CC du 28 mars 2017, de 15h45 à 17h45.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables déconnectés du réseau autorisés.

Ce sujet comporte 2 pages. Barême donné à titre indicatif et non contractuel.

Les exercices 1 et 2 d'une part et l'exercice 3 d'autre part sont à rédiger sur des copies séparées

---

1. Approximation de l'exponentielle (7 pts)

On interpole la fonction exponentielle sur $[-1,1]$ en $n+1$ points $x_0,...,x_n$ de $[-1,1]$.

(1) Donner une majoration de l'erreur d'interpolation en x fonction de x,n et de $x_0,...,x_n$.

(2) On choisit $x_0,...,x_n$ en les racines du polynôme de Tchebyshev $T_{n+1}(\cos(x)) = \cos((n+1)x)$. Déterminer n pour assurer une erreur absolue inférieure à `1e-10` sur $[-1,1]$. Même question pour avoir une erreur relative inférieure à `1e-10`.

(3) Pour cette valeur de n, déterminer un majorant de l'erreur si on prenait des points $x_0,...,x_n$ équidistribués sur $[-1,1]$. Pour les études d'extremum de fonctions, vous pouvez donner le résultat calculé à la machine à condition d'indiquer les commandes utilisées sur la copie.

(4) Quelle valeur de n faut-il choisir pour obtenir la même précision en approchant l'exponentielle par son développement de Taylor à l'ordre n en $x=0$? Indication : il existe θ entre 0 et x tel que :

$$f(x) = \text{Taylor}_n(x) + e^\theta \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(5) Soit $x \in [1,2]$, on a

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2, \quad \frac{x}{2} \in [0,1]$$

on peut donc approcher e^x en prenant le carré de l'approximation de $e^{x/2}$. Que peut-on alors dire de l'erreur ?

2. Approximation au sens des moindres carrés (3 pts)

On cherche un polynôme du second degré $P(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ approchant le mieux possible au sens des moindres carrés l'exponentielle aux points d'abscisses $t_1 = -1$, $t_2 = -1/2$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1/2$ et $t_5 = 1$.

(1) On pose $x = (\gamma, \beta, \alpha)$ et b le vecteur de composantes $(e^{t_1},...,e^{t_5})$ le problème revient alors à minimiser $\|Ax - b\|_2$. Déterminer la matrice A en fonction des t_i.

(2) Résoudre le problème.

(3) Soit $f(t) = e^t - P(t)$, calculer f' et f'', en déduire le tableau de variations de f' puis donner une majoration de l'erreur $|f(t)|$ sur $[-1,1]$.

---

3. Transformée de Fourier rapide (10 pts) **(à rédiger sur une copie séparée)**

Pour tout entier N, on appelle *transformée de Fourier discrète* l'application de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$ qui envoie le N-uplet $(x_0,\ldots,x_{N-1})$ sur le N-uplet $(X_0,\ldots,X_{N-1})$ défini par

$$\forall j \in \{0,\ldots,N-1\},\ X_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2i\pi}{N}jk}.$$

De façon équivalente, on a

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \ldots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

où $\omega = \omega_N = e^{-\frac{2i\pi}{N}}$. On notera $M_N = \left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1\le j,k\le N}$ la matrice ci-dessus.

(1) Combien d'opérations (additions et multiplications de nombres complexes) faut-il réaliser pour calculer une transformée de Fourier discrète avec les formules ci-dessus ?

(2) Montrer que $M_N^* M_N = N I_N$ où M_N^* est la transposée de la conjuguée de M_N. En déduire la norme et le conditionnement de M_N pour la norme subordonnée à la norme hermitienne de $\mathbb{C}^N$ (on rapelle que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_N(\mathbb{C})$ et pour tout $v \in \mathbb{C}^N$, $\|Av\| = \sqrt{\langle v|A^*Av\rangle}$).

(3) On suppose que le N-uplet $x = (x_0, \ldots, x_{N-1})$ est connue avec une imprécision Δx. On note ΔX l'imprécision sur sa transformée $X = (X_0, \ldots, X_{N-1})$. Montrer que (pour la norme hermitienne) $\|\Delta X\| = \sqrt{N}\|\Delta x\|$ et $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$.

(4) Même si les données sont connues avec précision, l'arrondi en virgule flottante est une source d'erreur que l'on se propose d'estimer.

