1 TP de prise en main

Nous utiliserons Xcas, sur les PC du DLST il se lance à partir de l'icone Xcas du bureau ou directement depuis un navigateur (Firefox recommandé)
`https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~parisse/xcasfr.html`
Vous pouvez aussi utiliser Xcas sur votre propre ordinateur depuis Firefox, Chrome ou Edge (Safari non supporté), ou en l'installant cf.
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/install_fr.html` (sur Mac, il est conseillé d'installer Xcas à l'intérieur d'une machine virtuelle Linux). Vous pouvez également travailler sur calculatrice.

Attention, lors de votre première utilisation au DLST, il faut avoir lancé le navigateur par défaut de Windows (Edge) au moins une fois pour pouvoir accéder à la documentation en ligne de Xcas.

Si vous avez l'habitude d'utiliser un interpréteur comme Python ou un logiciel de calcul scientifique, vous pouvez directement faire le TP de prise en main. Pour trouver un nom de commandes, regardez d'abord dans le menu Outils, puis Cmds si vous ne trouvez pas dans le menu Outils, ou dans le menu Graphe qui fournit des assistants pour les représentations graphiques. Vous pouvez aussi commencer par parcourir le tutoriel, celui-ci est accessible depuis le menu `Aide, Debuter en calcul formel`. Lisez jusqu'au paragraphe 2.4 (vous pouvez sauter le paragraphe 2.2 sur les chaines de caractères), puis passez au TP de prise en main.

Pour sauvegarder une session, avec Xcas PC, utilisez le menu Fich, avec Xcas web, vous pouvez vous envoyer un email contenant un lien qui sauvegarde votre session, cliquez sur l'icone d'enveloppe en haut. **Faites des sauvegardes régulières**, c'est en particulier conseillé avant de tester un programme. Si vous avez des difficultés à sauvegarder sur votre espace personnel sur le réseau, vous pouvez utiliser une clef USB. Vous pouvez aussi exporter une session au format lisible sur calculatrices (Khicas Casio).

Les TP qui suivent le TP de prise en main demandent souvent d'écrire des petits programmes, pour cela utilisez le menu Prg nouveau programme de Xcas PC ou tapez directement votre programme en ligne de commande avec Xcas web (taper shift-entrée pour passer à la ligne). Si vous voulez utiliser la syntaxe compatible avec Python, dans Xcas PC vérifiez que `python` apparait dans la ligne d'état, sinon cliquez sur cette ligne et modifiez, dans Xcas web validez en cliquant sur le bouton cyan Cas. Pour plus de détails sur la programmtion, vous pouvez consulter le tutoriel.

1. Écrire le polynôme $(x+3)^7 \times (x-5)^6$ selon les puissances décroissantes de x.
2. Simplifier les expressions suivantes :
$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \quad \frac{1+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}, \quad e^{i\pi/6}, \quad 4\text{atan}(\frac{1}{5}) - \text{atan}(\frac{1}{239})$$
3. Factoriser :
$$x^8 - 3x^7 - 25x^6 + 99x^5 + 60x^4 - 756x^3 + 1328x^2 - 960x + 256$$
$$x^6 - 2x^3 + 1, \quad (-y+x)z^2 - xy^2 + x^2y$$
4. Calculez les intégrales et simplifiez le résultat :
$$\int \frac{1}{e^x - 1}\,dx, \quad \int \frac{1}{x\ln(x)}\ln(\ln(x))dx, \quad \int e^{x^2}\,dx, \quad \int x\sin(x)e^x\,dx$$
Vérifiez en dérivant les expressions obtenues.

