MAT404 **Université Grenoble Alpes** **Le 16 mai 2017**

Durée : 2 heures

Seule une feuille <u>manuscrite</u> recto-verso de format A4 est autorisée.

Formes quadratiques, Analyse de Fourier

<u>Exercice 1</u> :

1. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Soient B_1 et B_2 deux bases de V. Soit u un vecteur de V. Soient U_1 et U_2 les vecteurs colonnes des coordonnées de u dans les bases B_1 et B_2.
   (a) Donner le lien entre U_1, U_2 et P la matrice de passage de B_1 vers B_2.
   (b) On suppose $\dim V = 3$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver les coordonnées de U_2 en fonction de celles de U_1.
2. Rappeler la définition d'une matrice orthogonale.
3. Soient $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique, $B_1 = \{e_1, e_2\}$ et $B_2 = \{f_1, f_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Soit P la matrice de passage de B_1 vers B_2.
   (a) Rappeler la définition de la matrice M_1 de ϕ dans la base B_1. On note de même M_2 la matrice de ϕ dans la base B_2.
   (b) Donner la formule reliant M_1 et M_2.
   (c) Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont les vecteurs colonnes de coordonnées dans B_1 sont U et V. Donner $\phi(u, v)$ en fonction de M_1, U, V.
   (d) Sous quelle(s) condition(s) sur M_2 la base B_2 est elle ϕ-orthogonale ? ϕ-orthonormée ?

<u>Exercice 2</u> :

Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont la forme quadratique associée, écrite dans la base canonique est $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$

1. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique ainsi que l'expression de $\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$
2. Utiliser l'algorithme de Gauss pour réduire $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ à une somme de carrés. En déduire la signature de q. La forme ϕ est elle un produit scalaire (c'est à dire définie positive) ?
3. En utilisant la question précédente trouver une base B qui soit ϕ-orthogonale.
4. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt, orthonormaliser cette base pour le produit scalaire usuel. La base obtenue est elle aussi ϕ-orthogonale ?

Tournez s.v.p.

Exercice 3 :

1. (a) Montrer que la série $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\right)$ est convergente.

   (b) Montrer que la série $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}\right)$ est convergente.

2. (a) Calculer :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$$
   (b) Par une double intégration par partie, calculer pour k entier, $k > 0$:
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx$$

3. En déduire les coefficients de Fourier trigonométriques $a_0(f)$, $a_k(f)$ et $b_k(f)$ pour $k > 0$ de la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

4. Utiliser le théorème de Dirichlet et montrer que, pour tout $x \in]-\pi, \pi[$:
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$
   (on énoncera toutes les hypothèses nécessaires).

5. Déduire de la question 4., évaluée en $x = 0$, la valeur de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

6. A l'aide de l'identité de Parseval, calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

Exercice 4 :

On considère l'espace vectoriel $V = C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$
et un sous espace de V, $W = Vect\{1, \sin x\}$.

1. Montrer que $\{1, \sin x\}$ est une base orthogonale de W. Par une normalisation de chacun de ces vecteurs, en déduire une base orthonormée $\{f_1, f_2\}$ de W. On rappelle $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

2. Rappeler la formule générale de la projection orthogonale d'un vecteur $f \in V$ sur W. (on utilisera la base $\{f_1, f_2\}$).

3. Si f est impaire, simplifier la formule obtenue en 2.

4. Si f est paire, simplifier la formule obtenue en 2.

5. Déduire des questions 3. et 4. les projections orthogonales des fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ sur W. Trouver la projection orthogonale de la fonction $f + g$ sur W.

6. En utilisant la distance définie par le produit scalaire $\langle , \rangle$, quelle erreur est commise en approximant g par sa projection orthogonale sur W ?