Exercices de modélisation, MEEF maths Grenoble

Bernard.Parisse@univ-grenoble-alpes.fr

Ce document présente rapidement l'UE de modélisation. Il commence par un TP de prise en main de Xcas, un des logiciel qui peut être utilisé pour faire les calculs ou illustrer les thèmes au programme de maths du lycée et du capes. Les 3 sections qui suivent ce TP sont des exercices de modélisation rassemblés en 3 sections selon la progression du cours :

- Quelques exemples de problèmes de modélisation ne nécessitant pas de résultats nouveaux.
- Le coeur de l'UE, sur les modèles discrets et continus (suites arithmético-géométriques, équations différentielles), correspondant au nouveau programme de terminale 2020/21 et au programme de maths complémentaires.
- Un petit chapitre sur les matrices stochastiques, qui passe en maths expertes en 2020/21.

Certains exercices, marqués Exposé, peuvent être choisis pour l'exposé de décembre, on trouvera aussi d'autres idées en dernière section, les étudiants peuvent également présenter une partie de leçon de capes dont le thème est lié à la modélisation.

Voici une liste de leçons d'oral 2020 où les exercices et thèmes abordés sont pertinents (voire très pertinents pour les leçons en gras) :

- 4 Statistiques 2d (régressions).
- 21 Proportionnalité et linéarité,
- 22 Pourcentages et taux d'évolution
- **24 Modélisation par équations ou inéquations**,
- **25 Modélisation par des matrices**
- 26 Algorithmes,
- **28 Autres disciplines**
- 31 $u_{n+1} = f(u_n)$
- 35 Exp/Ln
- **39 Modélisation par des suites/fonctions.**

Pour certains exercices, on a indiqué entre parenthèses les numéros de leçons où ils sont pertinents.

Pour faire ces exercices de modélisation, il est souvent nécessaire d'avoir un outil de calcul (ordinateur ou calculatrice). Xcas est l'un des logiciels utilisables lors des oraux du Capes, on peut utiliser la version pour ordinateur (c'est cette version qui est privilégiée ici) ou la version Xcas pour Firefox depuis un navigateur compatible utilisable sur ordinateur, tablette (voire sur smartphone si on a un grand écran). Pour les écrits où la calculatrice est autorisée, on peut aussi utiliser Xcas, notamment sur les Casio Graph 90+e et Casio Graph 35eii. D'autres logiciels peuvent s'avérer utiles, notamment Geogebra pour la géométrie (hors du contexte de cette UE), Open Office pour le tableur ou d'autres calculatrices graphiques aux écrits. Un des avantage de Xcas est de proposer dans un seul logiciel toutes les fonctionnalités (calcul numérique et formel, géométrie interactive, programmation, tableur) de manière intégrée.

1 TP de prise en main Xcas

1.1 Xcas natif pour PC, Mac, Linux

Une fois identifié sur les PC de la salle TP, Xcas se lance depuis le menu Education du menu général ou depuis un terminal par la commande `xcas &`.

Pour télécharger Xcas sur votre ordinateur personnel, allez sur le site
`http://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~parisse/install_fr.html`
Pour lancer Xcas, sous Windows : icone Xcas du bureau, sur Mac ouvrir Xcas depuis le Finder dans Applications, usr, bin, puis conservez-le dans le dock.

Les commandes les plus utiles de Xcas se trouvent dans le menu Outils, le menu Expressions permet de réécrire des expressions, le menu Cmd comporte une liste bien plus exhaustives de commandes, le menu Graphe des commandes et assistants pour faire des représentations graphiques.

Le menu Aide, Index affiche une aide courte sur une commande et des exemples recopiables que l'on peut ensuite modifier, on peut aussi lancer l'aide par la touche F1 après avoir saisi un nom de commande, le bouton Details affiche une aide plus complète. Vous pouvez aussi rechercher un ou plusieurs mots clefs dans la documentation (menu Aide).

Si vous n'avez jamais utilisé de logiciel de calcul formel, vous pouvez commencer par parcourir le tutoriel de Xcas (menu Aide, Débuter en calcul formel, Tutoriel) ou/et vous inspirer des exemples de la section guide de survie du manuel Algorithmes (menu Aide, Manuels, Algorithmes).

1.2 Xcas pour Firefox ou navigateur compatible

Cette version ne nécessite pas d'installation et permet d'échanger facilement des sessions de calcul par email ou en les diffusant sur le forum de Xcas. Allez sur l'URL :
`https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~parisse/xcasfr.html`
La ligne de commande se trouve en bas, juste au-dessus le bouton Math ou Prog permet d'afficher des assistants pour des fonctionnalités de math ou d'algorithmique, le bouton 123 affiche ou enlève le clavier scientifique. Le bouton Doc affiche de la documentation par thèmes et des exemples de sessions.

1.3 Xcas sur calculatrices

- Casio Graph 90+e et 35eii :
  `https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~parisse/casio/khicasio.html`
- HP Prime : taper sur la touche CAS
- TI Nspire : `www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~parisse/install_fr.html#ti`

1.4 Nombres exacts et approchés

Les nombres entrés dans Xcas peuvent être exacts (par exemple 123 ou 5/2) ou approchés (par exemple 1.23). Le séparateur entre la partie entière et décimale est le point `.` comme dans tous les logiciels scientifique, la virgule `,` sert de séparateur entre deux éléments d'une liste. La notation scientifique mantisse/exposant séparé par la lettre `e` génère un nombre approché, par exemple `N:=6.02e23` pour le nombre d'Avogadro. Si un calcul contient au moins un nombre approché, le résultat est approché.