5. Déterminer la valeur de :
$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^3}, \quad \int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\,dx$$
6. Calculer les sommes suivantes
$$\sum_{k=1}^{N} k,\ \sum_{k=1}^{N} k^2,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
7. Développer $\sin(3x)$, linéariser l'expression obtenue et vérifier qu'on retrouve l'expression initiale.
8. Calculer le développement de Taylor en $x=0$ à l'ordre 4 de :
$$\ln(1+x+x^2), \quad \frac{\exp(\sin(x))-1}{x+x^2}, \quad \sqrt{1+e^x}, \quad \frac{\ln(1+x)}{\exp(x)-\sin(x)}$$
9. Trouver les entiers n tels que le reste de la division euclidienne de $123n$ par 256 soit 17.
10. Déterminer la liste des diviseurs de 45768.
    Factoriser 100 !
11. Résoudre le système linéaire :
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ ax & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$
12. Déterminer l'inverse de la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 TP1 : Suites récurrentes

On souhaite étudier des suites récurrentes (u_n) définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0, où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par exemple $f(x) = \sqrt{2+x}$.

Exercice 1

1. En utilisant le tableur de Xcas (menu Tableur), représenter les premiers termes de la suite $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ avec $u_0 = 0.1$ ou $u_0 = 1/10$ (menu Math->suite récurrente du tableur).
2. Calculer ensuite en mode exact et approché les 10 premiers termes de la suite : vous pouvez définir la cellule `A1` par `=sqrt(2+A0)`, puis taper Ctrl-D.
3. Essayez avec $u_{n+1} = \frac{u_n+3}{u_n+1}$.
4. Quels sont les avantages et inconvénients d'utiliser une valeur initiale exacte ou approchée ?

La feuille de calcul précédente donne une idée de la convergence de la suite, mais ne donne aucune information quantitative sur la vitesse de convergence. Au lieu de calculer un nombre fixé de termes de la suite, on va écrire un programme avec un test d'arrêt selon la valeur $|u_{n+1} - u_n|$ comparé à un nombre positif (petit) ε fixé à l'avance. Pour éviter que le programme ne boucle indéfiniment lorsque la suite ne converge pas (ou converge trop lentement pour la machine), on fixe aussi un nombre maximal d'itération N.

Exercice 2
Écrire un programme `iter` prenant en argument la fonction f, la valeur de u_0, de N et de ε, et qui s'arrête dès que l'une des conditions suivantes est satisfaite :
— $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$
— le nombre d'itérations dépasse N.

Dans le premier cas le programme renverra la valeur de u_{n+1}, dans le second cas une séquence composée de u_N et de N.
Tester votre programme avec $f(x) = \sqrt{2+x}$ et $f(x) = x^2$.

On suppose que la fonction f satisfait aux hypothèses du théorème du point fixe. On notera $k < 1$ la constante de contractance. On peut alors trouver un encadrement de la limite l de la suite (u_n) en fonction de u_n, u_{n-1} et k.

Exercice 3
Écrire un programme `iter_k` prenant en argument la fonction f, la valeur de u_0, la constante k et l'écart toléré ε, et qui s'arrête dès que $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Vérifier les hypothèses du théorème du point fixe pour $f(x) = 2\cos(x/3)$ sur $[0, 2]$ et expliciter une constante de contractance k. Déterminer une valeur approchée de la limite de (u_n) à `1e-3` près en utilisant la fonction `iter_k`.

La convergence de ces suites est en général linéaire*, le nombre de décimales exactes augmente de la même valeur à chaque itération. Par contre lorsqu'on est prêt d'une racine, la méthode de Newton permet en gros de multiplier par deux le nombre de décimales à chaque itération.*

Exercice 4

1. Donner une suite itérative obtenue par la méthode de Newton convergeant vers $\sqrt{7}$.
2. Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par
$$f(x) = \frac{7x+7}{x+7}$$
admet $\sqrt{7}$ pour point fixe. Trouver un intervalle I contenant $\sqrt{7}$ sur lequel les hypothèses du théorème du point fixe sont satisfaites et expliciter une constante de contractance k.
3. Comparer au tableur la vitesse de convergence des 10 premiers termes des deux suites (calculez les avec par exemple 40 chiffres significatifs et faites `evalf(.,40)` sur les différence entre 2 termes successifs).
4. En utilisant la fonction `iter_k`, trouver un encadrement de $\sqrt{7}$ à `1e-6` près pour le point fixe. Combien d'itérations sont nécessaires ? Donner aussi un encadrement par la méthode de Newton en utilisant u_4. Dans les 2 cas, on pourra prendre une valeur initiale approchée puis entière exacte pour avoir une valeur numérique approchée puis une fraction.

