Examen du 18 juin 2014, de 9h à 12h.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables déconnectés du réseau autorisés. Ce sujet comporte 2 pages. Barème donné à titre indicatif et non contractuel.

1. Méthode de la puissance (5 points)

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -121 \\ 1 & 0 & 5 \\ -121 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

(1) Prendre un vecteur aléatoire v à coordonnées dans l'intervalle $[0,1]$, lui appliquer 29 et 30 fois la matrice, en déduire une estimation λ de la valeur propre l de M qui est la plus grande en module.

(2) Soit A une matrice de taille n qui admet une base orthonormale de vecteurs propres. On suppose qu'on a déterminé (par la méthode de la puissance) un vecteur normé v et une constante λ tels que $\|Av - \lambda v\| < \varepsilon$. Soit $(v_1, ..., v_n)$ les coordonnées de v dans la base propre orthonormale de A associée aux valeurs propres $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Calculer $\|Av - \lambda v\|$, en déduire que l'une des valeurs propres au moins vérifie $|\lambda_k - \lambda| < \varepsilon$.

(3) Peut-on appliquer le résultat du (2) à M ? Donner un encadrement de l (justifier).

(4) Proposer une méthode permettant de calculer numériquement les autres valeurs propres de M.

2. Système linéaire (2 points)

Soit M la matrice de l'exercice 1 et $b = (1,2,3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ connu avec une précision relative de `1e-4` pour la norme euclidienne. Donner la solution x du système linéaire $Ax = b$ en arrondissant à la précision adéquate (on justifiera).

3. Méthode itérative : 6 points

On définit sur l'intervalle $[2,3]$ la fonction f par $f(x) = \cos(x) + 2x - \exp(x)$ et on cherche à résoudre $f(x) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

(1) Déterminer les valeurs de λ telles que l'équation $f(x) = \lambda$ admette une solution unique sur $[2,3]$.

(2) On réécrit l'équation sous la forme $x = \frac{1}{2}(\lambda + \exp(x) - \cos(x))$, peut-on appliquer la méthode du point fixe pour la résoudre ? Si oui, donner (et justifier !) un encadrement de la solution à `1e-4` près par cette méthode pour $\lambda = -10$.

(3) Donner une suite itérative (u_n) convergeant vers la solution en utilisant la méthode de Newton, justifier la convergence pour la valeur de u_0 choisie. Déterminer la solution de l'équation $f(x) = -10$ avec une précision de `1e-8`.

(4) Écrire une fonction Xcas prenant en argument λ et renvoyant une valeur approchée de la solution à `1e-8` près de l'équation $f(x) = \lambda$ par une méthode itérative de votre choix.

4. Méthode des trapèzes et polynômes trigonométriques (6 points)

Étant donné une fonction continue $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, on note $I(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$ son intégrale sur $[0,2\pi]$ et $\mathrm{Trap}_N(f)$ la valeur approchée de $I(f)$ par la méthode des trapèzes avec un pas constant $h = 2\pi/N$, où $N > 0$ est un entier.

(1) Soit f un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à $N-1$, de la forme

$$f(x) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

avec $c_k \in \mathbb{C}$, $c_{-k} = \overline{c}_k$, $k = -N+1, \ldots, N-1$. Montrer que $\mathrm{Trap}_N(f)$ donne le résultat exact pour l'intégrale $I(f)$.

(2) On considère la fonction $g(x) = \exp(\sin x)$. En utilisant la question 1 et le développement de l'exponentielle en 0, montrer que l'erreur $E(g) = |I(g) - \mathrm{Trap}_N(g)|$ est majorée par $c/N!$, où c est une constante que vous déterminerez.

(3) Déterminez à l'aide de Xcas l'augmentation de la précision avec h quand on divise h par deux (vous pourrez par exemple utiliser votre programme pour la méthode des trapèzes réalisé en TP). Comparez cette précision avec celles obtenues par les méthodes des rectangles à gauche et à droite. Pouvez-vous expliquer les similitudes/différences des résultats obtenus par ces trois méthodes ?

5. Ordres des méthodes de Runge-Kutta (5 points)

On considère une méthode de Runge-Kutta pour résoudre l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t), t)$ sur l'intervalle $[0,1]$, donnée par le tableau de coefficients

$$\begin{array}{l|llllll}
c_0 = 0 & 0 & & & & \\
c_1 & \lambda_{10} & 0 & & & \\
c_2 & \lambda_{20} & \lambda_{21} & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
c_q & \lambda_{q0} & \lambda_{q1} & \cdots & \lambda_{q\,q-1} & 0 \\
\hline
1 & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{q-1} & \mu_q
\end{array}$$

On a donc $z_{n+1} = z_n + h\Phi(z_n, t_n, h)$ où h est le pas (supposé constant), $z_0 = y(0)$, $t_n = nh$ et

$$\Phi(z,t,h) = \sum_{i=0}^{q} \mu_i f(z_{n,i}, t + hc_i)$$

avec

$$z_{n,0} = z \ \text{ et } \ z_{n,i} = z + h \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{ij} f(z_{n,j}, t + hc_j)\ ,\ i = 1, \ldots, q\ .$$

On note p l'ordre de la méthode. On rappelle que $p > 0$.

(1) Supposons que $f(y,t) = f(t)$ soit indépendante de y. On calcule l'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ en résolvant l'équation différentielle ci-dessus avec la condition initiale $y(0) = 0$ par la méthode de Runge Kutta RK4. Cela correspond-t-il à une méthode d'intégration numérique connue, si oui laquelle ? Vous justifierez votre réponse.

(2) En utilisant un résultat général du cours sur l'ordre des méthodes à un pas, appliqué à une fonction $f(y,t) = f(t)$ indépendante de y, montrer que pour q quelconque l'on a

$$\sum_{i=0}^{q} \mu_i c_i^l = \frac{1}{l+1} \quad \text{pour} \quad l = 0, \ldots, p-1\ .$$

(3) En déduire que la méthode d'intégration numérique

$$\int_0^1 g(u)\mathrm{d}u \simeq \sum_{i=0}^{q} \mu_i g(c_i)$$

est d'ordre au moins $p-1$.

(4) On rappelle qu'une méthode d'intégration numérique élémentaire à m points d'interpolation est toujours d'ordre strictement inférieur à $2m$ (voir l'exercice 2 de la feuille 7 de TD/TP). En déduire une majoration de p en fonction de q.