support d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'adhérence des points $x \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \neq 0$. Donc f est à support compact si $f(x) = 0$ pour $|x|$ assez grand.

- $\theta_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est de classe C^∞ ;
- $\text{supp}(\theta_{ab})$ est l'intervalle $[a, b]$.
- $\int_{\mathbb{R}} \theta_{ab} = 1$.

On construit un tel exemple en partant de la fonction C^∞ :

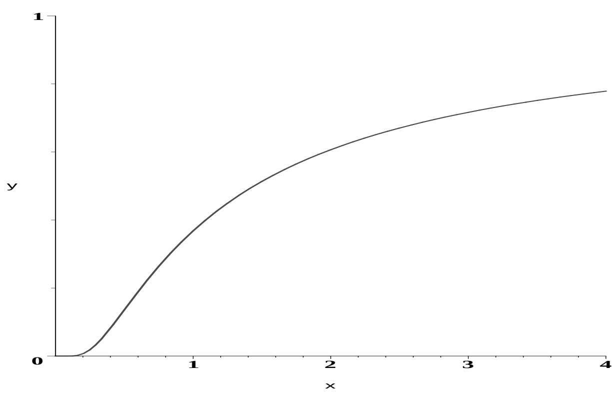

FIG. 5.1 – La fonction f

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{t}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

La fonction C^∞ :

$$g(t) := \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

a la propriété qu'elle est nulle pour $t \leq 0$ et $= 1$ pour $t \geq 1$.

On pose alors

$$\theta_{ab}(t) = \frac{g(t-a)g(b-t)}{\int_{\mathbb{R}} g(t-a)g(b-t)dt}.$$

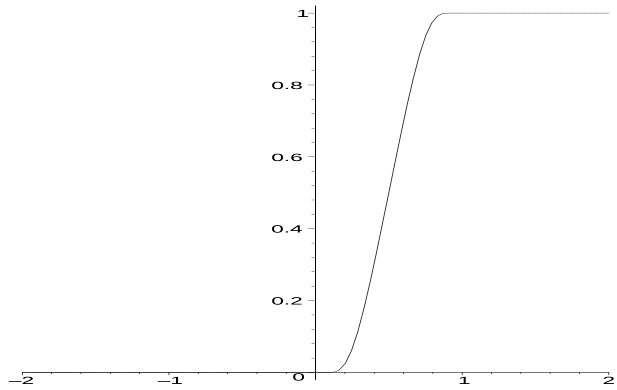

FIG. 5.2 – La fonction g

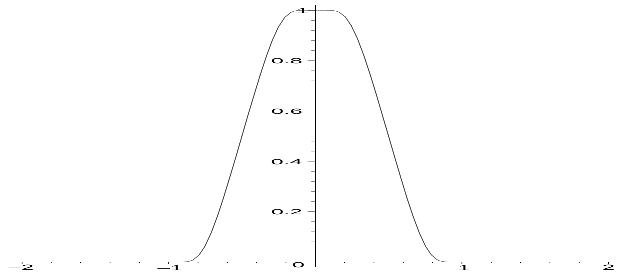

FIG. 5.3 – La fonction θ_{-11}

Une question naturelle se pose : la convolution est-elle commutative. D'abord on remarque que la convolution $h*g$ est aussi définie si par exemple h et g sont presque partout continues, et h est à support compact et bornée. Utilisant cette remarque, on a :

Lemme 5.2.3. *On suppose en plus que* $\mathrm{supp}(\theta)$ *est compact. Alors* $f*\theta = \theta * f$. *De plus, si* θ *est de classe* C^k, $f*\theta$ *est de classe* C^k.

Démonstration : Supposons que le support de θ est contenu dans $[a,b]$. Alors

$$f*\theta(x) = \int_a^b f(x-t)\theta(t)dt.$$

On fait le changement de variable $u = x - t$:

$$f*\theta(x) = \int_{x-b}^{x-a} f(u)\theta(x-u)du = \int_{\mathbb{R}} f(u)\theta(x-u)du = \theta * f(x).$$

On regarde x comme paramètre et u comme variable et on applique la Prop. 5.1.3 on en déduit que la fonction $f*\theta$ est continue si θ est continue.

Ensuite on considère les fonctions

$$F_i(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\partial^{i+1}\theta(x-u)}{\partial^{i+1}x} du, \quad i = 0, \ldots, k-1.$$

Ces fonctions sont continues et même dérivables : regardant x comme paramètre, par une application de la Prop. 5.1.4 on trouve $F_i'(x) = F_{i+1}(x)$. Donc, par récurrence :

$$(f * \theta)^i = F_i$$

est continue.

Convolant f avec des fonctions de classe C^k convenables on peut donc espérer approximer f par des fonctions plus régulières que f. On donnera deux exemples de ce phénomène.

Théorème 5.2.4. (Weierstrass) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ayant support compact $[a, b]$. Il y a une suite de polynômes R_n telles que*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

uniformément sur $[a, b]$.

Démonstration : On peut supposer que $\text{supp}(f) = [0, 1]$, (si $\text{supp}(f) = [a, b]$, on remplace x par $((x - a)/b - a))$. Introduisons pour $n = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= (1 - x^2)^n, \\ q_n &= \textstyle\int_{-1}^{1} Q_n; \\ P_n(x) &= \tfrac{1}{q_n} Q_n. \end{aligned}$$

Évidemment la convolution

$$f * Q_n(x) = Q_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) Q_n(x-t) dt = \int_0^1 f(t) \left(1 - (x-t)^2\right)^n dt$$

est un polynôme de degré $\leq 2n$. On va montrer que le polynôme normalisé

$$R_n(x) = \frac{1}{q_n} \int_{\mathbb{R}} f(t) Q_n(x-t) dt$$

converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f lorsque n tend vers l'infini.

Puisque f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ pour $\epsilon > 0$ on peut choisir $\delta > 0$ telle que

$$|y - x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Puisque f est continue et de support compacte, il y a $M \geq 0$ telle que $|f| \leq M$. On pose

$$g_n(x) := f * P_n(x) - f(x).$$

On a $f * P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)P_n(t)dt$ puisque $x \in [0,1]$ et le support de f est contenu dans $[0,1]$. Puisque $\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = 1$ et en utilisant que $P_n(t) \geq 0$ sur $[-1,1]$, on a pour $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
|g_n(x)| &= \left|\int_{-1}^{1} [f(x-t) - f(x)]P_n(t)dt\right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |f(x-t) - f(x)|P_n(t)dt \\
&\leq 2M\int_{-1}^{-\delta} P_n(t)dt + \frac{\epsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} P_n(t)dt + 2M\int_{\delta}^{1} P_n(t)dt \\
&\leq 4M\frac{1}{q_n}(1-\delta)(1-\delta^2)^n + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Ensuite, il faut estimer q_n en utilisant l'estimation élémentaire

$$(1-x^2)^n \geq 1 - nx^2.$$

En fait :

$$\begin{aligned}
q_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = & \\
= 2\int_{0}^{1} (1-x^2)^n dx \quad &\geq \quad 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n dx \\
&\geq \quad 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nx^2)dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

On a donc $\frac{1}{q_n}(1-\delta)(1-\delta^2)^n < \sqrt{n}(1-\delta)(1-\delta^2)^n = \sqrt{n}(1-\delta)(1-\delta^2)^n := b_n$. Puisque

$$b_{n+1}/b_n = \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)(1-\delta^2) < 1, \quad \text{si } n \gg N = N(\delta)$$

la suite $\{b_n\}$ converge vers zéro et $|b_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$ et par conséquent $|g_n(x))| \leq \epsilon$ si n est suffisamment grand.