Dans certains cas, la fonction f n'est pas contractante, mais on peut réécrire l'équation à résoudre sous une autre forme avec une fonction contractante, par exemple en utilisant une fonction réciproque.

Exercice 5
Donner un encadrement à `1e-6` près d'une racine de l'équation $\tan(x) = x$ sur l'intervalle $]3\pi/2, 5\pi/2[$ en utilisant une méthode de point fixe. On observera qut $\tan$ n'est pas contractante mais que sa fonction réciproque l'est (attention à y ajuster correctement un multiple entier de π).
On peut aussi appliquer la méthode de Newton sur cet exemple.

3 TP2 : Types. Calcul exact et approché. Algorithmes de bases

1. Utiliser la commande `type` pour déterminer la représentation utilisée par le logiciel pour représenter une fraction, un nombre complexe, un flottant en précision machine, un flottant avec 100 décimales, la variable x, l'expression $\sin(x) + 2$, la fonction `x->sin(x)`, une liste, une séquence, un vecteur, une matrice. Essayez d'accéder aux parties de l'objet pour les objets composites (en utilisant `op` par exemple).
2. Déterminer le plus petit entier n tel que $(1.0 + 2^{-n}) - 1.0$ renvoie 0 sur PC avec la précision par défaut puis avec `(evalf(1,30)+2^(-n))-evalf(1,30)`. Même question sur votre calculatrice si vous en avez une.

3. Calculer la valeur de $a := \exp(\pi\sqrt{163})$ avec 30 chiffres significatifs (`evalf(.,30)`, puis sa partie fractionnaire (`frac(.)`). Proposez une commande permettant de décider si a est un entier.
4. Déterminer la valeur et le signe de la fraction rationnelle
$$F(x,y) = \frac{1335}{4}y^6 + x^2(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2) + \frac{11}{2}y^8 + \frac{x}{2y}$$
en $x = 77617$ et $y = 33096$ en faisant deux calculs, l'un en mode approché (`F(77617.0,33096.0)` ou `F(evalf(77617,30),evalf(33096,30))`) et l'autre en mode exact. Que pensez-vous de ces résultats ? Combien de chiffres significatifs faut-il pour obtenir un résultat raisonnable en mode approché ?
5. À quelle vitesse votre logiciel multiplie-t-il des grands entiers (en fonction du nombre de chiffres) ? On pourra tester le temps de calcul $t(n)$ (`time(a*(a+1))[0]`) du produit de $a \times (a+1)$ pour $a = 10^n$ avec $n = 10000, 20000, 40000$. Comment évolue le temps de calcul lorsque le nombre de décimales double ?
6. Comparer le temps de calcul de $a^n \pmod m$ par la fonction `powmod` et la méthode "prendre le reste modulo m après avoir calculé a^n" (vous pouvez aussi programmer la méthode rapide et la méthode lente, cf. par exemple l'article exponentation rapide de wikipedia).
7. Programmation de la méthode de Horner (TD exercices 12 et 13)
Il s'agit d'évaluer efficacement un polynôme $P(X) = a_nX^n + ... + a_0$ en un point. On pose $b_0 = P(\alpha)$ et on écrit :
$$P(X) - b_0 = (X - \alpha)Q(X)$$
où :
$$Q(X) = b_nX^{n-1} + ... + b_2X + b_1$$
On calcule alors par ordre décroissant $b_n, b_{n-1}, ..., b_0$.
   (a) Donner b_n en fonction de a_n puis pour $i \leq n-1$, b_i en fonction de a_i et b_{i+1}. Indiquez le détail des calculs pour $P(X) = X^3 - 2X + 5$ et une valeur de α entière non nulle.
   (b) Écrire un fonction `horn` effectuant ce calcul : on donnera en arguments le polynôme sous forme de la liste de ces coefficients (dans l'exemple `[1,0,-2,5]`) et la valeur de α et le programme renverra $P(\alpha)$. (On pourra aussi renvoyer les coefficients de Q).
   (c) En utilisant cette fonction, écrire une fonction qui calcule le développement de Taylor complet d'un polynôme en un point.