(a) Donner, en fonction de $(x_1, \ldots, x_N)$ et de la précision des nombres flottants, une majoration de l'erreur absolue causée par les erreurs d'arrondis dans le calcul de la transformée de Fourier discrète.

(b) On suppose pour simplifier que tous les composants de $(x_0, \ldots, x_{N-1})$ sont de module proche de 1, et que ceux de $(X_0, \ldots, X_{N-1})$ sont tous de module proche de $\sqrt{N}$. Estimer l'erreur relative.

Pour accélérer les calculs, particulièrement dans le cas $N = 2^n$, l'algorithme de Cooley-Tukey utilise une stratégie de type "diviser pour régner". On commence par calculer (récursivement) deux transformées de Fourier discrètes de taille moitié : le $N/2$-uplet $(A_0, \ldots, A_{N/2-1})$, transformée des termes d'indice pair $(x_0, x_2, \ldots, x_{N-2})$, et le $N/2$-uplet $(B_0, \ldots, B_{N/2-1})$, transformée des termes d'indice impair $(x_1, x_3, \ldots, x_{N-1})$.

(5) Montrer que pout tout $j \in \{0, \ldots, N-1\}$,

$$X_j = \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{2k}\, e^{-\frac{4i\pi}{N} jk} + e^{-\frac{2i\pi}{N} j} \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{2k+1}\, e^{-\frac{4i\pi}{N} jk}.$$

(6) En déduire que pour tout $j \in \{0, \ldots, N/2-1\}$, $X_j = A_j + e^{-\frac{2i\pi}{N} j} B_j$ et $X_{j+N/2} = A_j - e^{-\frac{2i\pi}{N} j} B_j$ (on fera attention que A_j et B_j ne sont a priori définis que pour $0 \le j \le N/2-1$).

(7) En déduire une méthode de calcul de la transformée de Fourier discrète utilisant seulement $O(n2^n) = O(N\log(N))$ additions et multiplications de nombres complexes.

(8) On s'intéresse à nouveau à l'impact des erreurs d'arrondi.

(a) Pour tout j, on note $\Delta A_j = \hat{A}_j - A_j$, respectivement $\Delta B_j = \hat{B}_j - B_j$ l'erreur (absolue) sur le calcul de A_j, respectivement B_j. Montrer que l'erreur absolue pour le calcul de X_j est majorée en module par $|\Delta A_j| + |\Delta B_j| + \varepsilon(|A_j| + |B_j|)$, où ε est la précision des nombres flottants.

(b) On suppose pour simplifier que tous les composants de $(X_0, \ldots, X_{N-1})$ sont de module proche de $\sqrt{N} = 2^{n/2}$, et que ceux de $(A_0, \ldots, A_{N/2-1})$ et $(B_0, \ldots, B_{N/2-1})$ sont tous de module proche de $\sqrt{N/2} = 2^{(n-1)/2}$. On note u_{n-1} une borne sur l'erreur relative du calcul des A_j et des B_j. Montrer qu'une borne sur l'erreur relative du calcul des X_j est

$$u_n = \sqrt{2}(u_{n-1} + \varepsilon).$$

(c) En déduire que u_n est de l'ordre de $\varepsilon\sqrt{2^n}$ (indication : on pourra utiliser la commande `rsolve`). Comment ce résultat se compare-t-il à celui de la question 4 ?

Question bonus : Une multiplication de deux nombres complexes stockés sous forme algébrique revient à faire 4 multiplications réelles, à moins que l'un des facteurs ne soit réel ou imaginaire pur. Pour simplifier les calculs, Rader et Brenner ont proposé de remplacer $(B_0, \ldots, B_{N/2-1})$ par $(C_0, \ldots, C_{N/2-1})$, transformée de Fourier discrète de $(x_1 - x_{N-1} - Q, x_3 - x_1 - Q, \ldots, x_{N-1} - x_{N-3} - Q)$ avec $Q = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k+1}$. On obtient alors les formules suivantes, que l'on ne demande pas de justifier :

$$X_0 = A_0 + C_0, \quad X_{N/2} = A_0 - C_0, \quad \text{et pour tout } j \neq 0, N/2,\ X_j = A_j + \frac{C_j}{2i\sin(\frac{2\pi}{N} j)}$$

(9) Expliquer pourquoi cette méthode n'est pas satisfaisante en terme de stabilité numérique.