Ex. 1 1) $q(u) = \varphi_q(u,u)$ si $u \in V$

et on a $\varphi_q(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(q(u+v) - q(u-v)\right).$

2) a) $\varphi_q\left((x,y,z),(x',y',z')\right) = -xx' + yy' + zz' - \frac{7}{2}yz' - \frac{7}{2}y'z.$

b) $M_{\varphi_q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & -7/2 & 1 \end{pmatrix}$

c) Réduction de Gauss :

$q(x,y,z) = -x^2 + \left(y - \frac{7}{2}z\right)^2 + z^2 - \frac{49}{4}z^2.$

$= -x^2 + \left(y - \frac{7}{2}z\right)^2 - \frac{45}{4}z^2.$

On cherche une base dans laquelle les coordonnées sont :

$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - \frac{7}{2}z \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' + \frac{7}{2}z' \\ z = z'. \end{cases}$

donc la base dont la matrice de passage depuis la base canonique

est $P : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale pour φ_q.

(on peut vérifier en calculant ${}^tP M_{\varphi_q} P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -45/4 \end{pmatrix}$).

d) La signature est donc $(1,2)$.

Ex. 2

1) D'après l'énoncé, on a $Tr(AB) = Tr(BA)$ c'est-à-dire $\tau(A,B) = \tau(B,A)$. Il suffit donc de vérifier la linéarité à gauche : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in V$.

$$\tau(\lambda A + B, C) = Tr((\lambda A + B)C)$$
$$= Tr(\lambda AC + BC)$$
$$= \lambda Tr(AC) + Tr(BC) \text{ par linéarité de la trace}$$
$$= \lambda \tau(A,C) + \tau(B,C).$$

Conclusion : τ est bien une forme bilinéaire symétrique sur V.

2) On a ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. Il vient :

$$\tau({}^tA, B) = Tr({}^tAB) = Tr({}^t({}^tAB))$$
$$= Tr({}^tBA)$$
$$= Tr(A\,{}^tB)$$
$$= \tau(A, {}^tB).$$

3) si $A \in W_1 \cap W_2$, ${}^tA = A$ (car $A \in W_1$)
$= -A$ (car $A \in W_2$)

donc $A = -A$, i.e. $A = 0$.

On a donc $W_1 \cap W_2 = \{0\}$: la somme est directe.

Soit $M \in V$, en posant $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$,

on a : ${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM + M) = A$ donc $A \in W_1$

${}^tB = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -B$ donc $B \in W_2$

et $A + B = M$. Donc $V = W_1 + W_2$. Conclusion : $V = W_1 \oplus W_2$.

4) Soit $A \in W_1$, $B \in W_2$.

$$\tau(A,B) = Tr(AB) = Tr({}^t(AB)) = Tr({}^tB\,{}^tA) = -Tr(AB) = -\tau(A,B)$$

donc $\tau(A,B) = 0$. On a bien $W_1 \perp_\tau W_2$.

5) $${}^tAA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

donc $\tau({}^tA, A) = Tr({}^tAA) = a^2+b^2+c^2+d^2$

Si $A \in \ker \tau$, on a $\tau(A,B) = 0$ $\forall B \in V$.

en particulier $\tau(A, {}^tA) = 0$. Ceci implique $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$, donc $a=b=c=d=0$, et $A = 0$.

Conclusion : $\ker \tau = \{0\}$.

6) en posant $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On voit que e_1, e_4, e_2+e_3 sont dans W_1. Il suffit de prendre $e_2 - e_3$ pour compléter en une base de V, avec $e_2 - e_3 \in W_2$.

Je pose $v_1 = e_1$, $v_2 = e_4$, $v_3 = e_2+e_3$, $v_4 = e_2 - e_3$.

On calcule $e_1^2 = e_1$, $e_1 e_4 = 0$, $e_1 e_2 = e_2$, $e_1 e_3 = 0$

donc $\tau(v_1, v_1) = 1$, $\tau(v_1, v_2) = 0$, $\tau(v_1, v_3) = \tau(e_1, e_2) + \tau(e_1, e_3) = Tr(e_2) + Tr(0) = 0$

$\tau(v_2, v_2) = 1$, $\tau(v_2, v_3) = \tau(e_4, e_2) + \tau(e_4, e_3) = Tr(0) + Tr(e_3) = 0$.

$\tau(v_3, v_3) = 2$ $\quad\tau(v_4, v_4) = -\tau(v_4, {}^tv_4) = -2$.

Au final, dans la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$M_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) On a donc : le rang de τ est 4, la signature $(3,1)$.