4 TP3 : Séries entières

Exercice 1.

1. Rappeler le développement de Taylor $T_{2n+1}(x)$ au voisinage de $x = 0$ de $f(x) = \sin(x)$ à l'ordre $2n$.
2. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions f et T_1, T_3, T_5, T_7
3. Graphiquement on voit que $T_7(x)$ approche $\sin(x)$: sur quel intervalle cette approximation vous paraît-elle acceptable ?
4. Donner une majoration du reste $R_{2n+1}(x)$ du développement de Taylor de f à l'ordre $2n+1$, où $f(x) = T_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x)$.
5. On prend $T_7(x)$ comme valeur approchée de $\sin(x)$ pour $x \in [-1, 1]$.
Donner une majoration indépendante de x de l'erreur commise.
(A titre d'illustration, tracer la différence $T_7(x) - \sin(x)$.)
6. En déduire un encadrement de $\sin(1)$.

Exercice 2. On veut approcher $\cos(x)$ à `1e-6` près en utilisant des développements en séries entières.

1. Déterminer le plus petit k tel que :
$$T_{2k}(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$
réalise cette approximation sur $[0, \pi/4]$.

2. Écrire une fonction qui calcule une valeur approchée à `1e-6` de $\cos(x)$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ en justifiant et en effectuant les étapes suivantes :
   — si x est négatif, on remplace x par $-x$ (que devient $\cos(x)$?)
   — lorsque $x \in [0, \pi/4]$, on utilise le développement en séries ci-dessus.
   — lorsque $x \in [\pi/4, \pi/2]$, on se ramène au développement de l'exercice précédent en posant $y = \pi/2 - x \in [0, \pi/4]$, et en appliquant $\cos(x) = \sin(y)$
3. Exprimer $\cos(x - k\pi)$ en fonction de $\cos(x)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Dans quel intervalle se trouve $x - k\pi$ si k est l'entier le plus proche de x/π (fonction `round` de Xcas) ? Écrire une fonction qui calcule une valeur approchée à `1e-6` de $\cos(x)$ sur $[-100, 100]$ en se ramenant au programme précédent. Afin de tester votre fonction f et éviter d'éventuelles erreurs grossières, faites afficher le graphe de f, disons sur l'intervalle $[-10, 10]$, puis le graphe de la différence $f - \cos$ où $\cos$ est la fonction déjà implémentée dans Xcas. On peut utiliser la commande `seq` pour générer un échantillonage régulier de valeurs, et `plotlist` pour la représenter ou `polygonscatterplot` avec la liste des abscisses correspondantes.

Exercice 3

1. Pour $x > 0$ exprimer $\arctan(-x)$ en fonction de $\arctan(x)$. Calculer la dérivée de $\arctan(x)+\arctan(1/x)$, en déduire $\arctan(1/x)$ en fonction de $\arctan(x)$ pour $x > 0$. En déduire que le calcul de $\arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$ peut se ramener au calcul de $\arctan(x)$ sur $[0, 1]$.
2. Rappeler le développement en séries entières de $\arctan(x)$ en $x = 0$, et son rayon de convergence. Soit $\alpha \in [0, 1]$, montrer que
$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^7}{7} \leq \arctan(\alpha) \leq \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5}$$
en déduire que la méthode de Newton appliquée à l'équation $\tan(x) - \alpha = 0$ avec comme valeur initiale $\alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5}$ est une suite décroissante qui converge vers $\arctan(\alpha)$.
3. Déterminez par cette méthode une valeur approchée à `1e-8` près de $\pi/4 = \arctan(1)$.
4. On pourrait calculer $\pi/4$ avec la même précision en utilisant le développement en séries de la formule de Machin
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$$
Combien de termes faudrait-il calculer dans le développement des deux arctangentes ?

