CC du 30/03 2018, de 13h30 à 15h30.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables déconnectés du réseau autorisés.

Ce sujet comporte 1 page. Barême donné à titre indicatif et non contractuel.

Les exercices 1 et 2 sont à rédiger sur des copies séparées

---

1. Approximation polynomiale d'une fonction impaire *(10 points)*

On cherche un polynôme $P(t)$ approchant une fonction impaire f, par exemple $f(t) = \sin(t)$, pour la norme L^∞ sur l'intervalle $[-1,1]$ par interpolation. Comme f est une fonction impaire, on choisit des points d'interpolation symétriques par rapport à 0 : $-x_k,..,-x_1,x_1,..,x_k$ ou $-x_k,..,-x_1,0,x_1,...,x_k$.

(1) Montrer que P est impair. Indication : calculer la valeur du polynôme $-P(-x)$ aux points d'interpolation.

(2) En déduire que le polynôme d'interpolation en $2k$ points est encore polynôme d'interpolation en $2k+1$ points.

(3) On pose $f(t) = \sin(t)$, $k = 2$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, déterminer P.

(4) Donner une majoration de l'erreur d'interpolation $P(t) - \sin(t)$ pour $t \in [-1,1]$ en considérant que P est polynôme d'interpolation en les 4 points $-x_2,-x_1,x_1,x_2$. En déduire une majoration de l'erreur d'interpolation indépendante de t valable sur $[-1,1]$.
Même question en 5 points (obtenus en rajoutant 0).

(5) Comparer avec la majoration de l'erreur d'interpolation obtenue en utilisant 5 points de Tchebyshev sur $[-1,1]$.

---

2. Moindres carrés, optimisation quadratique *(10 points)*

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $(t_i,x_i)_{1\leq i\leq N}$ un nuage de points. On cherche à mettre en oeuvre une régression parabolique. Autrement dit, on cherche la parabole d'équation $y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ telle que la somme sur les indices i valant 1 à N du carré de la distance du point (t_i,x_i) au point de même abscisse sur la parabole soit minimale.

(1) Écrire le problème d'optimisation associé.

(2) Écrire ce problème sous la forme

$$\inf_{X\in\mathbb{R}^3} ||MX - k||^2$$

pour une matrice M et un vecteur k que l'on précisera.

(3) Écrire ce problème sous la forme quadratique usuelle

$$\inf_{X\in\mathbb{R}^3} J(X) \,\text{avec}\, J(X) = \frac{1}{2} < AX,X > - < b,X >,$$

avec A définie positive et $b \in \mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

(4) Discuter l'existence d'une solution à ce problème.

(5) Proposez deux approches : l'une directe, l'autre itérative pour identifier les coeffcients optimaux (α,β,γ).