Voici une autre exemple de “régularisation” utilisant les fonction de cloche θ_{ab} :

Théorème 5.2.5. *Soit f intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose*

$$\begin{aligned}
\theta_n(x) &= n\theta_{-1,1}(nx) \\
f_n(x) &= f * \theta_n.
\end{aligned}$$

Alors

1. *f_n est de classe C^∞ ;*
2. *si f est continue, alors lorsque n tend vers l'infini, la suite $\{f_n\}$ tend uniformément vers f sur chaque intervalle borné J.*

Démonstration :
1) : Clair.
2) Le support de θ_n est inclus dans $[-1/n, 1/n]$ et donc

$$f * \theta_n - f = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} [f(x-t) - f(x)]\theta_n(t)dt.$$

Sur J la fonction f est uniformément continue et donc pour pout $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ telle que

$$|t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x-t) - f(x)| < \epsilon.$$

Cela s'applique pour $t \in [-1/n, 1/n]$, $n \gg 0$ et donc

$$n \geq N = N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f * \theta_n - f| \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} \theta_n(t)dt = \epsilon.$$

Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ou faut-il modifier les hypothèse ? :

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables x et y et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Si la fonction f est continue en x et en y et si de plus $|f(x,y)| \leq g(y)$, alors $\int f(x,y)dy$ est continue en x.
2. Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables x et y. On suppose que f est dérivable par rapport à x et que $y \mapsto f(x,y)$ ainsi que $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ sont bornées et presque partout continues. On a
$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x} dy.$$
3. Soient f et g deux fonctions intégrables. Alors leur convolution existe.
4. Dans le théorème de Weierstrass, la fonction f est limite uniforme des polynômes P_n sur tout $\mathbb{R}$.
5. Une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de fonctions C^∞.

Problèmes

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que
$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0, \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$
Montrer que $f = 0$. Indication : utiliser le théorème de Weierstrass pour montrer que $\int_0^1 f^2 = 0$.

2. Soit
$$f(x) = \int_1^x \frac{\log t}{t^2+1}dt, \quad x > 0.$$
Étudier les variations de f. Comparer $f(x)$ et $f(1/x)$. Montrer que $f(x) < 1$ et donner l'allure du graphe de f.

3. Soit
$$j(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}dt \quad x \neq 0.$$
Montrer que $j(x)$ est paire. Obtenir $\lim_{x\to\infty} j(x)$. Représenter le graphe local de j au voisinage de $x = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, monter que j s'annulle une fois et une seule fois dans l'intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$.

4. Soit $a > 0$. Montrer que $a\displaystyle\int_a^\infty \frac{\cos(u)}{u^2}du$ tend vers 0 lorsque a tend vers l'infini. En déduire la valeur de
$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \left(\lim_{y\to\infty} \int_x^y \frac{\sin u}{u}du \right) dx.$$

5. Justifier l'existence de
$$j = \int_0^\infty \frac{\sin t}{e^t+1}dt.$$
Évaluer la somme $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-(n+1)t} \sin t$ pour $t \geq 0$. Prouver :
$$j = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}.$$

6. Soit $\sum_{n\geq o} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit r telle que $0 < r < R$. Prouver : il existe un réel $B(r)$ tel que : pour tout $n \geq 0$, $|a_n r^n| \leq B(r)$. Montrer qu'on définit une fonction s sur $\mathbb{R}$ par :
$$s_n(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}x^n.$$
Soit α un réel qui vérifie $\alpha > 1/R$. Justifier l'existence de
$$f(\alpha) = \int_0^\infty s(x)e^{-\alpha x}dx.$$
Montrer : $f(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{\alpha^{n+1}}$.

7. On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \exp(-t^2)dt \\ g(x) &= \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2 u}\right) du. \end{aligned}$$

   Montrer : f et g sont de classe C^1 ; $f^2 + g$ est une fonction constante. En déduire la limite de f en ∞.

8. On définit la fonction h sur $]-1, \infty[$ par :

$$h(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt.$$

   Calculer $h'(x)$. Prouver :

$$h(x) = (\pi/8)\ln(1+x^2) + (1/2)\ln 2 \mathrm{Arctan} x - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt.$$

   Calculer $h(1)$. Donner l'allure du graphe de h.

9. Soit

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t} \exp(-xt)dt, \quad x > 0.$$

   Montrer : f est continue de classe C^1. Calculer : $f'(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $f(x)$.

10. Justifier l'existence de $k = \int_0^\infty \exp(-t^2)dt$. Montrer qu'on définit une fonction continue sur $[0, \infty[$ par :

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} \exp(-xt^2)dx.$$

   prouver : pour tout $x > 0$, $g(x) \leq k/\sqrt{x}$. Montrer : g est dérivable sur $]0, \infty[$; pour tout $x > 0$, $g'(x) - g(x) = k/\sqrt{x}$. La fonction g est-elle dérivable à droite en 0 ?

11. Déterminer pour quelles valeurs de x la fonction $t \mapsto 1/(1+t^x)$ est Riemann-intégrable sur $]0, \infty[$. On note alors

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^x}$$

   et D le domaine de définition de F.

   (a) Démontrer que F est de classe C^1 sur D.

   (b) Démontrer que F est décroissante (on pourra couper l'intégrale donnant $F'(x)$ en deux et faire un changement de variables de façon d'obtenir $F'(x) = \int_1^\infty (???)dt$.)

(c) Étudier $\lim_{n\to\infty} F(n)$; en déduire : F a une limite quand x tend vers ∞.

(d) Démontrer
$$\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^x} \geq \frac{1}{2(x-1)}, \quad \forall x > 1.$$
En déduire $\lim_{x\to 1} F(x) = \infty$.

(e) Donner l'allure du graphe de F.

12. Soit
$$g(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}, \quad (x \geq 0, t \geq 0).$$

(a) Montrer que la fonction $\cancel{t\mapsto}\ g(x,t)$ est intégrable (sur la demi-droite $t \geq 0$).
Soit
$$f(x) = \int_0^\infty g(x,t)dt$$
son intégrale.

(b) Montrer que f est continue en chaque point $x \geq 0$ et dérivable en chaque point $x > 0$.

(c) Montrer que $f(x) \leq 1/x$ si $x > 0$.

(d) Montrer que f est une solution sur $]0,\infty[$ de l'équation différentielle
$$(E) \qquad y'' + y = \frac{1}{x}.$$
Montrer en plus que f est l'unique solution de (E) ayant une limite 0 lorsque x tend vers l'infini.

(e) Soit $0 < x < y$. Montrer que les limite suivantes existent et qu'elles sont finies :
$$\begin{aligned} s(x) &= \lim_{y\to\infty} \int_x^y \frac{\sin t}{t} dt \\ c(x) &= \lim_{y\to\infty} \int_x^y \frac{\cos t}{t} dt \end{aligned}$$

(f) Montrer que la fonction $s(x)$ est dérivable pour $x > 0$ et que $s'(x) = -\sin(x)/x$. De même $c'(x) = -\cos(x)/x$.

(g) Prouver :
$$f(x) = s(x) \cdot \cos(x) - c(x) \cdot \sin(x).$$

(h) Montrer :
$$\lim_{x\downarrow 0} \left[(\sin x) \cdot \left(\int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt \right) \right] = 0.$$
En déduire la valeur de $\lim_{x\downarrow 0} s(x)$.

13. Soit
$$g(x,t)=\frac{2te^{-xt^2}}{t^2+1}, \quad (x\geq 1, t\geq 0).$$

(a) Montrer que la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable (sur la demi-droite $t\geq 0$).
Soit
$$f(x)=\int_0^\infty g(x,t)dt$$
son intégrale.

(b) Montrer que f est continue et dérivable en chaque point $x\geq 1$.

(c) Montrer que $f(x)\leq 1/x$.

(d) Montrer que f est une solution sur $[1,\infty[$ de l'équation différentielle
$$(E) \qquad\qquad y'-y=\frac{1}{x}.$$
Montrer en plus que f est l'unique solution de (E) ayant une limite 0 lorsque x tend vers l'infini.

Chapitre 6

Le cas de plusieurs variables

6.1 Le cas des fonctions bornées sur des ensembles bornés

Un PAVÉ de $\mathbb{R}^n$ est un produit

$$Q = J^1 \times \cdots \times J^n, \quad J^k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}.$$

Pour $n = 2$ on a un rectangle. Le VOLUME est le produit des longueurs des intervalles J^j, $j = 1, \ldots, n$:

$$\mathrm{Vol}(Q) = \prod_{i=1}^{n} |J^i| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Une subdivision $P = P^1 \times \cdots \times P^n$ de Q est la donnée des n subdivisions P^k de J^k, $k = 1, \ldots, n$. Cela donne une subdivision de Q en sous-pavés $Q_\alpha = J^1_{i_1} \times \cdots \times J^n_{i_n}$, $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$.