Exercice 4

1. Écrire le développement en séries entières au voisinage de $x = 0$ de :
$$g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$$
2. On veut calculer une valeur approchée de
$$I = \int_0^1 g(x)\, dx$$
En utilisant le développement de g, écrire I sous la forme d'une série $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$.
3. Soit $R_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} v_j$ le reste de cette série. Donner une majoration de $|R_n|$.
4. En déduire un encadrement de I faisant intervenir $\sum_{j=0}^{n} v_j$. Calculer explicitement cet encadrement lorsque $n = 10$.

Exercice 5

Cet exercice reprend les calculs de $\ln(x)$ et $\exp(x)$ discutés en cours dans l'objectif de les illustrer par vos propres expériences sur ordinateur.

1. La série alternée $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ tend vers $\ln(2)$, et les termes consécutifs donnent des encadrements $s_{2m+1} < \ln(2) < s_{2m}$. Jusqu'à quel rang faut-il aller afin de garantir un encadrement à 10^{-5} près ? Calculer cette approximation de $\ln(2)$ avec Xcas. Même question pour 10^{-10}. Qu'observez-vous ?

   On considère ensuite la série $\ln(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)3^{2k+1}}$. Jusqu'à quel rang faut-il aller afin de garantir une approximation à 10^{-5} près ? Calculer cette approximation de $\ln(2)$ avec Xcas. Même question pour 10^{-10}. Conclusion ?
2. On se propose d'approcher $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour $x = -32$. Avant de se lancer dans ce calcul, estimer l'ordre de grandeur de $\exp(-32)$ puis l'ordre de grandeur des plus grands termes dans la somme.

   Jusqu'à quel rang faut-il aller afin de garantir une approximation à 10^{-20} près ? Calculer cette approximation de $\exp(-32)$ avec Xcas, d'abord en utilisant la précision standard de 53 bits, soit 16 décimales. Quel problème observez-vous ? On pourra augmenter la précision des nombres flottants utilisés : quelle précision est nécessaire, environ, pour raisonnablement effectuer ce calcul ?

   Est-ce que ces problèmes se posent pour l'approximation de $a_0 = \exp(-1)$? Comment en déduire une approximation de $\exp(-32)$ avec un minimum d'opérations ?

Exercice 6

On reprend des idées des exercices 4 et 5 pour implémenter le calcul de la fonction sinus intégral définie par :

$$\mathbf{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

1. Donner un développement en séries entières de la fonction **Si**, ainsi que le rayon de convergence, et une majoration du reste en fonction de x.
2. Lorsque $x > 1$, on a le problème de la série qui “commence par diverger” (comme pour l'exponentielle de l'exercice 5.2), mais sans possibilité de “réduire l'argument”. Combien de chiffres significatifs perd-on lorsqu'on calcule $\mathbf{Si}(x)$ par la série entière ? (En pratique, on calculera la série avec ce nombre de chiffres significatifs en plus).
3. Lorsque x est grand, on préfère utiliser le développement asymptotique de la fonction **Si**. On admettra que

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

   On calcule alors **Si** en faisant des intégrations par parties successives, en intégrant la fonction trigonométrique et en dérivant la fraction rationnelle. Les termes tout intégré donnent le développement asymptotique, et l'intégrale le reste. Par exemple, calculer le développement asymptotique à l'ordre 10 et une majoration du reste pour $|x| \geq 100$. En déduire une valeur approchée de **Si**(100).
4. En calculant **Si**(100) à l'aide du développement en séries entières, en déduire une valeur approchée de π.

5 TP4 : Polynômes

Exercice 1

Donner le détail des calculs avec Bézout de la décomposition en éléments simples de :

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-4)(x-1)}$$

en déduire :

— une primitive de f

— le coefficient de x^n du développement en séries entières de cette fraction en 0.

