Exercice 1. On veut illustrer le fait que pour une méthode d'ordre n et une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, il existe une constante C telle que l'erreur E_N de la méthode pour N subdivisions est $\leq \frac{C}{N^{n+1}}$. On prend $f = \cos$ et on approche $\int_0^2 \cos(x)dx = \sin(2)$ par la méthode des trapèzes et de Simpson.
Calculer l'erreur E_N pour $N \in \{2, 2^2, \ldots, 2^{10}\}$ pour les méthodes des trapèzes et de Simpson et représenter graphiquement $(\log(N), -\log(E_N))_{N\in\{2,2^2,\ldots,2^{10}\}}$ (avec Xcas, on pourra utiliser les instructions `scatterplot` et `linear_regression_plot`). Commenter ce que vous obtenez. Pour la méthode de Simpson avec Xcas, testez en calculant avec 20 chiffres de précision et expliquez la différence avec 14 chiffres.
Même question pour $\int_0^3 \cos(x)e^{\sin(x)}$.

Exercice 2. On souhaite approcher par la méthode de Simpson :

$$K = \int_0^{\pi/2} f(x)\ dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin(x)^2}}$$

1. (a) Calculer et simplifier la dérivée d'ordre 4 f_4 de f (faire les calculs à la machine).
   (b) Conjecturer un majorant de $|f_4|$ sur $[0, \pi/2]$ à l'aide d'une représentation graphique de f_4 sur cet intervalle. On notera M_4 ce majorant.
   (c) Calculer et simplifier la dérivée 5-ième de f, montrer que f_5 s'annule si et seulement si $x = 0, \pi/2$ ou si $\cos(x)$ est racine du polynôme P de degré 8 que l'on déterminera
   (d) Déterminer une valeur approchée des racines de P sur $[0, 1]$ (par exemple à l'aide de `solve`) puis donner une valeur approchée du(des) x correspondant(s).
   (e) Calculer $f_4(0)$, $f_4(\pi/2)$ et $f_4(x)$ pour ces racines, en déduire une preuve de la majoration de $|f_4|$ par M_4.
2. Combien de subdivisions faut-il pour être sur que la méthode de Simpson renvoie $\tilde{K}$ une valeur approchée de K avec une précision inférieure à `1e-8` ? Calculer $\tilde{K}$.

Exercice 3. On s'intéresse à une formule de quadrature obtenue en interpolant sur une subdivision élémentaire $[\alpha, \alpha + h]$ en 5 points régulièrement répartis :

$$I(f) = \sum_{i=0}^{4} w_i f(x_i), \quad x_i = \alpha + \frac{ih}{4}$$

1. Calculer les coefficients w_i par une ou plusieurs méthodes :
   — On considère le polynôme d'interpolation P en les (x_i, y_i). Déterminer avec un logiciel de calcul formel la valeur de `int(P,x,a,a+h)`
   — Calculer la valeur de $I(1), I(x), I(x^2), I(x^3), I(x^4)$, en déduire un système linéaire vérifié par les w_i, le résoudre.
   — Calculer $\int_\alpha^{\alpha+h} \prod_{j\neq k}(x - (\alpha + hj/4))$ pour $k = 0, 1, 2$.
   En déduire la formule de quadrature $I(f)$ sur $[a, b]$ de pas $h = (b - a)/N$.
2. Ordre et erreur :
   Déterminer le plus petit n tel que la formule d'intégration ne soit plus exacte pour x^n et en déduire l'ordre de cette formule. Donner une majoration de l'erreur pour f suffisamment régulière. Appliquer à $f(x) = \exp(-x^2)$ sur $[0, 2]$ pour déterminer une valeur approchée à `1e-10` près de l'intégrale (justifier le nombre de subdivisions N à prendre).

Exercice 4. On utilise la méthode d'intégration suivante sur une subdivision $[\alpha, \beta]$ (par interpolation en 2 points bien choisis) :

$$I(f) = (\beta - \alpha)\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1+\sqrt{1/3}}{2}\alpha + \frac{1-\sqrt{1/3}}{2}\beta\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1-\sqrt{1/3}}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{1/3}}{2}\beta\right)\right)$$

1. Déterminer l'ordre de cette méthode, en déduire une majoration de l'erreur.
2. Programmer le calcul de $\int_a^b f(t)\ dt$ en découpant l'intervalle $[a, b]$ en N subdivisions.
3. Déterminer N pour avoir une valeur approchée de l'intégrale à `1e-8` prés pour $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $a = 0$ et $b = 1$.
4. Expliquez le choix des points d'interpolation.
5. Donner une formule d'ordre maximal qui évalue f en 7 points par subdivisions.

Exercice 5. Programmez et testez l'accélération de Richardson-Romberg, en partant de la formule des trapèzes (ou du point milieu).

Exercice 6.
1. Déterminer une méthode d'intégration sur $[-1, 1]$ d'ordre 9 en interpolant en 5 points. Comparer avec l'ordre de la méthode obtenue si on prend 5 points équirépartis.
2. Donner une majoration de l'erreur pour ces deux méthode sur $[-1, 1]$ puis sur $[\alpha, \beta]$.
3. Programmer cette méthode pour calculer $\int_a^b f(t)\ dt$ en découpant l'intervalle $[a, b]$ en N subdivisions.
4. Déterminer N pour avoir une valeur approchée de l'intégrale à `1e-12` prés pour $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $a = 0$ et $b = 1$.

Exercice 7. Programmez une méthode d'intégration numérique à pas variable en utilisant deux méthodes d'intégration, et en estimant l'erreur de la méthode d'ordre le plus faible par la différence entre les deux méthodes. Par exemple, on pourra prendre Simpson et une méthode de Newton-Cotes en 5 points (méthode emboitées).

Exercice 8. Fonction périodique et formule des trapèzes.
Soit $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.

1. Calculer $I(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\ dx$. Calculer $T_N(f)$, la valeur obtenue en approchant $I(f)$ par la méthode des trapèzes pour N subdivisions (pas de $h = 2\pi/N$). En déduire que pour $N > m$, alors $I = T_N(f)$.
2. Si f est périodique et de classe $C^j, j > 2$, que peut-on dire de la décroissance de ses coefficients de Fourier ? En déduire que la méthode des trapèzes approche $I(f)$ avec une erreur en $O(N^{1-j})$.
3. Essayez de faire la même chose pour une méthode d'ordre plus élevé. Quelle méthode d'intégration semble judicieuse pour intégrer une fonction périodique ?

Exercice 9. Quadrature de type gaussien
On considère le produit scalaire

$$< f|g >= \int_1^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}\ dx$$

Construire les 4 premiers polynômes orthogonaux pour ce produit scalaire, puis une formule d'intégration pour $\int f(t)e^{-t}\ dt$ qui soit exacte pour les polynômes de degré plus petit que 7. Tester avec $t^5, t^6, e^{t/2}$.

Exercice 10. Proposer une méthode permettant de calculer avec une erreur d'au plus `1e-4` la valeur de $\int_{0.5}^{+\infty} e^{-t^3}\ dt$.