On considère les *fonctions bornées*

$$f : Q \to \mathbb{R}, \quad Q = J^1 \times \cdots J^n, \quad |f| \leq M.$$

On utilise les sous-pavés pour définir les sommes $S(P, f)$ et $s(P, f)$ comme dans le cas d'une variable :

$$\begin{aligned} S(P, f) &= \sum_\alpha \sup_{Q_\alpha} f \cdot \mathrm{Vol}(Q_\alpha) \\ s(P, f) &= \sum_\alpha \inf_{Q_\alpha} f \cdot \mathrm{Vol}(Q_\alpha). \end{aligned}$$

Avec cette convention, la définition d'intégrabilité reste la même :

Définition 6.1.1. On dit que f est INTÉGRABLE si $\sup_P s(P,f) = \inf_P S(P,f)$ et dans ce cas on pose :

$$\begin{aligned}\int_Q f &= \underline{\int} f := \sup_P s(P,f)\\ &= \overline{\int} f := \inf_P S(P,f).\end{aligned}$$

Toutes les propriétés dérivées en Chap. 1, proprement interprétées restent valables dans ce cas :

Propriétés 6.1.2. — Soit $Q \subset \mathbb{R}^n$ un pavé et soit $\mathcal{I}(Q)$ l'ensemble des fonctions $f : Q \to \mathbb{R}$ bornées et intégrables. Alors :

1. L'intégration
$$\begin{cases} \int & : \ \mathcal{I}(Q) \to \mathbb{R} \\ & \quad f \mapsto \int_J f. \end{cases}$$
est une application linéaire qui respecte l'ordre : si $f \leq g$, alors $\int_Q f \leq \int_Q g$;
2. Le produit des fonctions bornées et intégrables est intégrable ;
3. Si f est bornée et intégrable, alors $|f|$ l'est et l'on a
$$\boxed{\left|\int_Q f\right| \leq \int_Q |f|;}$$
4. Si f et g sont bornées et intégrables, alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ le sont. En particulier f_- et f_+ sont intégrables.
5. L'intégration est additive : si $Q = Q_1 \cup Q_2$, une subdivision en 2 sous-pavés, alors
$$\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f.$$

On peut étendre cette définition au cas d'un ensemble borné quelconque :

Définition 6.1.3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ bornée. Soit $Q \supset A$ un pavé. On étend f à $\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ et posant $\tilde{f}(x) = 0$ si $x \in Q - A$. On dit que f est INTÉGRABLE SUR A si $\tilde{f}$ l'est (sur Q) et on pose

$$\int_A f := \int_Q \tilde{f}.$$

Cette définition ne dépend pas du choix de Q (pourquoi ?).

6.2 Ensembles négligeables

On a besoin de la notion de mesure nulle dans le cas d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. D'abord quelques remarques. L'HYPERCUBE STANDARD $I^n(0,r)$ de demi-longueur r et de centre 0 est l'ensemble $[-r,r]^n \subset \mathbb{R}^n$. Son volume est $(2r)^n$. Une translation par $\vec{p}$ transforme cet hypercube dans un hypercube standard $I^n(p,r)$ de centre p de même volume. Ensuite, une rotation transforme cet hypercube dans un hypercube en biais de même volume. La boule euclidienne de centre p et de rayon r est notée $B^n(p,r)$.

Soit T une rotation de centre $p \in \mathbb{R}^n$, alors du fait qu'on a des inclusions $T(I^n(p,r)) \subset B^n(p,\sqrt{n}r) \subset I^n(p,\sqrt{n}r)$ on déduit qu'un hypercube de volume V en biais est contenue dans un hypercube standard de volume $n^{\frac{1}{2}n}V$ et dans une boule de volume $< n^{\frac{1}{2}n}V$. Un pavé de $\mathbb{R}^n$ de volume V peut être recouvert par un nombre fini d'hypercubes standard dont la somme des volumes est ainsi proche de V que l'on veut (pourquoi ?). De même, un pavé en biais de volume V peut être recouvert par un nombre fini d'hypercubes en biais dont la somme des volumes est ainsi proche de V que l'on veut, disons de volume total $< 2V$, et donc, par les remarques précédentes par un nombre fini d'hypercubes standard ou des boules dont le volume total est $< 2n^{\frac{1}{2}n}V$.

Définition 6.2.1. On dit que A est DE MESURE 0 OU NÉGLIGEABLE, si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un nombre dénombrable de pavés ouverts recouvrant A et dont la somme des volumes est $\leq \epsilon$.

Par les remarques précédentes, on pourra utiliser des hypercubes standard ou en biais, des pavés standard ou en biais, ou des boules.

Lemme 6.2.2. *Soit $n > 1$ et soit $\vec{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ une courbe C^1. L'image de $\vec{x}$ est un ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. L'application $\vec{x}'$ est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$, telle que si $|t-t_0| < \eta$, $\|\vec{x}'(t) - \vec{x}'(t_0)\| < \epsilon$. On choisit N telle que $1/N < \eta$ et on divise $[0,1]$ en N intervalles $J_k = [k/N, (k+1)/N]$. On pose $t_0 = k/N$. Par la formule des accroissements finis, pour tout $t \in J_k$ il existe $\xi \in]t_0, t[$ telle que $\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) = (t-t_0)\vec{x}'(\xi)$ et donc, puisque $\vec{x}(t) - [\vec{x}(t_0) + \vec{x}'(t_0)(t-t_0)] = (t-t_0)\left(\vec{x}'(\xi) - \vec{x}'(t_0)\right)$

$$\left\|\vec{x}(t) - \left[\vec{x}(t_0) + \vec{x}'(t_0)(t-t_0)\right]\right\| \leq \epsilon|t-t_0|.$$

Cela veut dire que pour $\lambda \in [0, 1/N]$ l'image $\vec{x}(t_0 + \lambda)$ se trouve dans une boule de centre $\vec{x}(t_0) + \lambda\vec{x}'(t_0)$ et de rayon $\lambda\epsilon$. Donc l'image du segment $[k/N, (k+1)/N]$ est contenu dans un cylindre de longueur $\epsilon/N + \|\vec{x}'(t_0)\|$ et de base une boule de $\mathbb{R}^{n-1}$ de rayon ϵ/N. Un tel cylindre est contenu dans un pavé (en biais) de volume $(2\epsilon/N)^{n-1}\left(\epsilon/N + \|\vec{x}'(t_0)\|\right)$ et donc l'image de la courbe entière est contenue dans une réunion de pavés (en biais) de volume total

$$\left(\|\vec{x}'\|_\infty + \frac{\epsilon}{N}\right) \frac{(2\epsilon)^{n-1}}{N^{n-2}} \leq \left(\|\vec{x}'\|_\infty + 1\right) 2^{n-1}\epsilon,$$

au moins si $\epsilon < 1$.

On peut remplacer $[0,1]$ par n'importe quel intervalle et même par un hypercube standard. Alors, soit $\vec{F} : I^m(0,r) \to \mathbb{R}^n$ une application dérivable. On souhaite appliquer le lemme précédent aux intervalles passant par l'origine et contenus dans l'hypercube. Pour expliquer les changements dans l'estimation ci-dessus, il faut se rappeler que la dérivée de $\vec{F}$ au point ξ est d'une application linéaire

$$\vec{F}'(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

et que pour les applications linéaires $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la norme $\|A\|$ est défini par

$$\|A\| = \sup\{\|A(\xi)\| \mid \xi \in S^m\}$$

et dans notre situation on utilise cette norme pour définir :

$$\|\vec{F}'\|_\infty = \sup_\xi \|\vec{F}'(\xi)\|.$$

En poursuivant cette méthode, on peut facilement voir que pour $\epsilon > 0$, l'image de $\vec{F}$ est contenu dans une réunion de N^m cylindres de la forme $P \times B$, où P est un parellepipède dans $\mathbb{R}^m$ volume $\|\vec{F}'(x_0)\|$, B est une boule de $\mathbb{R}^{n-m}$ de rayon ϵ et $x_0 \in I^m(0,r)$. Cette réunion est donc recouvert par des pavés (en biais) de volume total

$$\left(\|\vec{F}'\|_\infty + \frac{\epsilon}{N^m}\right) \frac{(2\epsilon)^{n-m}}{N^{n-2m}} \leq \left(\|\vec{F}'\|_\infty + 1\right) 2^{n-m}\epsilon^{n-m}.$$

On en déduit :

Corollaire 6.2.3. *Soit $n > m$ et soit $\vec{F} : I^m(0,r) \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. L'image de $\vec{F}$ est un ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$.*

Avant de donner des exemples il faut rappeler quelques notions.
RAPPEL : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$ est un POINT INTÉRIEUR si A contient une boule ouvert de centre x. L'ensemble de ces points est $\overset{\circ}{A}$, l'intérieur. Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est POINT ADHÉRENT à A si tout boule ouvert de centre x contient un point de A. Les points intérieurs de A sont adhérents. Les autres points adhérents forment ∂A, le BORD de A et $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ est L'ADHÉRENCE de A, le plus petit fermée contenant A.

