Exercice 1. Appliquer la méthode de Gauss pour résoudre le système $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Cette méthode paraît-elle judicieuse quand ε est petit ? Que se passe-t-il si l'on effectue cette méthode avec une machine qui travaille avec une précision de ε ?
2. Comparer avec le système obtenu en intervertissant les deux équations du système.

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

1. Détailler étape par étape le calcul de la décomposition LU des matrices A et B
2. Calculer le déterminant de B à l'aide de cette décomposition.
3. Résoudre $Bx = (1, 2, 3)$ en utilisant la décomposition LU.
4. Calculer l'inverse de B en résolvant 3 systèmes linéaires avec la décomposition LU.

Exercice 3. Soit α un paramètre réel. On considère la matrice

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

1. Pour quels α la matrice $A(\alpha)$ admet-elle une factorisation LU ?
2. Déterminer la factorisation LU de $A(1)$ à l'aide de la commande Xcas `lu`. Interpréter le résultat de la commande `lu` appliquée à $A(0)$.

Exercice 4.

1. Entrer une matrice aléatoire A de taille 5x5 et un vecteur aléatoire b de taille 5x1 (préciser la loi des coefficients de A et b, commandes `ranm` et `ranv`)
2. Calculer le carré de A. Calculer aussi le produit de Hadamard de A avec A, c'est à dire la matrice dont le coefficient (i, j) est $A_{i,j}^2$.
3. Inverser numériquement A.
4. Trouver et exécuter la commande Xcas pour résoudre le système linéaire $Ax = b$. On notera c le résultat numérique.
5. Calculer la norme L_2 de $\|Ac - b\|$.

Exercice 5. Mesurer le temps de calcul par Xcas de la factorisation LU d'une matrice aléatoire à coefficients approchés 10x10, 100x100, 200 x 200, etc.... Comparer avec le résultat théorique du cours.

Exercice 6. Donner l'ordre de grandeur du nombre d'opérations nécessaires pour calculer le déterminant et l'inverse d'une matrice A de taille $n \times n$ grâce aux formules

$$\text{dét}(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}(A)} \, {}^t\text{com}(A) .$$

Même question mais en utilisant la décomposition $A = LU$ (méthode de Gauss).
Un ordinateur standard effectue de l'ordre de 10^{10} opérations par secondes (10 gigaflops). Comparer les temps nécessaires dans le cas d'une matrice 100×100.

Exercice 7. Calculer le déterminant de la matrice de Hilbert de taille 50 puis 100 de manière numérique et de manière exacte. Comparer les résultats et temps de calcul.
Pour quelques matrices M aléatoires de taille 100, 200, 300, calculez le déterminant de M, comparez avec la borne de Hadamard de M (produit des normes des vecteurs colonnes). Qu'observe-t-on ?

Exercice 8. Décomposition de Cholesky.
Soit A une matrice hermitienne définie positive. Il existe une unique matrice triangulaire supérieure C qui a des éléments diagonaux strictement positifs telle que $A = C^*C$ (décomposition de Cholesky).
1) Donner l'algorithme qui permet de calculer C. L'appliquer à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 13 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Cet algorithme est-il appliquable à des matrices non hermitiennes ?
2) Expliquer comment utiliser la décomposition de Cholesky pour résoudre le système $Ax = b$ et donner le nombre d'opérations.
3) Une matrice $A = (a_{ij})$ est appelée $p-$bande si $a_{ij} = 0$ dès que $|i - j| \geq p$.
a) Donner des exemples de matrices $p-$bandes.
b) Montrer que si A est une matrice hermitienne définie positive $p-$bande, alors C est aussi $p-$bande.
Pour $p = 1$, compter le nombre d'opérations nécessaires pour trouver C.

Exercice 9. Ecrire un programme calculant l'inverse d'une matrice en utilisant l'une des décompositions.