Exercice 2

Factoriser sur $\mathbb{Q}$ (`factor`) et sur $\mathbb{Q}[i]$ (`cfactor`) le polynôme $P(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Quels sont les degrés des facteurs ? Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ le polynôme P en appliquant `factor` et `cfactor` à `evalf(P)`. En regroupant les racines (commande `proot`) de P, retrouver la factorisation exacte de P dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 3

Trouver une racine approchée du polynôme P ci-dessus en appliquant la méthode de Newton avec une valeur

initiale complexe aléatoire. Donner un encadrement d'une racine de P correspondante. Éliminer cette racine par division euclidienne, chercher une autre racine, etc. jusqu'à obtenir la factorisation complète de P. Comparer la valeur de P et celle obtenue en développant le produit des $X-$racine.
Bonus : Écrire une fonction qui cherche une racine d'un polynôme en utilisant la méthode de Newton. Ajouter un test pour être sûr que la racine du polynôme est simple. Tester avec le polynôme P ci-dessus.
Modifier la fonction ci-dessus pour trouver toutes les racines, lorsqu'on trouve une racine r on applique une des méthodes suivantes :

— on divise le polynôme par $X-r$, et on relance la recherche de racines sur le polynôme obtenu,

— si $P=(x-r)Q$ alors $Q'/Q=P'/P-1/(x-r)$ qu'on applique pour faire une itération de Newton sur Q.

Exercice 4

Écrire une fonction qui détermine les racines rationnelles d'un polynôme P à coefficients entiers (elles sont de la forme p/q où q divise le coefficient dominant de P et $\pm p$ divise son coefficient de plus bas degré). Tester avec le polynôme $P=12x^5+10x^4-6x^3+11x^2-x-6$.

Exercice 5

En utilisant les suites de Sturm, déterminer le nombre de racines du polynôme P ci-dessus sur l'intervalle $[-3,0]$ (faites le calcul directement avec `sturmab`, puis en appliquant l'algorithme du cours avec les fonctions `rem` pour les divisions et `horner` pour évaluer un polynôme en un point). Même question sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 6

Représenter sur un même graphe $\cos(x)$ et son polynôme interpolateur de Lagrange en utilisant les 7 points d'abscisses équidistantes $\{0,\pi/6,...,\pi\}$. Donner une majoration de l'erreur entre ce polynome et la fonction $\cos$ en un réel x, représenter graphiquement cette erreur pour $x\in[0,\pi]$. Où l'erreur est-elle la plus grande ?

Exercice 7

Écrire un programme calculant les coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange par l'algorithme des différences divisées.

Exercice 8

Éliminer successivement a et b du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^3+b^3+c^3 & = & 8 \\ a^2+b^2+c^2 & = & 6 \\ a+b+2c & = & 4 \end{array}\right.$$

puis trouver les racines du polynôme en c, puis calculer les valeurs de b puis a correspondantes (en cherchant les racines du PGCD des 2 puis 3 équations en b puis a après remplacement de c puis b par leurs valeurs).

6 TP5 : Intégration

Exercice 1 : Calculer une valeur approchée de

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

par la méthode des rectangles, du point milieu et des trapèzes en utilisant un pas de $1/10$ et de $1/100$ (vous pouvez utiliser les fonctions `plotarea`, `area` avec la méthode en argument, ou utiliser le tableur ou écrire un programme effectuant ce calcul avec comme arguments la fonction, la borne inférieure, la borne supérieure et le nombre de subdivision). Observez numériquement la différence entre les valeurs obtenues et la valeur exacte de l'intégrale.

Exercice 2

Calculer le polynôme interpolateur P de Lagrange de $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ aux points d'abscisse $\frac{j}{4}$ pour j variant de 0 à 4. Donner un majorant de la différence entre P et f en un point $x\in[0,1]$. Représenter graphiquement ce majorant. Calculer une majoration de l'erreur entre l'intégrale de f et l'intégrale de P sur $[0,1]$. En déduire un encadrement de $\pi/4$.

