Université Grenoble Alpes Année 2021-2022
Module MAT 307

Examen terminal de janvier 2022

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée. Calculatrices autorisées

Durée 2h

NB : dans les représentations graphiques, il faudra indiquer le sens de parcours, les tangentes remarquables (horizontales/verticales/points singuliers pour les courbes paramétrées, ou portées par $\vec{e}_r/\vec{e}_\theta$ pour les courbes polaires) et quelques points remarquables (avec le t ou θ associé).

Exercice 1 –[*14 points*]

On considère la courbe C paramétrée par $t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 + \dfrac{2}{t} \\ t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminez le domaine de définition et le domaine d'étude.
2. La courbe admet-elle des asymptotes ? Si oui, lesquelles ?
3. Etudiez les variations.
4. Y a t-il des points singuliers ? Si oui, donnez en la nature.
5. A l'aide de la calculatrice, étudiez le changement de convexité.
6. Tracez la courbe.
7. Montrer qu'il y a deux paramètres $t_1 < t_2 < 0$ tels que $y(t_1) = y(t_2) = \dfrac{5}{2}$. Donnez leurs valeurs.
8. Écrivez la longueur de l'arc de courbe entre t_1 et t_2. Donnez en une valeur approchée.
9. Donnez le repère de Frenet et le cercle osculateur au point $t = -1$ et rajoutez les sur le tracé de la courbe.
10. Quelle est l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe entre t_1 et t_2 et la droite horizontale d'équation $y = \dfrac{5}{2}$? Ecrivez cette aire sous la forme d'une intégrale. Donnez en une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

T.S.V.P

Exercice 2– [*10 points*] *Trajectoire lumineuse dans un matériel avec indice de réfraction*

Dans un espace à deux dimensions (x, y), on considère un milieu d'indice de réfraction $n(y)$ sur une bande $x \in [0, \ell]$.

La vitesse du rayon lumineux est liée à l'indice de réfraction : $\|\vec{v}\| = \dfrac{c}{n(y)}$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Avec un laser, on émet un rayon en $(0, 0)$ dans la direction oblique $(1, 1)$. On paramètre la trajectoire du rayon par $\gamma(x) = (x, y(x))$ et on cherche l'expression de $y(x)$.

1. Pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ fixé, on considère l'équation différentielle suivante pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} g'(x) = \lambda\sqrt{2}\sqrt{g^2(x) - 1} \\ g(0) = \sqrt{2}. \end{cases}$$

   (a) Donner la nature de (E) (dimension, ordre, linéaire ou non).

   (b) Est ce que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, et si oui, que dit il ?

   (c) Y-a-t-il des solutions stationnaires ? Si oui, lesquelles.

   (d) Pour toute constante $C \in \mathbb{R}^+$, on définit la fonction $g_C(x) = \cosh\Big(\lambda\sqrt{2}(x + C)\Big)$. Comparez $g_C'(x)$ et $\sqrt{g_C^2(x) - 1}$ pour tout $x \geq -C$. *(Rappel :* $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *vérifie* $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ *où* $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh'(x)$)

   (e) Comparer la valeur de $g_C(-C)$ à la réponse de la question 1-c. Commentez par rapport au théorème de Cauchy-Lipschitz.

   (f) Vérifiez qu'il existe une unique constante $C > 0$ telle que $g_C(0) = \sqrt{2}$. En déduire la solution et l'intervalle maximal annoncés par la question 1-b.

2. Par le principe de moindre action, le rayon minimise le temps pour sortir de la bande :

$$T = \int_{x=0}^{x=\ell} dt(x) = \int_{x=0}^{x=\ell} \frac{ds(x)}{\|\vec{v}(x)\|} = \int_0^\ell \frac{n(y(x))}{c}\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx.$$

   Ainsi, T joue le rôle de l'action tandis que x joue le rôle du temps.

   (a) Ecrivez le lagrangien $L(y, \dot{y}, x)$ et l'hamiltonien $H(x)$ associés à ce problème de minimisation.

   (b) En justifiant la conservation de l'hamiltonien et que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, montrer que $y'(x)^2 = 2\Big(\dfrac{n(y(x))}{n(0)}\Big)^2 - 1$.

   (c) A partir de maintenant, nous allons considérer des indices linéaires : $n(y) = n_0(1 + \lambda y)$ ($n_0, \lambda \in \mathbb{R}^+$ fixés), et supposons que ℓ est assez petit pour que $y(x), y'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \ell[$. En posant $g(x) = \sqrt{2}\Big(1 + \lambda y(x)\Big)$, montrez que g est solution de l'équation (E).

   (d) Pour la constante C trouvée en 1-f, donnez l'expression de $y(x)$ et vérifiez que l'on a bien $y'(0) = 1$. Y-a-t-il vraiment besoin de supposer ℓ petit ?