Exemple 6.2.4. – Le bord d'un pavé est négligeable ;

- un sphère est négligeable ;
- la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable ;
- la réunion d'un nombre fini de courbes C^1 dans $\mathbb{R}^2$, est négligeable.

Théorème 6.2.5. *Soit $Q \subset \mathbb{R}^n$ un pavé et $f : Q \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et presque partout continue. Alors f est intégrable.*

La preuve est analogue à celle du Thm. 2.1.4.

Corollaire 6.2.6. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ borné et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction presque partout continue et si de plus le bord de A est négligeable, f est intégrable.*

Démonstration : Soit E l'ensemble des discontinuités de f et soit $Q \supset A$ un pavé, $\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ l'extension par 0 de f. La fonction $f|A - E$ est continue, ainsi que la fonction $\tilde{f}|Q - \bar{A}$ (qui est la fonction nulle). Donc $\tilde{f}$ est continue dans $Q - F$ et puisque l'ensemble $F = \partial A \cup E$ est négligeable la fonction $\tilde{f}$ est donc intégrable sur Q. Par définition f est intégrable sur A.

6.3 Théorème de Fubini

Pour simplicité on ne regarde que le cas $n = 2$ et on suppose que f est une fonction bornée intégrable sur un rectangle $Q = Q_1 \times Q_2$. On essaye de ramener le calcul d'une intégrale $\int_Q f$ à une intégrale d'une variable. On considère les fonctions :

$$\boxed{\forall y \in Q_2 \ : f_y : Q_1 \to \mathbb{R}, \quad f_y(x) = f(x,y).}$$

On sait que f est presque partout continue, mais puisque $Q_1 \times \{y\}$ est négligeable, il se peut que f_y soit discontinue partout et donc peut ne pas être intégrable. Par contre les nombres $\underline{\int} f_y$ et $\overline{\int} f_y$ existent toujours. On utilise cela :

Théorème 6.3.1. (Fubini) *Soit $f : Q = Q_1 \times Q_2 \to \mathbb{R}$ bornée et intégrable. Alors les fonctions $\underline{\int} f_y$ et $\overline{\int} f_y$ sont intégrables sur Q_2 et :*

$$\boxed{\int_Q f = \int_{Q_2} \left(\underline{\int} f_y \right) = \int_{Q_2} \left(\overline{\int} f_y \right).}$$

Démonstration : On prend une subdivision $P = P_1 \times P_2$ de $Q_1 \times Q_2$ en rectangles $R_{ij} = R_i \times R_j$. Alors

$$\begin{aligned} s(P,f) &= \sum_j \inf_{R_{ij}}(f)\mathrm{vol}(R_i)\mathrm{vol}(R_j) \\ &= \sum_j \left(\sum_i \inf_{R_{ij}}(f)\mathrm{vol}(R_i) \right) \mathrm{vol}(R_j). \end{aligned}$$

Puisque pour $\eta \in R_j$ on a $\inf_{R_{ij}} f \leq \inf_{Q_i} f_\eta$ on en déduit :

$$\forall \eta \in R_j \implies \sum_i \inf_{R_{ij}}(f)\mathrm{vol}R_i \leq \sum_i \inf_{R_i}(f_\eta)\mathrm{vol}(R_i) \leq \underline{\int} f_\eta.$$

En prenant le inf sur le pavé R_j on a donc :

$$s(P,f) \leq \sum_j \left(\inf_{R_j} \underline{\int} f_y \right) |R_j| = s(P_2, \underline{\int} f_y).$$

On trouve de même

$$S(P_2, \overline{\int} f_y) \leq S(P,f)$$

donc

$$\begin{aligned} s(P,f) &\leq s(P_2, \underline{\int} f_y) &\leq& \; S(P_2, \underline{\int} f_y) \\ &\leq S(P_2, \overline{\int} f_y) &\leq& \; S(P,f). \end{aligned}$$

Il en suit que

$$\begin{aligned} \underline{\int} f &\leq \sup_{P_2} s(P_2, \underline{\int} f_y) \leq \inf_{P_2} S(P_2, \underline{\int} f_y) \\ &\leq \inf_{P_2} s(P_2, \overline{\int} f_y) \leq \overline{\int} f. \end{aligned}$$

Puisque f est intégrable, on a égalité partout et $\underline{\int} f_\eta$ est intégrable. L'argument pour $\overline{\int} f_\eta$ est pareil en utilisant

$$\begin{aligned} s(P,f) &\leq s(P_2, \underline{\int} f_\eta) &\leq& \; s(P_2, \overline{\int} f_\eta) \\ &\leq S(P_2, \overline{\int} f_\eta) &\leq& \; S(P,f). \end{aligned}$$

Remarque. On peut échanger l'ordre d'intégration en considérant les fonctions $f_x : Q_2 \to \mathbb{R}$, donnée par $f_x(y) = f(x, y)$ et leurs sommes $\underline{\int} f_x$, $\overline{\int} f_x$. Elles sont intégrables sur Q_1 et leurs intégrales valent aussi $\int_Q f$.

Exemple 6.3.2. Si pour tout sauf un nombre fini de points $y \in Q_2$ l'intégrale $\Phi(y) = \int f(x, y)dx$ existe, alors on peut toujours intégrer $\Phi(y)$ et on trouve

$$\int_Q f = \int_{Q_2} \left(\int_{Q_1} f(x, y)dx \right) dy.$$

Si $Q_1 = [a, b]$ et $Q_2 = [c, d]$, en utilisant la remarque précédente :

$$\int_Q f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

6.4 Le cas des fonctions non-bornées sur des ensembles bornés

On reprend la même construction qu'on a donné dans le Chap. 4.1 pour des intervalles bornés :

Définition 6.4.1. Soit Q un pavé. Soit $f : Q \to \mathbb{R}$ presque partout continue. Si f est positive, on dit que f est INTÉGRABLE si

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q f \wedge n$$

existe. Si f est de signe quelconque, f est intégrable si $|f|$ est intégrable. Dans ce cas f_+ et f_- sont aussi intégrables et on pose :

$$\int_Q f = \int_Q f_+ - \int_Q f_-.$$

Les propriétés de base restent valables dans ce cas avec la même démonstration :

Propriétés 6.4.2. Soit Q un pavé et $\mathcal{I}(Q)$ la classe des fonctions presque partout continues et intégrables sur Q. Alors :

1. L'intégration
$$\begin{cases} \int & : \ \mathcal{I}(Q) \to \mathbb{R} \\ & \quad f \mapsto \int_Q f. \end{cases}$$
est une application linéaire qui respecte l'ordre : si $f \leq g$, alors $\int_Q f \leq \int_Q g$;
2. Le produit des fonctions intégrables est intégrable si au moins une parmi elles est bornée ;

3. Si f et g sont intégrables, alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ le sont.
4. L'intégration est additive : pour $Q = Q_1 \cup Q_2$, subdivision en 2 pavés, les intégrales $\int_{Q_1} f$ et $\int_{Q_2} f$ existent et on a
$$\boxed{\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f.}$$
5. Soit $f \in \mathcal{I}(Q)$, alors
$$\left|\int_Q f\right| \leq \int_Q |f|.$$

On peut étendre cette définition au cas d'un ensemble borné à bord négligeable :

Définition 6.4.3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ borné avec un bord négligeable. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ presque partout continue et $Q \supset A$ un pavé. On étend f à $\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ et posant $\tilde{f}(x) = 0$ si $x \in Q - A$. On dit que f est INTÉGRABLE SUR A si $\tilde{f}$ l'est (sur Q) et on pose
$$\int_A f := \int_Q \tilde{f}.$$

6.5 *Partition de l'unité

Définition 6.5.1. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un recouvrement ouvert de A. Une PARTITION DE L'UNITÉ subordonnée à $\mathfrak{U}$ est une collection de fonctions $\phi_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ définies sur un ouvert qui contient A et une fonction $\alpha : \mathbb{Z}_{>0} \to J$ telles que
- $\operatorname{supp}(\phi_k) \subset U_{\alpha(k)}$ est compacte ;
- $\{\operatorname{supp}(\phi_k)\}_{k=1,2,\ldots}$ est une collection localement finie, c.à.d. tout $x \in A$, il y a un voisinage de x qui ne rencontre qu'un nombre fini des supports de ϕ_k ;
- $$\forall x \in A \ : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) = 1.$$
- ϕ_k est presque partout continue.