1.5 Expressions et fonctions

Xcas est un logiciel de calcul formel, capable de faire des calculs approchés ou exacts avec des nombres, mais aussi avec des symboles (par exemple `x`) et des expressions contenant des symboles (par exemple `x^4-1`). On peut définir une fonction algébrique `f` d'une variable par exemple `f(x):=sin(x^2)`. Pour une fonction non algébrique (utilisant par exemple une boucle), voir la section 1.8. Il faut bien distinguer une expression (par exemple `g:=sin(x^2)`) d'une fonction, comme `f` défini ci-dessus. On peut écrire `f(2)` mais `g(2)` n'est pas correct (Xcas l'accepte toutefois en affichant un avertissement).

Une variable, par exemple `a`, peut contenir une valeur (si on a par exemple exécuté `a:=123`) ou être symbolique (on dit encore variable non affectée). Pour supprimer une affectation, on utilise la commande `purge()`.

1.6 Listes et matrices

Xcas utilise les `[]` comme délimiteur de listes et la `,` comme séparateur des éléments. Pour accéder à un élément d'une liste `l` on écrit `l[j]` où l'indice `j` est numéroté à partir de 0. Par exemple `l:=[1,3,4,5]` crée une liste ayant 4 éléments, et `l[2]` vaut 4.

La commande `seq` et les constructions de liste en compréhension en syntaxe Python permettent de créer des listes à partir d'une formule, par exemple pour générer la liste des carrés de 1 à 10 :
`l:=seq(j^2,j,1,10)` ou `l:=[j^2 for j in range(1,11)]`

Une matrice est représentée par une liste de listes de même taille, la liste de ses lignes. Par exemple `m:=[[1,2],[3,4]]` crée une matrice de 2 lignes et 2 colonnes, `m[0,1]` vaut 2.

La commande `M:=matrix(L,C,f)` permet de créer une matrice ayant `L` lignes, `C` colonnes, avec comme coefficient ligne j et colonne k $M_{j,k} = f(j,k)$ (les indices commencent à 0). Par exemple `M:=matrix(3,3,(j,k)->1/(j+k+1))`.

1.7 Tableur, géométrie

Xcas dispose d'un tableur et de fonctionnalités de géométrie. L'interface est beaucoup moins riche que celle d'un tableur bureautique comme Open Office ou d'un logiciel de géométrie comme Geogebra, mais Xcas permet de travailler avec des valeurs exactes (par exemple des fractions d'entiers), des expressions symboliques, avec toute les fonctions mathématique de Xcas, ainsi qu'avec les fonctions définies par un programme de l'utilisateur.

Pour créer un niveau tableur, allez dans le menu Tableur, Nouveau tableur. Vous pouvez donner un nom de variable à la matrice correspondante dans Variable, par exemple M. Ceci permet ensuite d'utiliser la variable `M` dans une ligne de commande. Pour changer le nom de variable associé à un tableur, cliquez sur `Sheet config..` Le tableur peut aussi servir à saisir des matrices de manière conviviale. Un raccourci clavier utile du tableur : pour recopier une formule vers le bas `Ctrl-D` (D comme down).

Pour créer un niveau de géométrie, allez dans le menu Geo, Nouvelle figure. Le menu Geo contient de nombreuses commandes pour faire de la géométrie analytique.

1.8 Algorithmique

— Pour programmer un algorithme, vous pouvez choisir entre le langage de Xcas en français (très proche du "langage naturel") ou la syntaxe compatible Python. Le choix se fait depuis le menu Cfg, configuration du CAS. Il est possible de traduire automatiquement d'une syntaxe vers l'autre (voir plus bas).

— Pour écrire un nouveau programme, sélectionnez Nouveau programme dans le menu Prg, ensuite vous pouvez utiliser les assistants de création de fonction, test et boucle.

— Une fois votre programme écrit, tapez sur le bouton OK, corrigez les erreurs de syntaxe si nécessaire.

— Sauvegardez votre session.

— Pour tester une fonction `f`, placez-vous dans un niveau de calcul et tapez une commande, par exemple `f(2,3)` si `f` prend deux arguments. Si le programme tourne indéfiniment, vous pouvez l'interrompre avec le bouton STOP en haut à droite.

— La commande `debug` (par exemple `debug(f(2,3))`) permet de montrer le déroulement d'un programme instruction par instruction en visualisant l'évolution de la valeur des variables. C'est aussi une manière très efficace pour mettre au point un programme en cas d'erreurs d'exécution.

— Vous pouvez traduire une fonction `f` écrite en langage Xcas vers Python en utilisant la commande `python(f)`. La commande `xcas(f)` effectue la conversion inverse.

