CC du 19 mars 2014, de 13h à 15h.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables (netbooks) déconnectés du réseau autorisés.

Ce sujet comporte 2 pages. Barème donné à titre indicatif et non contractuel.

1. Interpolation et conditonnement (12pts)

On connait la valeur d'une fonction en $n+1$ points d'abscisse $x_0,...,x_n$ et on cherche le polynôme d'interpolation en ces $n+1$ points de deux manières : par la méthode des différences divisées ou comme solution du système linéaire $P(x_i) = y_i$ où les inconnues sont les coefficients $a_0,..,a_n$ du polynôme $P(x) = a_n x^n + .. + a_0$.

(1) Montrer que le système linéaire est de la forme $Ma = y$ où M est la matrice de Vandermonde de $x_0,...,x_n$ (`vandermonde` dans Xcas).

(2) Résoudre avec Xcas ce système pour

$$n = 5,\ x_0 = -1, x_1 = -1 + \frac{2}{n}, ..., x_k = -1 + \frac{2k}{n}, ..., x_n = 1$$

et $y_k = f(x_k) = 1/(1+x_k^2)$. Comparer avec la solution P_5 renvoyée par les différences divisées.

(3) Donner une majoration de l'erreur d'interpolation entre $f(x) = 1/(1+x^2)$ et $P_5(x)$ sur $[-1,1]$ (Indication, utiliser `diff(f,x,k)` pour calculer la dérivée k-ième de l'expression `f` et `proot(diff(numer(),x))` pour trouver les racines approchées de la dérivée du numérateur). En déduire une majoration de l'erreur $\int_{-1}^{1} |f(x) - P(x)|\, dx$ puis un encadrement de π.

(4) Déterminer en fonction de n un équivalent du nombre d'opérations pour résoudre le système $Ma = y$, en indiquant rapidement la méthode utilisée. Comparer avec l'algorithme des différences divisées lorsque n est grand.

(5) Calculer le nombre de condition de M pour $n = 5, 10, 20$ subordonné à la norme 1 ($\|y\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |y_i|$) lorsque $x_0 = -1, x_1 = -1 + 2/n, ..., x_k = -1 + 2k/n, x_n = 1$. On suppose qu'on connait le vecteur $y = (y_0, ..., y_n)$ avec une précision relative de `1e-16` relativement à la norme 1, que peut-on dire de la précision relative de $a = (a_n, ..., a_0)$?

2. Méthode de Newton (12pts).

Soit A une matrice carrée de taille m à coefficients réels. On suppose que A est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont réelles positives, on a donc

$$A = PDP^{-1}$$

avec D=`diag`$(d_1, ..., d_m)$ (matrice diagonale avec $d_1, ..., d_n$ sur la diagonale). On appellera racine carrée de D la matrice diagonale

$$\sqrt{D}=\texttt{diag}(\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_m})$$

et racine carrée de A la matrice $\sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$. Le but de l'exercice est de calculer $\sqrt{A}$ sans calculer P en appliquant la méthode de Newton pour résoudre $x^2 = A$.

(1) Expliciter la méthode de Newton pour trouver $\sqrt{d}$ lorsque d est un réel positif. Montrer que la méthode converge lorsqu'on prend $u_0 = (1+d)/2$. Calculer les premiers termes de la suite pour $d = 220.121151781$ et pour $d = 8011.87884822$. Combien de termes faut-il pour stabiliser la suite avec 12 chiffres significatifs ?

(2) Soient les suites de matrices (U_n) et (V_n) définies par :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{1}{2}(U_n + AU_n^{-1}), \quad U_0 = (I_m + A)/2, \\ V_n &= P^{-1} U_n P \end{aligned}$$

Déterminer V_0 et la relation de récurrence entre V_{n+1} et V_n.

(3) En déduire que la suite V_n est une suite de matrices diagonales qui converge vers $\sqrt{D}$.

(4) Montrer que U_n est convergente et calculer sa limite.

(5) Calculer le 19ième et 20ième terme en mode approché de la suite U_n pour

$$A = \begin{pmatrix} 7780. & -1324. \\ -1324. & 452. \end{pmatrix}$$

Comparer la vitesse de stabilisation avec celle des suites scalaires pour trouver $\sqrt{d_1}$ et $\sqrt{d_2}$.

(6) Soit $f(X) = X^2 - A$ définie pour X matrice carrée de taille m, développer

$$f(X+H) - f(X)$$

et en déduire que la différentielle de f en X appliquée à H vaut $XH + HX$.

(7) Donner la suite de la méthode de Newton qui permet de résoudre $X^2 = A$. Expliciter cette suite en supposant que tous les termes de la suite commutent entre eux. Montrer que c'est le cas de la suite (U_n) définie à la question 2 si $U_0 = (I_m + A)/2$ et qu'on effectue les calculs exactement (indication : montrer que tous les termes de la suite sont des matrices fractions rationnelles en A).

(8) Expliquer pourquoi la précision est mauvaise à la question 5, comment faudrait-t-il modifier la récurrence pour améliorer la précision ?