Exemple 6.5.2. Soit $J =]a, b]$ et $A_k =]a + (b - a)/(k + 1), a + (b - a)/k]$, $k = 1, \ldots$. Alors si on pose $U_1 = A_1$, $U_k = A_k \cup \overset{\circ}{A}_{k+1}$, $k \geq 2$, on obtient un recouvrement ouvert de J et $\mathbb{1}_{A_k}$ est presque partout continue et donne une partition de l'unité.

Proposition 6.5.3. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un recouvrement ouvert. Alors il existe une partition de l'unité subordonnée à $\mathfrak{U}$.*

Avant de montrer cette proposition, nous avons besoin de quelques préparations :

Lemme 6.5.4. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $K \subset U$ compacte. Alors, il y a un compacte L tel que :*

- $K \subset \overset{\circ}{L}$;
- $L \subset U$;
- ∂L *est de mesure* 0.

Démonstration : Puisque U est ouvert, pour chaque x il y a une boule ouverte $B(x,r) \subset U$. L'ensemble des boules $B(x, \frac{1}{2}r)$, $x \in K$ recouvrent K. Un nombre fini parmi celles là recouvre déjà K. On prend pour L la réunion des boules fermées correspondantes.

Corollaire 6.5.5. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact et $\mathfrak{U} = \{U_1, \dots, U_N\}$ un recouvrement ouvert de K. Alors il existe $L_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, N$ compacte, ∂L_i de mesure 0 telle que $\{\overset{\circ}{L}_1, \dots, \overset{\circ}{L}_N\}$ recouvre K.*

Démonstration : On montre par récurrence sur s :

$$\begin{cases} \exists L_1, \dots, L_s \quad \text{telles que :} \\ L_i \subset U_i, \\ \partial L_i \quad \text{a mesure } 0 \\ \{\overset{\circ}{L}_1, \dots, \overset{\circ}{L}_s, U_{s+2}, \dots, U_N\} \quad \text{recouvrent } K. \end{cases}$$

Le cas $s = 1$: On applique le lemme à $K_1 = K - (U_2 \cup \cdots \cup U_N) \subset U_1$. Cela donne un compacte $L_1 \subset U_1$ dont le bord est négligeable et $K_1 \subset \overset{\circ}{L}_1$. Donc $\{\overset{\circ}{L}_1, U_2, \dots, U_N\}$ est un recouvrement ouvert de K.
$(s) \implies (s+1)$: On applique le lemme à

$$K_{s+1} = K - (\overset{\circ}{L}_1 \cup \cdots \cup \overset{\circ}{L}_s \cup U_{s+2} \cup \cdots \cup U_N) \subset U_{s+1}.$$

On trouve $L_{s+1} \subset U_{s+1}$ ayant un bord de mesure 0 et telle que $K_{s+1} \subset \overset{\circ}{L}_{s+1}$. Par hypothèse de récurrence, $\{\overset{\circ}{L}_1, \dots, \overset{\circ}{L}_s, U_{s+2}, \dots, U_N\}$ est un recouvrement de K. Remplaçant U_{s+2} par K_{s+1}, cela reste vrai par construction de K_{s+1}. Puisque $K_{s+1} \subset \overset{\circ}{L}_{s+1}$ on peut ensuite remplacer K_{s+1} par $\overset{\circ}{L}_{s+1}$.

Maintenant on peut donner la
Démonstration de Prop. 6.5.3 :
Première Étape : le cas A compacte. On peut supposer que $J = \{1, \dots, N\}$, un ensemble fini et on applique la Corollaire précédente. La fonction $\mathbb{1}_{\overset{\circ}{L}_i}$ est continue hors de ∂L_i, un ensemble de mesure 0 et son support, L_i est compacte. On définit :

$$\varphi_k = \frac{\mathbb{1}_{\overset{\circ}{L}_i}}{\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\overset{\circ}{L}_i}}.$$

Deuxième Étape : le cas général.

En remplaçant A par la réunion des ouverts U_α on peut supposer que A est *ouvert.* Pour $k = 1, 2, \ldots$ on introduit des compactes :

$$L_k = \left\{ x \in A \mid \|x\| \leq k, \quad d(x, \partial A) \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Alors :

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k, \quad \overset{\circ}{L}_k \subset L_{k+1} \quad \text{et } \partial L_k \text{ négligeable.}$$

Donc A est réunion des compactes $L_k - \overset{\circ}{L}_{k-1}$. Le recouvrement $\mathfrak{U}$ induit un recouvrement $\mathfrak{U}_k$ de l'ensemble ouvert $\overset{\circ}{L}_{k+1} - L_{k-2} \supset L_k - \overset{\circ}{L}_{k-1}$ et on peut appliquer la première étape à ce recouvrement. Cela donne une partition de l'unité

$$\{f_1^{(k)}, \ldots, f_{n_k}^{(k)}\}.$$

Puisque $\operatorname{supp}(f_i^k) \subset L_{k+1} - \overset{\circ}{L}_{k-2}$, dans la double somme

$$f(x) = \sum_{\ell, j} f_j^{(\ell)}(x), \quad x \in L_k$$

seul les fonctions $f_j^{(\ell)}$ avec $\ell \leq k + 2$ peuvent figurer et donc cette somme est toujours une somme finie. Aussi, f est continue hors d'un ensemble de mesure 0. On prend :

$$\varphi_{\ell, j}(x) = \frac{f_j^{(\ell)}(x)}{f(x)},$$

un ensemble dénombrable de fonctions.

6.6 *Fonctions sur des domaines quelconques

Définition 6.6.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un *ouvert.* On suppose que $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction partout localement intégrable, i.e. pour tout $x \in U$, il y a un sous-ensemble $U_x \ni x$ borné, contenu dans U, ayant un bord négligeable et telle que $f|U_x$ soit intégrable. Soit $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ une partition de l'unité par rapport à $\{\overset{\circ}{U}_x\}_{x \in U}$. Si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_U \varphi_k \cdot |f| < \infty$$

on dit que f est INTÉGRABLE et on pose

$$\boxed{\int_U f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \varphi_k \cdot f.}$$

Cette définition ne dépend ni de la partition de l'unité ni du recouvrement par rapport auquel on fait la partition. En fait, soit $\{\psi_j\}$, $j = 1, \ldots$ une partition de l'unité subordonnée à $\{V_x\}_{x \in U}$ un recouvrement de U, ayant les mêmes propriétés que dans la définition précédente. On considère d'abord la fonction $f_k = \varphi_k \cdot f$, une fonction avec support compacte K. Donc $K \supset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$. Puisque les supports $\mathrm{supp}(\psi_j)$ forment une famille localement finie, chaque U_{x_k} ne rencontre qu'un nombre fini parmi ces supports. Donc la somme

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)\,(\varphi_k(x) f(x))$$

est finie. D'autre part $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) f(x) = f(x)$ et donc

$$\int_U \varphi_k \cdot f = \int_U \varphi_k \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \cdot f = \sum_j \int_U (\psi_j \cdot \varphi_k) \cdot f.$$

Puis, on prend la somme sur k de l'expression de droite. On sait que cette série est absolument convergente (par définition) et donc aussi la somme

$$\sum_k \sum_j \int_U (\psi_j \cdot \varphi_k) \cdot f$$

est absolument convergente. Utilisant le Corollaire 4.3.5 on voit qu'on peut échanger l'ordre de la sommation, ce qui donne :

$$\sum_k \sum_j \int_U (\psi_j \cdot \varphi_k) \cdot f = \sum_j \int_U \psi_j \cdot \left(\sum_k \varphi_k \cdot f \right) = \sum_j \int_U \psi_j \cdot f.$$

Remarque. —

- Cette définition est comparable à la définition donnée en Chap. IV.3 pour $U = J$ un intervalle quelconque. En fait, on utilise la partition de 1 donnée en exemple 6.5.2 ou une variante.

Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont ils vrais ou faut-il rajouter des hypothèses ? :

1. Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une boule, alors ∂B est de mesure 0.
2. Soit $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ rectangle et $f : R \to \mathbb{R}$ bornée et presque partout continue. Alors pour presque tout $x \in [a, b]$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable et son intégrale $I(x)$ est intégrable sur $[a, b]$.
   Indication : regarder l'exercice 1.

3. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ borné et $f : U \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Alors f est intégrable.
4. La fonction caractéristique d'un ouvert borné $U \subset \mathbb{R}^n$ avec bord de mesure zéro est intégrable.
5. Soit $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ un rectangle et $f : R \to \mathbb{R}$ presque partout continue. On suppose que les fonctions $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ sont intégrables, ainsi que leurs intégrales $y \mapsto \int_0^1 f(x, y)dx$ et $x \mapsto \int_0^1 f(x, y)dy$. Alors f est intégrable. Indication : regarder l'exercice 7.

Problèmes

1. Soit $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1 - 1/q & \text{si } x = p/q,\ (p, q) = 1,\ y \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$
   (a) Montrer que f est intégrable et montrer que $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 1$.
   (b) Discuter la valeur de $\int_0^1 f(x, y)dy$ suivant les valeurs de x et montrer que $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)dy\right) dx$ n'existe pas.
2. Soit $f : Q = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que
$$\int_Q f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx.$$
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable et $f \geq 0$. On définit
$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$
   Montrer que le bord de D_f a mesure 0 et l'aire de D_f est égal à $\int_a^b f$.
4. Justifier l'existence de
$$\mathbb{I} = \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\sin^2 y}{y} dy.$$
   Soit a un réel positif et $K = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. En considérant
$$\int_K e^{-y} \sin(2xy)dxdy,$$
   calculer $\mathbb{I}$.
5. Soit K le compact de $\mathbb{R}^2$ défini par :
$$x^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 - 2y \leq 0.$$
   Représenter K ; calculer son aire.

6. Soit
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
et soit
$$D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq r^2.\}$$
   (a) Esquisser D_r et montrer que f est intégrable sur D_r.
   (b) Calculer $\int_{D_r} f dxdy$.
   (c) Montrer que f n'est pas intégrable sur le quadrant $x \geq 0$, $y \geq 0$.
7. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant :
$$f(u,v) = \begin{cases} 2(u-v)/(u+v)^3 & u,v > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (a) Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(u,v) du \right) dv$.
   (b) Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(u,v) dv \right) du$.
   (c) Soit $n \geq 2$ entier. On regarde la région
$$R_n = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < v < u/2,\ 0 < u \leq 1/n\}.$$
   Esquisser cette région. Trouver $C > 0$ telle que l'inégalité $f(u,v) \geq Cn^2$ est valable sur R_n. En déduire que f n'est pas intégrable sur le rectangle $[0,1] \times [0,1]$.

Chapitre 7

Séries de Fourier

7.1 Fonctions périodiques

Dans ce chapitre on considère des fonctions *complexes* définies sur $\mathbb{R}$. Une telle fonction f est une FONCTION PÉRIODIQUE de période T si

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x+T) = f(x).$$

On peut normaliser la période à 2π en remplaçant la variable x par $2\pi x/T$. Des exemples de telles fonctions (avec période 2π) :

Définition 7.1.1. Une SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE est une série de la forme

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots,$$

où les a_i, b_i sont des constantes complexes et x est une variable réelle.

Puisque

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \\ \sin(nx) &= \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}), \end{aligned}$$

les termes $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ s'écrivent $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$, où les $c_n \in \mathbb{C}$. On obtient donc des séries de la forme :

$$c_0 + (c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}) + \cdots (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) + \cdots \tag{7.1}$$

Un tel polynôme est réel si et seulement si pour tout n on a $c_{-n} = \bar{c}_n$.

Les sommes partielles $s_n := \sum_{m=-n}^{n} c_m e^{imx}$ sont des POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES (complexes). Utilisant les relations :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{7.2}$$

on retrouve les coefficients de $s_n = f$:

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx. \tag{7.3}$$

Cela motive la définition suivante :

Définition 7.1.2. Soit $f : \mathbb{R} \to C$ périodique de période 2π. On suppose que f est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ (c.à.d $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur $[-\pi, \pi]$). Les COEFFICIENTS $c_m(f)$ DE FOURIER de f sont données par (7.3) et la série trigonométrique correspondante (convergente ou pas) est appelée sa SÉRIE DE FOURIER, qu'on note :

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imx}, \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

Les SOMMES PARTIELLES sont :

$$\begin{aligned} s_n(x) = \sum_{m=-n}^{n} c_m e^{imx} &= \sum_{-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-imt}dt\right)e^{imx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{m=-n}^{n} e^{im(x-t)}dt \end{aligned}$$

On a donc

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt, \tag{7.4}$$

où

$$\begin{aligned} D_n(x) :&= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{(n+1)ix} - e^{-nix}}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{(n+\frac{1}{2})ix} - e^{-(n+\frac{1}{2})ix}}{e^{\frac{1}{2}ix} - e^{-\frac{1}{2}ix}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

On a aussi besoin de son intégrale totale :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1. \tag{7.6}$$

Pour le montrer on utilise (7.2).

Les questions de base dans la théorie sont : la série de Fourier est-elle convergente et si oui, sa somme est-elle égale à f ?

Les fonctions périodiques, bornées et intégrables sur chaque intervalle borné forment un espace vectoriel :

$$L = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ périodique de période } 2\pi, \text{ bornée et intégrable sur } [-\pi, \pi]\}$$

muni d'un produit hermitien :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}.$$

Il faut noter que $\|f\| = \langle f, f\rangle = 0$ n'implique pas que $f = 0$, mais seulement que $f = 0$ presque partout ; donc L n'est pas un vrai espace hermitien et $\|f\|$ n'est pas une vraie norme, mais l'inégalité du triangle ainsi que Pythagore reste vrai dans L muni de ce produit.

La formule (7.2) montre que les fonctions

$$\varphi_n(x) := e^{inx}$$

définissent un système orthonormé dans L, c.à.d $\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = \delta_{nm}$. Les sommes partielles s_n se trouvent dans l'espace L_n de base φ_j, $j = -n, \dots, n$. En effet, si $p_n : L \to L$ est la projection orthogonale de L vers L_n on a :

$$p_n(f) = \sum_{m=-n}^{n} \langle f, \varphi_m\rangle\varphi_m = s_n(f).$$

La distance de f à L_n est égal à $d(f, p_n f)$. Alors à cause du théorème de Pythagore on a :

$$\|p_n(f)\|^2 = \sum_{m=-n}^{n} |c_m|^2 \leq \|f\|^2.$$

Cela montre :

Proposition 7.1.3. INÉGALITÉ DE BESSEL *Soit $f \in L$ et soient c_k, $k \in \mathbb{Z}$ ses coefficients de Fourier, alors $|c_0|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_1|^2 + |c_{-2}|^2 + |c_2|^2 + \cdots$ converge et*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| \leq \|f\|.$$

En particulier $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, c.à.d.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0 = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

On utilisera cela dans la démonstration du théorème suivant.

Théorème 7.1.4. (THÉORÈME DE LOCALISATION) *Soit $f \in L$, f réelle et $0 < \delta < \pi$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{-\pi}^{-\delta} f(x-t)D_n(t) + \int_{\delta}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\right] = 0.$$

Donc, si la série de Fourier converge au point x, utilisant 7.4, on a :

$$\boxed{\forall \delta \in]0,\pi[: \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_\delta^\delta f(x-t)D_n(t)dt.}$$

Réciproquement, si la limite de droite existe, la série de Fourier de f converge au point x vers cette limite.

Démonstration : On fixe $x \in [-\pi,\pi]$ et on définit :

$$g(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } |t| < \delta \\ \dfrac{f(x-t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} & \text{si } \delta \leq |t| \leq \pi. \end{cases}$$

Par (7.5) on trouve que l'intégrale de $f(x-t)D_n(t)$ sur $[-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$ est égale à :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) tdt &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t/2)\sin(nt)dt \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(t/2)\cos(nt)dt. \end{aligned}$$

On remarque que ces deux dernières intégrales donnent des coefficients de Fourier des fonctions intégrables $g(t)\cos(\frac{1}{2}t)$ et $g(t)\sin(\frac{1}{2}t)$ et donc convergent vers zéro par la remarque juste avant ce théorème.