Exemple : un algorithme de seuil pour $u_{n+1} = \sin(u_n), u_0 = 1$. On cherche le premier entier N tel que $u_N \leq \varepsilon$. En syntaxe Python :

```
def seuil(eps):
    u = 1.0
    N = 0
    while u>eps:
        u = sin(u)
        N += 1
    return N
```

1.9 Sauvegardes et échanges de données

Les sessions de calcul ne comportant pas de tableur peuvent être sauvegardées dans un format compatible entre Xcas pour PC, Xcas pour Firefox et KhiCAS (Xcas pour calculatrices Casio). Dans Xcas pour PC, depuis le menu Fich/Exporter comme/Khicas. Vous pouvez copier le fichier sur une calculatrice Casio compatible avec le gestionnaire de fichiers. Vous pouvez aussi ouvrir le fichier dans Xcas pour Firefox en cliquant sur le bouton Parcourir. Vous pouvez ensuite partager une session via Internet :

— par mail, en cliquant sur l'icone d'enveloppe (en haut à gauche)
— sur un forum comme le forum de Xcas, en cliquant sur le bouton F

1.10 Exercices de prise en main

Si vous devez utilisez un résultat d'une commande par la suite, pensez à lui donner un nom, par exemple `a:=int(sin(x)); b:=diff(a)`.

1. Écrire le polynôme $(x+3)^7 \times (x-5)^6$ selon les puissances décroissantes de x.
2. Simplifier les expressions suivantes :
$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \quad \frac{1+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}, \quad e^{i\pi/6}, \quad 4\text{atan}(\frac{1}{5}) - \text{atan}(\frac{1}{239})$$
3. Factoriser :
$$x^6 - 2x^3 + 1, \quad (-y+x)z^2 - xy^2 + x^2y$$
4. Calculez les intégrales et simplifiez le résultat :
$$\int \frac{1}{e^x - 1}\, dx, \quad \int \frac{1}{x\ln(x)} \ln(\ln(x))dx, \quad \int e^{x^2}\, dx, \quad \int x\sin(x)e^x\, dx$$
Vérifiez en dérivant les expressions obtenues.
5. Déterminer la valeur de :
$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\, dx \quad \int_0^1 e^{-x^3}\, dx$$
6. Calculer les sommes suivantes
$$\sum_{k=1}^{N} k, \; \sum_{k=1}^{N} k^2, \; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
7. Calculer le développement de Taylor en $x = 0$ à l'ordre 4 de :
$$\ln(1+x+x^2), \quad \frac{\exp(\sin(x)) - 1}{x + x^2}, \quad \sqrt{1+e^x}, \quad \frac{\ln(1+x)}{\exp(x) - \sin(x)}$$
8. Mettre dans une liste `l` la liste des carrés des entiers de 1 à 20.
9. Déterminer l'expression en fonction de n de la suite arithmético-géométrique définie par
$$u_{n+1} = 2u_n - 3, u_0 = 4$$
10. Déterminer la liste des diviseurs de 45768. Factoriser 100 !
11. Déterminer l'inverse de la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer l'expression de A^n. Résoudre le système linéaire :
$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ ax & + & y & + & z & = & 3 \end{array} \right.$$
12. Écrire une fonction Xcas prenant en argument deux entiers a et b et calculant la liste des restes successifs obtenus pendant le déroulement de l'algorithme d'Euclide de calcul du PGCD de a et b (voir section 1.8)

2 Thèmes de modélisation utilisant des outils de résolution connus.

Exercice 1. Une boule de pétanque est-elle pleine ou creuse ? Boule 100% acier, Diamètre 73mm, masse de la boule 720g, masse volumique de l'acier 7775kg/m^3.

Exercice 2. (24) Dans un récipient cylindrique de rayon 10 cm et de hauteur 30 cm, on place une bille de rayon 4 cm. On verse de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la bille (la surface de l'eau est alors tangente à la bille qui se trouve au fond du récipient). On retire ensuite la bille, et on la remplace par une autre bille de rayon R différent de 4 cm. Est-il possible que l'eau recouvre exactement la nouvelle bille ?

Exercice 3. (29, 39) Recherche de l'optimum de fonction par ex. determinée par géometrie : rectangle de périmètre donné et d'aire maximale, volume maximal en pliant un carton rectangulaire (et en enlevant les coins), volume maximal d'une pyramide construite dans une feuille A5...

(2014) On se donne un carré $ABCD$ de coté 8 cm, M un point du segment AB. On construit le motif formé par le carré de coté AM et un triangle rectangle isocèle de base MB. On cherche à rendre l'aire du motif minimale.

Exercice 4. Le directeur d'une salle de spectacles de 8000 places organise un concert. Il souhaite fixer le prix du billet pour optimiser le prix de sa recette. Une étude de marché lui apprend que si le prix du billet est 50 euros, il vend 3000 billets et que chaque baisse de 1 euro lui permet de vendre 170 billets supplémentaires. Déterminez le prix du billet pour que la recette soit maximale.