Exercice 10. On souhaite résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} .$$

1. Montrer que A admet une base orthonormale de vecteurs propres dont on donnera les valeurs propres.
2. Expliciter la résolution de l'équation $Ax = b$ en fonction des éléments propres.
3. Résoudre le système $Ax = b$ avec $b = (1, 1)$. On a en fait une petite erreur sur b qui est donné par Δb avec $\|\Delta b\|/\|b\|$ de l'ordre de $0,01$. On a donc une erreur Δx sur x donnée par $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Montrer que l'erreur relative $\|\Delta x\|/\|x\|$ peut être de l'ordre de 20.

Exercice 11. On considère le système $Ax = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Les données A et b sont imprécises. On a donc en réalité le système linéaire

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b .$$

Etant donnée une norme subordonnée (par exemple L^2), on définit le conditionnement de la matrice A par $\kappa(A) = |||A|||.|||A^{-1}|||$.

1. Montrer que si $\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||} < \frac{1}{\kappa(A)}$, on a

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||} \right)$$

Indication : on a

$$\Delta x = A^{-1}(\Delta A(x + \Delta x) + \Delta b)$$

2. Montrer que le conditionnement de A est minoré par le rapport $|\lambda_n/\lambda_1|$, où λ_n et λ_1 sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre en module. Expliquer l'exercice précédent du point de vue du conditionnement.
3. Montrer que le conditionnement d'une matrice unitaire est 1 pour la norme L^2. C'est pour cette raison que l'on utilise des matrices unitaires dans des algorithmes itératifs, on garantit ainsi la stabilité numérique.

Exercice 12. On cherche à résoudre le système $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la solution exacte x du système. Quelle différence y-a-t-il entre `linsolve(A,b)` et $\texttt{inv}(A) * b$?
2. Calculer la solution y du système perturbé $(A + \Delta A)y = b$ avec

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix}$$

On note $\Delta x = y - x$. Déterminer le coefficient d'amplification d'erreur :

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x + \Delta x\|_2} \times \left(\frac{|||\Delta A|||_2}{|||A|||_2} \right)^{-1}$$

et de même en échangeant le rôle de x et y et de A et $A + \Delta A$. Dans cette expression la norme $\|u\|_2$ d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$ et celle d'une matrice A correspond à celle de l'application linéaire associée. Elles se calculent par la commande `l2norm()` pour un vecteur et avec `matrix_norm()` pour une matrice.

3. Calculer la solution du système perturbé $Az = b + \Delta b$ avec

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix}.$$

On note $\Delta x = z - x$. Déterminer le coefficient d'amplification d'erreur :

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \times \left(\frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \right)^{-1}$$

Que remarquez vous ? On pourra calculer la solution exacte du système perturbé pour éliminer tout risque d'erreur d'arrondi.

4. Faire la résolution du système approché en utilisant la décomposition QR de A.

5. Calculer le conditionnement en norme $\|\ \|_2$ de la matrice A : $\kappa_2(A) = |||A|||_2.|||A^{-1}|||_2$. Retrouver ce résultat avec la commande `COND(.,2)`. Comparer conditionnement et erreurs relatives. Montrer que

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x + \Delta x\|_2} \times \frac{|||A|||_2}{|||\Delta A|||_2} \leq \kappa_2(A) \quad \text{et} \quad \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \times \frac{\|b\|_2}{\|\Delta b\|_2} \leq \kappa_2(A)$$

6. Calculer les valeurs propres de A avec la commande `egvl`. Calculer le rapport $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ des valeurs propres de A.
7. Montrer que le conditionnement d'une matrice normale est le rapport entre sa plus grande et sa plus petite valeur propre (en valeur absolue).
8. Refaire les calculs ci-dessus avec une autre norme, par exemple L^1.

Exercice 13. Méthode QR et Cholesky. Soit $A = QR$ est la décomposition QR de A où R est normalisé pour avoir tous ses coefficients diagonaux positifs. Calculer A^*A, en déduire sa décomposition de Cholesky. Appliquer ce résultat pour déterminer la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} .$$

en prenant A à coefficients flottants, puis calculer QQ^*. Comparer avec la méthode de Givens. Conclusion ?