Corollaire 7.1.5. *Si f satisfait une condition de Lipschitz en x (par exemple si f est différentiable en x), alors la série de Fourier de f converge au point x vers $f(x)$.*

Démonstration : Par hypothèse pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit il existe $M > 0$ tel que :

$$|t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x-t) - f(x)| \leq M|t|.$$

Alors

$$\begin{aligned} |D_n(t)f(x-t) - f(x)| &\leq |D_n(t)\cdot t| \cdot \left| \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \right| \\ &\leq \max_{|t|\leq\delta} |D_n(t)\cdot t| \cdot M \leq \tilde{M}, \end{aligned}$$

avec $\tilde{M}$ un constante qui ne dépend pas de n, car $\lim_{t\to 0} \sin t/t = 1$ implique que

$$D_n(t)t = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\cdot t}{\sin(\frac{1}{2}t)}$$

reste bornée lorsque t tend vers zéro (indépendant de n). En utilisant (7.6) on en déduit :

$$\begin{aligned} 2\pi\,|s_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| \\ &\le \left| \int_{-\delta}^{\delta} D_n(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| + R_n \\ &\le 2\tilde{M}\delta + R_n, \end{aligned}$$

où R_n tend vers 0 par le théorème de localisation. Donc

$$\limsup_{n\to\infty} |s_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{\pi}\tilde{M}\delta.$$

Ensuite on laisse δ tendre vers 0.

Remarque. Avec ce qu'on a développé jusqu'à maintenant on peut montrer :

- Deux fonctions continues avec même série de Fourier sont égales : voir l'exercice 4f).
- Une fonction continue $f \in L$ telle que $(f, e^{imx}) = 0$ pour tout m est nulle : voir l'exercice 4g).
- ([Rudin, Theorem 8.16]) Si $f, g \in L$ sont continues et

  $$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imx}, \\ g(x) &\sim \sum_{m\in\mathbb{Z}} c'_m e^{imx}, \end{aligned}$$

  alors

  $$(f, g) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \overline{c'_m}.$$

  Voir [Rudin, Theorem 8.15, Cor. 2]. Cela reste vrai pour tout couple de fonctions dans L (Théorème de Parceval). La preuve utilise la théorie d'intégration de Lebesgue ([Rudin, Theorem 10.40]).

7.2 Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur un intervalle fermé J. Les discontinuités de f sont de la première espèce et donc

$$f^+(x) = \lim_{t\downarrow x} f(t), \quad f^-(x) = \lim_{t\uparrow x} f(t)$$

existent. Le saut en x est la différence et f est continue en x si le saut est nul.

Le but est de montrer :

Théorème 7.2.1. (Dirichlet) *Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier converge au chaque point $x \in [-\pi, \pi]$ vers*

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{2}\left(f^+(x) + f^-(x)\right).$$

Démonstration : Les sommes partielles sont données par

$$s_n(x) = \sum_{m=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-imt}\right) e^{inx}.$$

En remplaçant $t \mapsto f(t)$ par $t \mapsto f(t) - \tilde{f}(x)$ peut supposer que $\tilde{f}(x) = 0$. Ensuite, en remplaçant t par $t - x$ on peut supposer que $x = 0$. Si f est une fonction impaire $s_n = 0$ et aussi $f(0) = 0$ et donc l'assertion est trivialement vraie. On peut donc supposer que f est paire et dans ce cas f est continue au point 0. La somme partielle est donc égale à :

$$s_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt.$$

Remarquons que la fonction $h(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ se prolonge de façon continue à droite (resp. à gauche) en 0 en posant $g(0+) = f'(0+)$ (resp. $g(0-) = f'(0-)$, car f est dérivable à droite (resp. à gauche) en 0 et donc

$$\lim_{t\downarrow 0} h(t) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(0+)$$

(resp. $\lim_{t\uparrow 0} h(t) = f'(0-)$. Il en suit que $h(t)$ est intégrable sur $]-\pi, \pi]$ et donc aussi la fonction

$$f(t)\frac{1}{\tan\frac{1}{2}t} = h(t) \cdot \frac{t}{\tan\frac{1}{2}t}.$$

La fonction $f(t)D_n(t)$ s'écrit comme

$$f(t)D_n(t) = f(t)\frac{1}{\tan\frac{1}{2}t}\sin(nt) + f(t)\cos(nt)$$

et donc $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt$ donne la somme de la partie imaginaire de la n-ième coefficient de Fourier de $-f(t)\dfrac{1}{\tan\frac{1}{2}t}$ et la partie réelle de la n-ième coefficient de Fourier de $f(t)$. Par la Prop. 7.1.3, si n tend vers $+\infty$ ces coefficients tendent vers zéro.

7.3 *Le phénomène de Gibbs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique, C^1 par morceaux telle que

$$f_+(0) = -f_-(0) =: c.$$

Alors, si on pose $f(0) = 0$, par le thm. 7.2.1 les sommes partielles $s_n(x)$ convergent vers $f(x)$ au voisinage de 0 mais pas uniformément. Il existe une constante G telle que les valeurs de $s_n(x)$ s'accummulent dans l'intervalle $[0, cG]$ lorsque $x \downarrow 0$. Puisque $s_n(-x) = -s_n(x)$, les valeurs de $s_n(x)$ s'accummulent alors aussi dans l'intervalle $[-cG, 0]$ lorsque $x \uparrow 0$. C'est le PHÉNOMÈNE DE GIBBS illustré par la figure ci-dessous.

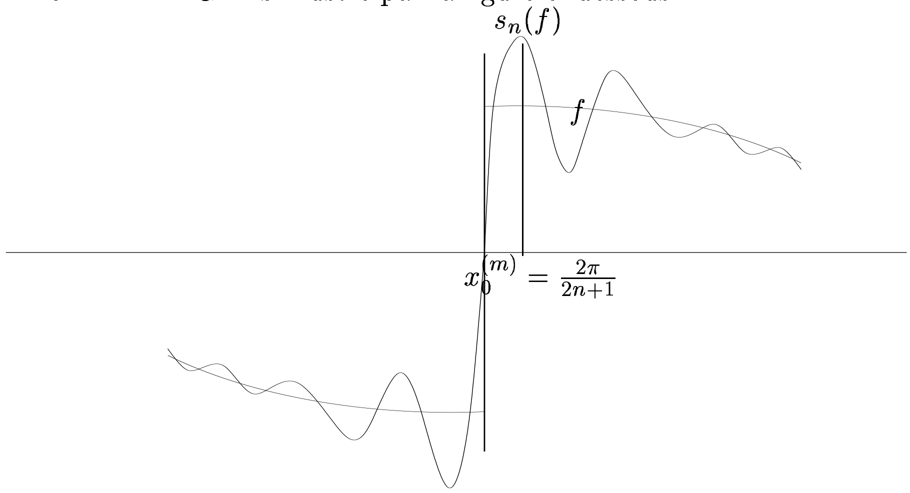

FIG. 7.1 – Le phénomène de Gibbs

Pour l'expliquer, on commence avec l'étude de la fonction

$$\varphi_0(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\right), \quad 0 < x < 2\pi \tag{7.7}$$

prolongée de façon périodique. On trouve pour sa somme de Fourier partielle

$$s_n(\varphi_0)(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$$

Lemme 7.3.1. *On a :*

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right] = 0$$

Démonstration : On utilise $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \cdots$ pour en déduire que

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{6}t + \cdots$$

et donc
$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{6}t + \cdots$$
converge vers 0 quand $t \to 0$.