Exercice 5. (21, 22) Le prix plein tarif d'un billet de train (tarification nationale SNCF) dépend de la distance en kilomètre b selon une expression affine par morceaux donnée par le tableau suivant :

1 à 16km	0.7781+0.1944$\times b$
17 à 32km	0.2503+0.2165$\times b$
33 à 64km	2.0706+0.1597$\times b$
65 à 109km	2.8891+0.1489$\times b$
110 à 149km	4.0864+0.1425$\times b$
150 à 199km	8.0871+0.1193$\times b$
200 à 300km	7.7577+0.1209$\times b$

1. Calculer le prix d'un billet plein tarif St Etienne-Grenoble, et comparer avec la somme des prix d'un billet St Etienne-Lyon et d'un billet Lyon-Grenoble. On prendra comme distance 58km pour St Etienne-Lyon et 129km pour Lyon-Grenoble.
2. Quelle est l'allure de la représentation graphique du prix en fonction de la distance ?
3. Calculer le prix d'un billet St Etienne-Grenoble avec 25% de réduction, d'un billet St Etienne-Lyon avec 25% de réduction et d'un billet Lyon-Grenoble avec 50% de réduction.
4. Un étudiant muni d'une carte de réduction Jeune désire faire le trajet St Etienne-Grenoble un dimanche soir en partant de St Etienne à 19h13, avec un changement à Lyon, départ à 20h14. Le dimanche, la carte de réduction donne 25% de réduction sur le prix du billet plein tarif pour un trajet commencé entre 15h et 20h, et 50% de réduction pour un trajet commencé après 20h. L'étudiant a-t-il intérêt à acheter deux billets ou un seul ?
5. Écrire un algorithme de calcul de prix du billet sous la forme d'une fonction prenant en argument la distance b et et le taux de réduction.
6. *Bonus* Modifier l'algorithme précédent en ajoutant en argument la matrice de 7 lignes et 3 colonnes contenant en première colonne la borne supérieure du kilométrage, en deuxième colonne l'ordonnée à l'origine et en troisième colonne la pente de l'application affine du tableau ci-dessus.

Exercice 6. (24) Un menuisier fabrique des tables et des buffets en bois. Une table nécessite 3 heures de découpe et 2 heures de finition. Un buffet nécessite 1h30 de découpage et 6 heures de finition. Pour des raisons de commercialisation, ce menuisier ne peut pas produire plus de 18 meubles par mois. Les capacités de production sont de 45 heures pour le découpage et 78 heures pour la finition. Cet artisan réalise un bénéfice de 200 euros par table et 300 euros par buffet. Déterminer le nombre x de tables et y de buffets que ce menuisier doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum.

Exercice 7. CC 2018, exercice 6.3.2, page 12

Exercice 8. `www.apmep.fr/IMG/pdf/S_Metropole_21_juin_2019_VED.pdf`, exercice 1

3 Modèles linéaires discrets et continus (39)

Thème central de l'UE, suites arithmético-géométriques et parallèle discret/continu avec les équations différentielles, qui reviennent dans le programme de la spécialité maths de terminale. Nouveau programme de maths complémentaires en terminale.

Exercice 9. (22) On suppose que la croissance de la consommation mondiale d'énergie est de $x\%$ par an. Combien d'années faut-il pour réaliser un doublement, un quadruplement de cette consommation ? Application au cas où x vaut 2% ou 4%. Comparer avec une croissance linéaire, l'augmentation de consommation restant constamment égale à $x\%$ de celle de la consommation de l'an 2010. Les objectifs des 27 sont de réduire d'un facteur 4 les émissions de CO2 d'ici 2050, à quel pourcentage annuel moyen cela correspond-il ?

Exercice 10. (22) Calculer les émissions annuelles de CO2 correspondant à une croissance de $x\%$ par an de la consommation de combustibles fossiles à partir de la consommation 2009 (application à $x = 1$ et $x = 2$, consommation 2009 4.5 ppm). En supposant que la moitié reste dans l'atmosphère, en déduire la valeur de la concentration en CO2 en 2100 selon ce modèle (concentration 2009 387ppm). Faites le même calcul en supposant plutot que la nature absorbe chaque année 0.02 fois la différence entre le taux de CO2 et 280 ppm.

Exercice 11. (22, 26, 38, 39) Illustrer le malthusianisme au tableur (croissance linéaire des ressources, croissance géométrique de la population +3%, données initiales année 0 ressource=consommation*1.5, croissances égales la 1ère année, avec constitution de stock). Peut-on résoudre exactement l'équation n-ième terme d'une suite arithmétique = n-ième terme d'une suite géométrique ? Écrire un programme permettant de résoudre l'équation de manière approchée.

Exercice 12. (22, 39) On suppose que la quantité de pétrole récupérable P est fixée (indépendamment des conditions économiques et technologiques). On suppose que la consommation augmente de 2% par an à partir de la consommation de l'an 2000, atteint un maximum où elle reste constante pendant 10 ans, puis décroit de 2% par an. Calculer en fonction de P la période de 10 ans où le maximum se produit, faites l'application numérique pour $P = 2e12$ barils, puis $P = 3e12$, $P = 4e12$ et $P = 5e12$ barils.

Exercice 13. (4) (à faire à partir de données collectées dans le groupe) Peut-on modéliser la pointure en fonction de la taille par une droite ?

Exercice 14. (39) Idée d'exposé : modèle logistique pour la production de pétrole. Si R_n désigne la quantité totale de pétrole produite les années n et précédentes, on cherche une relation du type

$$\frac{R_{n+1} - R_n}{R_n} = -aR_n + b$$

On a $R_{n+1} - R_n$ =production de pétrole l'année n.