Ex. 3 1) D'après la formule de l'exercice 1, on a :

$$2\varphi_\alpha(P, Q) = q_\alpha(P+Q) - q_\alpha(P) - q_\alpha(Q)$$

$$= \alpha\left(P''(0) + Q''(0)\right)^2 - \alpha P''(0)^2 - \alpha Q''(0)^2$$

$$+ \int_0^1 (P+Q)^2 - \int_0^1 P^2 - \int_0^1 Q^2$$

$$= 2\alpha P''(0) Q''(0) + \int_0^1 2P(t)Q(t)\,dt.$$

La symétrie est évidente, la linéarité aussi :

$$\varphi_\alpha(\lambda P_1 + P_2, Q) = \alpha\left(\left(\lambda P_1'' + P_2''\right)(0) Q''(0)\right) + \int_0^1 (\lambda P_1 + P_2) Q$$

$$= \lambda \varphi_\alpha(P_1, Q) + \varphi_\alpha(P_2, Q).$$

2) Soit $P \in V$. On suppose $\alpha \geq 0$.

$$\varphi_\alpha(P,P) = q_\alpha(P) = \alpha\left(P''(0)\right)^2 + \int_0^1 P^2(t)\,dt$$

$$\geq \int_0^1 P^2(t)\,dt \geq 0$$ car la fonction P^2 est ≥ 0 sur $[0,1]$.

De plus, si $\int_0^1 P^2(t)\,dt = 0$, comme $t \mapsto P^2(t)$ est positive et continue sur $[0,1]$, on a $\forall t \in [0,1]$, $P^2(t) = 0$, d'où $P(t) = 0$.
Pour conclure, il suffit de remarquer que P est un polynôme donc

s'il admet une infinité de racines, il est nul.

On a donc bien :

- φ_α est une forme bilinéaire symétrique sur V.
- $\forall P \in V, \quad \varphi_\alpha(P,P) \geq 0$.
- $\forall P \in V \quad (\varphi_\alpha(P,P) = 0 \Rightarrow P = 0)$.

donc φ_α est un produit scalaire sur V si $\alpha \geq 0$.

3) Développons $q_\alpha(P) = \alpha(2c)^2 + \int_0^1 (a + bt + ct^2)^2 \, dt$.

$$q_\alpha(P) = 4\alpha c^2 + \int_0^1 (a^2 + b^2t^2 + c^2t^4 + 2abt + 2act^2 + 2bct^3)\,dt$$

$$= 4\alpha c^2 + \int_0^1 (a^2 + 2ab\,t + (b^2+2ac)t^2 + 2bc\,t^3 + c^2t^4)\,dt.$$

$$= 4\alpha c^2 + \left[a^2t + ab\,t^2 + \frac{b^2+2ac}{3}t^3 + \frac{bc}{2}t^4 + \frac{c^2}{5}t^5\right]_0^1$$

$$= a^2 + ab + \frac{1}{3}b^2 + \frac{2}{3}ac + \frac{1}{2}bc + \left(4\alpha + \frac{1}{5}\right)c^2.$$

4) On en déduit la matrice

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 1/3 & \frac{1}{4} & 4\alpha + \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

5) Méthode de Gauss :

$$q_\alpha(P) = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{1}{3}c\right)^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{9} - \frac{1}{3}bc + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{2}bc + \left(4\alpha + \frac{1}{5}\right)c^2$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{1}{3}c\right)^2 + \frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{6}bc + \left(4\alpha + \frac{4}{45}\right)c^2$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{1}{3}c\right)^2 + \frac{1}{12}(b+c)^2 + \left(4\alpha + \frac{4}{45} - \frac{1}{12}\right)c^2.$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}(b+c)^2 + \left(4\alpha + \frac{1}{180}\right)c^2.$$

6) On a trois cas :

- si $4\alpha > \frac{-1}{180}$ le rang est 3, la signature $(3,0)$
  (on retrouve que φ_α est un produit scalaire pour $\alpha \geq 0$)
- si $4\alpha = -\frac{1}{180}$ le rang est 2, la signature $(2,0)$
- si $4\alpha < -\frac{1}{180}$, le rang est 3, la signature $(2,1)$.

Base orthogonale :

$$\begin{cases} a' = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \\ b' = b + c \\ c' = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' - \frac{(b'-c')}{2} - \frac{c'}{3} = a' - \frac{b'}{2} + \frac{c'}{6}. \\ b = b' - c' \\ c = c' \end{cases}$$

d'où : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base orthogonale pour tous les α.

ce qui veut dire comme base de V : $1, -\frac{1}{2}+X, \frac{1}{6}-X+X^2$.

7) Nous avons vu à la question 6) : φ_α produit scalaire $\Leftrightarrow$ signature $(3,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha > -\frac{1}{720}$.