Lemme 7.3.2. *Il existe $\delta > 0$ (indépendant de x) et une fonction continue η_n telle que :*
$$|x| < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t} dt + \eta_n(x), \quad \textit{avec } |\eta_n(x)| \leq |x|.$$

Démonstration : Utilisant
$$2\sum_1^n \cos kt = D_n(t) - 1 = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t} - 1$$
on trouve :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} &= \int_0^x \left(\sum_1^n \cos kt\right) dt \\
&= \int_0^x \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t} dt + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\int_0^x \left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t/2}\right) \sin\left((n+\frac{1}{2})t\right) dt\right] - \frac{1}{2}x.
\end{aligned}$$

Pour la première intégrale on fait un changement de variable : $u = (n+\frac{1}{2})t$ et on trouve
$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t} dt.$$
La différence $\eta_n(x)$ est continue en x, somme de la deuxième intégrale et $-\frac{1}{2}x$. On utilise le Lemme 7.3.1 pour trouver $\delta > 0$ telle que $|\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t/2}| < 1$ pour $|x| < 2\delta$; la deuxième intégrale est donc majorée par $\frac{1}{2}|x|$ et on trouve $|\eta_n(x)| \leq |x|$.

Motivé par ce lemme, utilisant $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, on pose
$$\boxed{F_n(x) := \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t} dt}$$

de sorte que $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1$. On a donc :

$$s_n(\varphi_0)(x) = F_n(x) + \frac{2}{\pi}\eta_n, \quad \text{avec } |\eta_n(x)| \leq |x|. \tag{7.8}$$

Soit

$$x_k^{(n)} := \frac{2}{2n+1}(k+1)\pi.$$

Puisque

$$F_n'(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{(n+\frac{1}{2})x},$$

la fonction F_n a des minima locaux G_{2k+1} aux points $x_{(2k+1)}^{(n)}$:

$$G_{2k+1} := F_n(x_{(2k+1)}^{(n)}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{(2k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt, \quad k = 0, 1, \ldots$$

et des maxima locaux G_{2k} aux points $x_{2k}^{(n)}$:

$$G_{2k} := F_n(x_{2k}^{(n)}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2k\pi}\frac{\sin t}{t}dt, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

La différence $G_{k+1} - G_{k-1} = \displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt$ étant < 0 pour k paire et > 0 pour k impaire, on a :

$$G_0 > G_2 > G_4 > \cdots > 1$$
$$G_1 < G_3 < G_5 < \cdots < 1.$$

On pose :

$$\boxed{G := G_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt = 1,179\ldots.}$$

Les valeurs des extrêmes de $F_n(x)$ ne dépendent pas de n. En particulier on a a $F_n(x_0^{(n)}) = G$. En même temps on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0$. Donc, si $n \to +\infty$ et $x \downarrow 0$ les valeurs de la fonction continue $F_n(x)$ s'accummulent dans l'intervalle $[-G, G]$. C'est le fait crucial pour comprendre :

Proposition 7.3.3. (Le phénomène de Gibbs) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique, C^1 par morceaux telle que*

$$f_+(0) = -f_-(0) =: c.$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ telles que :

$$s_n(f)(x) - f(x) = c(F_n(x) - 1) + \alpha_n(x),$$

où

$$\forall n \geq N, \forall x \in]0, \delta[: \quad |\alpha_n(x)| \leq \epsilon.$$

En particulier, lorsque n tend vers $+\infty$ et x tend vers 0, les valeurs $s_n(f)(x)$ des sommes partielles de la série de Fourier de f s'accumulent dans l'intervalle $[-cG, cG]$.

Démonstration : Il suffit de montrer la première assertion.

Rappelons qu'on a introduit la fonction φ_0 (voir 7.7). On peut écrire

$$f(x) = c\varphi_0(x) + g(x)$$

avec g continue en 0 et $g(0) = 0$. Utilisant 7.8 on obtient :

$$s_n(f)(x) = cF_n(x) + \frac{2c}{\pi}\eta_n(x) + s_n(g)(x)$$

et donc :

$$\begin{aligned} s_n(f) - f(x) = c(F_n(x) - 1) \quad &+ \quad (c - f(x)) + \\ &+ \quad \frac{2c}{\pi}\eta_n(x) + s_n(g)(x), \end{aligned}$$

La fonction

$$\alpha_n(x) = c - f(x) + \frac{2c}{\pi}\eta_n(x) + s_n(g)(x).$$

devient ainsi petit que l'on veut, d'après le Lemme 7.3.2 et la convergence de $s_n(g)$ en zéro vers 0.

Le cours est-il compris ?

Discuter les énoncés suivants ; sont-ils vrais ? :

1. Soit $f \in L$, c.à.d. f est une fonction 2π-périodique, bornée et intégrable. Alors sa n-ième coefficient de Fourier est
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(t)e^{-int}dt, \quad (b-a) = 2\pi.$$
2. Dans l'espace L les fonctions $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ forment un système orthogonale, même orthonormé.
3. La série de Fourier d'une fonction dérivable et périodique f converge vers f.
4. Même énoncé pour une fonction périodique de classe C^1 par morceaux.
5. Les sommes de Fourier partielles d'une fonction périodique continue sont continues.
6. Même énoncé pour une fonction 2π-périodique et bornée, intégrable sur $[-\pi, \pi]$.
7. Soit f 2π-périodique et paire. Alors les sommes de Fourier partielles sont des combinaisons linéaires de $\cos kt$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Que peut-on dire sur les fonctions impaires ?

Exercices

1. Montrer que pour f réelle et périodique de période 2π ces coefficients de Fourier satisfont $c_{-n} = \bar{c}_n$.
2. Soit f une fonction périodique de période 2π et soient $s_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$ ses somme partielles. La SOMME DE FÉJER est définie par

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}.$$

   (a) Soit

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} D_m(t),$$

   montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$.

   (b) Monter

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt.$$

   (c) Monter que

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1 - \cos(n+1)t}{1 - \cos t}.$$

   (d) En déduire que $K_n(t) \geq 0$ et que

$$K_n(t) \leq \frac{2}{(n+1)(1 - \cos \delta)}, \quad 0 < \delta \leq |t| \leq \pi.$$

   (e) Montrer que $|f| \leq M$ implique $|\sigma_n(t)| \leq M$.
3. On rappelle que pour une suite $c_0, c_1, \ldots$, ayant les sommes partielles $s_0, s_1, \ldots$, leur somme en moyenne arithmétique est donnée par

$$\sigma_n = \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1}.$$

   (a) On suppose qu'on se donne $c_n \in \mathbb{C}$ telles que

$$|nc_n| \leq M, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   Montrer $s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}(c_1 + 2c_2 + \cdots + nc_n)$ et ensuite que

$$|s_n - \sigma_n| \leq M.$$

   (b) On suppose que f est de classe C^1. Montrer que les sommes partielles $s_n(x)$ sont uniformément bornées. Indication : on utilisera l'exercice 6 du Chap. II :

$$n|c_n(f)| \leq V(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|.$$

Ensuite, on fixe $t \in [-\pi, \pi]$ et on pose $c_n = c_n(f)e^{\pi i t} + c_{-n}(f)e^{-\pi i t}$ et on applique le résultat qu'on vient de montrer et l'exercice précédente.

4. Le but est de montrer que pour f continue et périodique de période 2π, on a
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$$
et d'en tirer des conséquences. Soit $\epsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il y a $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ si $|x - y| < \delta$.
   (b) Montrer que
   $$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)dt < \epsilon/2 \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \epsilon\pi.$$
   (c) Soit $M = \max_{\mathbb{R}} |f|$. Utiliser l'Exercice 2 (d) pour trouver N telle que
   $$\delta \leq |x| \leq \pi\,, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad K_n(t) \leq \frac{\epsilon}{4M}.$$
   (d) Utiliser le résultat précédent pour estimer l'intégrale de $|f(x-t) - f(x)|K_n(t)$ prise sur les intervalles $[-\pi, -\delta]$ et $[\delta, \pi]$.
   (e) Conclure que $|\sigma_n(x) - f(x)| = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dt < \epsilon$ si $n \geq N$.
   (f) Montrer que si deux fonction continues ont même séries de Fourier, alors les fonctions sont identiques.
   (g) Montrer que si toutes les coefficients de Fourier d'une fonction continue f sont zéro, alors $f = 0$.

5. (a) Montrer qu'il y a une constante M telle que :
   $$\left|\sum_{m=1}^{n} \frac{\sin mt}{m}\right| < M.$$
   Indication : appliquer la dernière exercice, part (b) à la fonction
   $$f(t) = \begin{cases} \pi - t & t \in [0, \pi] \\ -\pi - t & t \in [-\pi, 0[\end{cases}$$
   (b) Même question pour $\left|\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{\cos mt}{m}\right|$.