Exercice 15. (22, 39) À l'aide d'une suite arithmético-géométrique, déterminer le montant d'une mensualité permettant de rembourser un emprunt de 100000 euros sur 10 ans au taux de 2.5%.
On dispose d'un capital de 100 000 euros placé au taux de 2.5%, quelle rente mensuelle peut-on verser pendant 10 ans ?

Exercice 16. (28, 39) Modèle continu/discret.
La période radioactive, ou période d'un isotope radioactif, est le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux de cet isotope initialement présents se désintègrent naturellement. Ainsi la demi-vie du plutonium 239 est de 24 110 ans. Déterminer le modèle discret et le modèle continu correspondant, le résoudre et donner une représentation graphique de la solution (par exemple en partant de 1 gramme de plutonium).

Exercice 17. (28, 39) La loi de Newton énonce : "La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant".

1. Traduire cette loi par une équation différentielle vérifiée par la température $\theta(t)$ du corps en fonction du temps t écoulé.
2. Dans une pièce où la température mesure 20 degrés, on verse du café, de température 75 degrés, dans une tasse. Deux minutes plus tard, le café est à 60 degrés. A partir du moment où il a été versé, combien faudra-t-il de temps (en minutes et en secondes à la seconde près) pour que le café soit à la température de 45 degrés ?
3. Proposer une modélisation discrète, la résoudre, et l'illustrer (algorithme, tableur, ...)

Exercice 18. Exercices issus du bac S

— exercice 5 de `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Pondichery_S_avril_2016_2.pdf`
— exercice 1 de `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_Pondichery_4_mai_2018-2.pdf`
— exercice 3 de `http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Asie_S_juin_2016.pdf`

Exercice 19. (4, 28) Récupérer sur
`https://data.giss.nasa.gov/gistemp/tabledata_v3/GLB.Ts+dSST.txt`
les anomalies de températures annuelles moyennes de la Terre entre 1970 et 2018. Tracer le nuage de points correspondant (année, température). Faire une régression linéaire sur la période 1970-2009, la représenter avec le nuage de points. Calculer le coefficient de corrélation, la régression est-elle de bonne qualité ? Comparer la droite de régression et les données observées entre 2010 et 2018.
Au lieu de prendre la moyenne annuelle, on peut prendre des moyennes glissantes sur par exemple 3 ou 5 années.

Exercice 20. (4, 28) Auto-corrélation d'une série temporelle.
Pour prédire le temps qu'il fera demain, on peut se dire que ce sera la même qu'aujourd'hui. Dans quelle mesure est-ce vérifié ? Prendre une série temporelle de températures maximales par exemple et calculer la corrélation avec cette série décalée de 1, 2, 3, etc. jours. Par exemple
`http://romma.fr/station_clim_mois.php?id=4&month=12&year=2015`

Exercice 21. (4, 28) Si on suppose que le temps d'un jour donné et du lendemain constituent des variables indépendantes, on peut modéliser les jours de gel en janvier par des variables indépendantes valant 0 (pas de gel) ou 1 (gel) avec une probabilité p. Quel serait l'intervalle de confiance (au risque de 5%) si on estime p à partir de la fréquence f des données de janvier 2011, 2012 et 2013 à Grenoble ? Pour savoir si cela semble compatible avec les données observées en 2017 (26 jours de gel),
— Calculer la probabilité qu'il y ait 26 jours ou plus de gel pour la valeur médiane et pour la plus grande valeur de p de l'intervalle de confiance.
— Simuler un tirage aléatoire d'une série suffisamment grande de 31 événements selon p. Observer l'intervalle de fluctuation à 95%. Observer la fréquence de mois ayant 26 jours de gel ou plus.
— On estime p à partir de la fréquence des données des 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31 janvier 2009 à 2013. Est-ce que cela semble compatible avec la fréquence aux mêmes dates entre 2014 et 2017 ?

Exercice 22. (4, 28, 39) Idée d'exposé : modèle de Verhulst pour la population de la France (ou d'un autre pays, ou de la population mondiale). Cf. l'article de wikipedia. On calculera les paramètres du modèle à l'aide d'une régression linéaire.

Exercice 23. (28, 39) Modèle non linéaire
On modélise l'évolution de la température moyenne T des océans de la Terre par

$$\frac{dT}{dt} = -k(T^4 - T_e^4), \quad T_e = 288K, k > 0$$

Le climat de la Terre est-il stable ? Déterminer une estimation de k en supposant qu'après une petite perturbation de la température moyenne des océans, il faut environ 60 ans pour absorber la moitié de la perturbation. Déterminer le modèle discret correspondant, en faire une illustration au tableur ou/et avec l'instruction `plotseq` (tracé de suite récurrente).

Exercice 24. (39) Modélisation avec 2 suites : exercice 4 bac S, source :
`https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Nlle_Caledonie_S_19_nov-_2015.pdf`
`https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_Amerique_Sud_24_nov-_2015.pdf`
`https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_Amerique_Nord_2_juin_2017.pdf`
Effectuer les illustrations demandées (tableur ou algorithme). Discuter ou/et justifier les indications données dans l'énoncé. Déterminer le modèle continu correspondant.