Exercice 3

On reprend le calcul de $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ mais en utilisant un polynôme interpolateur de degré 4 sur chacune des N subdivisions de $[0,1]$ (de pas $h=1/N$). Le premier polynôme interpolateur est donc calculé en les points $0,1/4/N,2/4/N,3/4/N,1/N$, le deuxième en les points $1/N,1/N+1/4/N,1/N+2/4/N,1/N+3/4/N,2/N$, etc.

— Donner en fonction de N une majoration de l'erreur commise en remplaçant l'intégrale de $1/(1+x)$ par le polynôme interpolateur sur la première subdivision $[0, 1/N]$, puis sur les autres subdivisions, puis une majoration de l'erreur totale sur $[0, 1]$.

— Déterminer une valeur de N telle que la valeur approchée de l'intégrale ainsi calculée soit proche à 10^{-8} près de $\ln(2)$. En déduire une valeur approchée à 10^{-8} de $\ln(2)$.

Même question pour $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ et $\pi/4$ (pour majorer la dérivée n-ième de $\frac{1}{1+x^2}$, on pourra utiliser une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$).

7 TP6 : Algèbre linéaire

7.1 Méthode du pivot

1. Choisissez 5 vecteurs aléatoires exacts dans $\mathbb{R}^3$, trouvez deux relations linéaires indépendantes entre ces 5 vecteurs en calculant le noyau d'une application linéaire.
2. Déterminez le temps mis par votre logiciel pour résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues à coefficients aléatoires numériques puis exacts de taille $n = 5, 10, 20, 40$. Commentez.
3. Soit M une matrice carrée aléatoire de taille 3 à coefficients entiers, on lui accolle à droite la matrice identité de même taille puis on applique la fonction de réduction sous forme échelonnée, soit N la partie droite de la matrice réduite. Calculez `M * N`. Écrire une fonction `gaussinv` réalisant ce calcul pour une matrice carrée M quelconque.

7.2 Réduction des endomorphismes.

1. **Polynôme caractéristique par interpolation**
   Soit B une matrice carrée aléatoire de taille $n = 20$. Calculez $A = B\,{}^tB$ puis $\det(A-\lambda I)$ pour $\lambda = 0, ..., n$ puis le polynôme caractéristique de B par interpolation de Lagrange. Factorisez le polynôme en mode approché, puis comparez avec les valeurs propres numériques de $A = B\,{}^tB$ (obtenues par la fonction de calcul de valeurs propres du logiciel).
   Bonus : Écrire une fonction qui calcule le polynôme caractéristique d'une matrice par cette méthode.
2. **Polynôme caractéristique par puissances**
   Soit A une matrice carrée aléatoire de taille $n = 5$ et v un vecteur aléatoire de taille 5. Calculez la matrice dont les colonnes sont $v, Av, A^2v, ..., A^5v$ puis une base de son noyau. En déduire le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A.
3. Écrire un programme mettant en oeuvre la méthode de la puissance. Utilisez ce programme pour trouver une valeur approchée de la valeur propre de norme maximale par la méthode de la puissance de $B\,{}^tB$ où B est une matrice aléatoire.
4. En utilisant la méthode des itérations inverses, trouvez la plus petite valeur propre de la matrice précédente.
5. (bonus)
   Pour trouver les autres valeurs propres/vecteurs propres, on élimine la valeur propre trouvée en remplacant A par $A' = A - \lambda_1 w_1\,{}^tw_1$. Une fois une valeur propre de A' trouvée, on peut améliorer la précision en utilisant des itérations inverses sur la matrice A. Trouvez toutes les valeurs propres de la matrice :
   $$D = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$
6. **Couple de complexe conjugué de module maximal**
   Trouver le couple de valeurs propres de plus grand module de la matrice :
   $$E = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -3 & 4 \\ 7 & 8 & 6 & 5 \\ -1 & 4 & -4 & 1 \\ 7 & -4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$
   Faites de même pour le couple de plus petit module.