Premier sujet :

Un organisme propose un apprentissage de langues étrangères en ligne. Deux niveaux sont présentés : débutant ou avancé. Au début de chaque mois, un internaute peut s'inscrire, se désinscrire ou changer de niveau.

On souhaite étudier l'évolution sur le long terme, de la fréquentation du site à partir d'un mois noté 0.

Des relevés de la fréquentation du site ont conduit aux observations suivantes :

- Au début du mois 0, il y avait 300 internautes au niveau débutant et 450 au niveau avancé.
- Chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé, l'autre moitié reste au niveau débutant et la moitié des avancés ayant terminé leur formation, se désinscrit du site.

- Chaque mois, 100 nouveaux internautes s'inscrivent en débutant et 70 en avancé.

On modélise cette situation par deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n). Pour tout entier naturel n, d_n et a_n sont respectivement des approximations du nombre de débutants et du nombre d'avancés au début du mois n.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

On pose $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} &= \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1. (a) Justifier l'égalité $a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70$ dans le contexte de l'exercice.

   (b) Déterminer les matrices A et B telles que pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \quad \text{où } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Déterminer la matrice C qui vérifie l'égalité $C = AC + B$.

   (b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

   Montrer que pour tout entier naturel n,

$$V_{n+1} = AV_n.$$

   (c) On admet que pour tout entier $n \geqslant 1$, $V_n = A^n V_0$.

   En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$U_n = \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}$$

4. (a) On admet que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

   En déduire que pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}.$$

   (b) En utilisant les questions précédentes, que peut-on prévoir pour l'évolution de la fréquentation du site sur le long terme ?

Exercice 25. bac S

- exercice 4 non spécialiste et exercice 4 spécialité
  `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_Amerique_Nord_29_mai_2018.pdf`
- exercice 4 non spécialiste et exercice 4 spécialité
  `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_Antilles_Guyane_19_juin_2018.pdf`
- exercice 4 (les 2)
  `https://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_Polynesie_20_juin_2018.pdf`

Exercice 26. (28, 39) (exposé) Modélisation de la température au cours d'une journée.

On modélise la température $T(t)$ au cours d'une journée par la solution d'une équation différentielle :

$$aT' = f(t), \quad f(t) = -0.02T + \max(0, c\cos(t) + d)$$

où une journée de 24h correspond à t variant de 2π et :

— $a \approx 0.05$ modélise l'inertie thermique (pour un climat océanique dégradé),
— $f(t)$ tient compte des transferts de chaleur vers le reste de la Terre et vers l'espace [1] (terme $-0.02T$) auquel on ajoute pendant la journée le rayonnement direct du Soleil (terme max qui vaut $c\cos(t)+d$ lorsqu'il est positif ce qui définit le jour ou 0 la nuit).
— $c \geq 0$ et d dépendent de la saison et de la latitude du lieu considéré. Ainsi, au pole $c=0$ ($d=0.4$ au solstice d'été et $d=-0.4$ au solstice d'hiver), à l'équateur $d=0$ ($c=0.92$ aux solstices, $c=1$ aux équinoxes), et à la latitude de Grenoble on a $c=0.65$ aux solstices, ($d=0.28$ au solstice d'été, $d=-0.28$ au solstice d'hiver).

1. On se place au pole. Déterminer la solution de l'équation différentielle
$$aT' = -0.02T + \max(0, d)$$
au solstice d'été ($d=0.4$) et au solstice d'hiver ($d=-0.4$), ainsi que la limite de T pour t grand.
2. On se place à l'équateur à l'équinoxe. Déterminer (par exemple avec `desolve`) la solution de l'équation :
$$aT' = -0.02T + \max(0, \cos(t))$$
la nuit ($t \in [-3\pi/2, -\pi/2]$) en fonction de $T_s = T(-3\pi/2)$ en déduire la valeur de $T(-\pi/2)$, puis résoudre l'équation le jour ($t \in [-\pi/2, \pi/2]$), en déduire $T(\pi/2)$. Peut-on trouver T_s tel que T soit périodique ? Pour t grand, tend-on vers une solution périodique ? Lorsque la solution est périodique, à quel moment de la journée la température maximale est-elle atteinte ? La température minimale ?
3. On se place à la latitude de Grenoble. Déterminer la période de nuit et de jour aux solstices puis la solution de l'équation la nuit, puis le jour. On suppose qu'on choisit une valeur initiale de T telle que la solution soit périodique, observe-t-on le même type de phénomène qu'à l'équateur ? Que peut-on dire de l'amplitude thermique au solstice d'été par rapport à l'amplitude thermique au solstice d'hiver ?

Exercice 27. (26, 28, 39, exposé) Modèle proie-prédateur (continu ou/et discret). Cf. wikipedia
`fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quations_de_pr%C3%A9dation_de_Lotka-Volterra`

4 Matrices stochastiques (25)

Au programme de maths expertes.
Exercice 28. Transmission d'un bit sur un canal bruité.
On transmet une suite de bits entre 2 personnes, l'information doit transiter par n canaux de transmission indépendants, sur chaque canal la probabilité que le bit soit inversé est p (supposé petit, $p<1/2$). On note p_j [resp. q_j] la probabilité d'avoir un bit égal à 1 [resp. 0] après passage par j canaux et $X_j = (p_j, q_j)$.

1. Déterminer la relation entre X_j et X_{j+1}, puis la limite de X_j lorsque $j \to +\infty$.
2. On suppose $p =$`1e-4`. Déterminer n le nombre maximal de canaux que l'on peut franchir en conservant une probabilité d'erreur plus petite que `1e-2`.
3. Vérifier le résultat en utilisant la loi binomiale de paramètres n et p.

Exercice 29. Modèle de maladie infectieuse. On divise la population en 3 catégories : personnes saines non contagieuses S, personnes incubant la maladie et contagieuses I, malades contagieux M. Au cours d'une journée, on peut passer
— de l'état S à l'état I avec une probabilité α ou rester sain (probabilité $1-\alpha$),
— de l'état I à l'état M avec une probabilité β ou à l'état S avec une probabilité γ ou rester en incubation I ($1-\beta-\gamma$)
— de l'état M à l'état S avec une probabilité δ
Le jour 0, une personne est saine.

1. Représenter le graphe probabiliste correspondant. et donner la matrice stochastique du modèle.
2. Déterminer les probabilités de cette personne d'être dans un des 3 états le jour n.
3. Cette probabilité peut-elle tendre vers une valeur limite ?

1. Pour être plus réaliste, il faudrait ici tenir compte de la latitude et de la saison

4. Illustrer l'évolution des 3 probabilités pour `alpha:=0.1; beta:=0.05; gamma:=0.3; delta:=0.2`.
5. Simuler $N = 1000$ évolutions possibles d'une dizaine de jours pour une personne donnée et comparer la moyenne des N évolutions avec la probabilité calculée à la première question
6. Même question au bout de 20 jours. Comparer les probabilités et simulations avec la limite.

Exercice 30. Même genre, exercice 4 non spécialité métropole 2017
`www.apmep.fr/IMG/pdf/S_metropole_21_juin_2017_JPG_FH.pdf`
Exercice 4 spécialité bac S Antilles-Guyane septembre 2016.

Exercice 31. Modèle d'Ehrenfest.
Deux chiens partagent N puces. A chaque minute une puce au hasard sur l'un des chiens saute sur l'autre. Il y a $N + 1$ états possibles selon le nombre de puces du premier chien.

1. Reprśenter le graphe probabiliste correspondant et donner la matrice stochastique du modèle.
2. A l'instant 0, un des chiens a toutes les puces. Déterminer la probabilité pour ce chien d'avoir k puces à l'instant n (en minutes).
3. Calculer les valeurs possibles par exemple pour $N = 8$ et $n = 20$. Faire des simulations.
4. Vérifier que la distribution binomiale de paramètres $N = 8$ et $p = 1/2$est invariante.

Voir aussi exercice 3 bac S métropole septembre 2016.

Exercice 32. (d'après S) Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances. On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée. Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours, et X_n le vecteur $(\ a\ )_n$
b_n Ainsi $a_0 = 0.4$ et $b0 = 0.6$.

1. Décrire la situation par un graphe.
2. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$ avec A une matrice à déterminer.
3. Calculer une valeur approchée de X_{30} à la machine.
4. Expliquer comment déterminer l'expression de X_n en fonction de n en diagonalisant A.
5. Montrer que $X_{n+1} = 0.9X_n + B$ où B est un vecteur à déterminer. En déduire l'expression de X_n en fonction de n en considérant X_n comme une suite arithmético-géométrique.
6. Déterminer la limite X de X_n lorsque n tend vers l'infini. Pour quelle valeur de n a-t-on $|X_n - X| \leq 0.01$? Vérifier en écrivant un algorithme qui détermine la valeur de n à partir de laquelle $|X_n - X| \leq 0.01$ sans utiliser l'expression de X_n.

Exercice 33. (Exposé) Modéliser par un graphe probabiliste un problème du type de celui de la société fictive de l'article Chaine de Markov de wikipedia.

Exercice 34. (Exposé) Expliquer et illustrer sur un graphe d'environ 10 pages web l'algorithme pagerank.

5 Exposés

Voir dans la liste des exercices précédents ou proposer un thème faisant intervenir de la modélisation ou application à d'autres disciplines, par exemple

— cinétique chimique
— circuits RLC
— cryptographie RSA
— génétique
— la relation Cobb-Douglas $Y = AK^aL^b$ avec Y le PIB, K le capital, L la main d'œuvre
— Chiffrement de Hill
— Courbe de Lorenz, indice de Gini.
— (Exposé **graphes**) Algorithme de Dijkstra
— ...

6 CC 2018

6.1 Stérilisation (d'après bac S Pondichéry 2016, 7 points)

On souhaite stériliser une boite de conserve dont la température initiale est de 25 degrés. On la place dans un four à une température de $T_F = 100$ degrés. La stérilisation débute 10 minutes après, lorsque la température de la boite est supérieure à 85 degrés. La température $T(t)$ de la boite évolue en fonction du temps t (en minutes) selon la loi

$$\frac{dT}{dt} = k(T_F - T)$$

1. Déterminer la valeur de $T(t)$ (au bout de 10 minutes, $T(10) = 85$).
2. Représenter l'allure du graphe de $T(t)$.
3. On considère que la stérilisation est terminée si

$$I(t) := \int_{10}^{t} T(u)\, du \text{ vérifie } I(t_s) = 80 \text{ (minutes fois degrés)}$$

   Représenter I sur le graphe, calculer I en fonction de t.
4. Justifier que t_s est compris entre 20 et 25 minutes.
5. Proposer un algorithme permettant de calculer à 1 seconde près la valeur de t_s.
6. Bonus : Proposer un modèle discret correspondant à ce modèle continu.

6.2 Modèle proie-prédateur (d'après bac S Amérique 2018, 6 points)

On modélise la population de compagnols (proie) et de renards (prédateurs) par deux suites u_n et v_n. On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. On suppose que :

$$u_{n+1} = 1.1u_n - 2000v_n, \quad v_{n+1} = 2 \times 10^{-5}u_n + 0.6v_n$$

   Traduire cette récurrence sous la forme $U_{n+1} = AU_n$. Diagonaliser A. En déduire l'expression de U_n en fonction de n lorsque u_0 =2 millions et $v_0 = 120$.
2. Une modélisation plus réaliste est donnée par :

$$u_{n+1} = 1.1u_n - 0.001u_n v_n, \quad v_{n+1} = 2 \times 10^{-7}u_n v_n + 0.6v_n$$

   Déterminer les points d'équilibre (ou points fixes) de la suite U_n (i.e. tels que $U_1 = U_0$)
   Bonus : déterminer le modèle linéarisé en ces équilibres et le comportement du modèle linéarisé si U_0 est proche d'un point d'équilibre.

6.3 Énergie solaire (8 points)

6.3.1 Cout du kWh

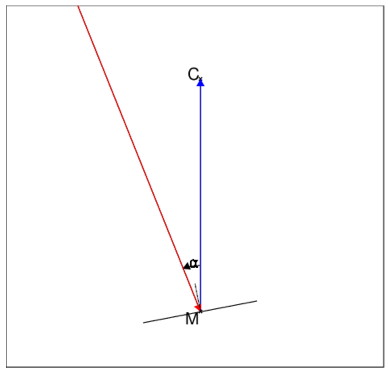
Unités et notation : la puissance électrique a pour unité le W (Watt), un GW équivaut à mille MW ou à un million de kW. Une puissance de 1kW produit pendant 1 heure 1kWh d'électricité.
Sandstone Energy est un projet de centrale solaire à concentration dans le désert du Nevada, d'une puissance totale de 1.6GW (8 tours de 200MW) pour une prévision de production annuelle de 5600GWh (données : Wikipedia).

1. Calculer le nombre de GWh que pourrait fournir la centrale en un an si elle pouvait fonctionner 24h sur 24 à la puissance maximale. En déduire le facteur de charge de la centrale, c'est-à-dire la production annuelle prévue divisée par la production annuelle correspondant à la puissance maximale 24h sur 24.
2. On estime que la centrale coûtera 5 milliards de dollars. Si la centrale est financée par un emprunt sur 30 ans à un taux annuel de 3% remboursé en 30 annuités, déterminer le montant d'une annuité.
3. En déduire le coût par kWh produit correspondant.

6.3.2 Rendement

Dans une centrale solaire à concentration avec tour, le rayonnement solaire est réfléchi par plusieurs miroirs orientables vers un unique point de concentration C, situé au sommet d'une tour d'une grande hauteur. On s'intéresse à un des ces miroirs situé sur le sol au point M, en première approximation **on suppose que** C **est à la verticale de** M. La figure ci-dessous est faite dans le plan défini par M, C et la direction du Soleil, on a représenté le miroir par un petit segment de droite légèrement incliné, un rayon incident venant du Soleil et le rayon réfléchi par le miroir vers C.

1. Soit α l'angle entre la verticale et la direction du Soleil.



   On suppose qu'à une heure h comprise entre 0 et 24h, l'angle α est déterminé par

$$\alpha = \frac{h-12}{12}\pi$$

   Ainsi à 12h, le Soleil est à la verticale du lieu (midi solaire), le miroir est horizontal et $\alpha = 0$. Déterminer l'heure de lever et de coucher du Soleil (le Soleil est à l'horizontale du lieu).

2. Déterminer l'angle β entre le rayon solaire incident et la perpendiculaire au miroir (on rappelle que c'est l'une des bissectrices des rayons incidents et réfléchis). Donner la valeur de β au lever et au coucher du Soleil.

3. On suppose que le Soleil brille sans interruption entre son lever et son coucher. Montrer que la puissance solaire réfléchie par le miroir vers la tour vaut :

$$P = P_m \cos(\beta)$$

4. Déterminer la puissance moyenne reçue entre le lever et le coucher du Soleil en fonction de P_m. En déduire la puissance moyenne reçue pendant 24h (donc en tenant compte de la période où il fait nuit).

5. Estimer la surface minimale de miroir nécessaire pour construire une tour solaire de puissance maximale 200MW en prenant $P_m = 0.3kW$ par mètre carré de miroir. Si les miroirs occupent toute la surface d'un disque, à quel rayon cela correspond-il ?

6. Bonus : Discuter la pertinence des hypothèses de calculs pour une centrale solaire située dans le désert du Nevada, à 38 degrés de latitude Nord.