

Partiel d'octobre 2023

Calculatrice et feuille recto-verso A_4 manuscrite autorisées.

Ce sujet comporte deux exercices sur les pages 1 et 2 du sujet. Vous pouvez utiliser les pages 3 et 4 pour les représentations graphiques, n'oubliez pas de les détacher et de les rendre avec votre copie.

Barème indicatif : 10/10

Exercice 1 :

On considère la courbe C paramétrée $t \mapsto (x(t), y(t))$ où

$$\begin{cases} x(t) = \tan(t) + \sin(t) \\ y(t) = \frac{1}{\cos(t)} \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition de C et montrer que l'on peut restreindre l'étude de C à l'intervalle $[0, \pi]$.
2. La courbe admet-elle des asymptotes. Si oui lesquelles ?
3. Exprimer $x'(t)$ en fonction de $\cos(t)$.
4. Faire un double tableau de variation.
5. Vérifier que la courbe admet un unique point singulier. Donner un vecteur directeur pour la tangente en ce point singulier et décrire la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de ce point.
6. A l'aide de la calculatrice trouver le(s) point(s) où la courbe change de convexité. Détailler les commandes utilisées. Donner une valeur approchée d'un vecteur tangent à la courbe en ce(s) point(s).
7. Tracer la courbe et indiquer le sens de parcours.
8. Quel est le centre du cercle osculateur au point de paramètre 0 ? Tracer le cercle sur le dessin de la courbe.

Exercice 2 :

Soit C la courbe du plan donnée par l'équation polaire $r(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

1. Montrer que la courbe C est entièrement contenue dans le disque unité.
2. Vérifier que la fonction r est périodique de période 4π . Calculer $r(\theta + 2\pi)$ et $r(-\theta)$. En déduire que l'on peut restreindre l'étude de la courbe C à l'intervalle $[0, \pi]$ et expliquer comment on complète le morceau de courbe obtenu lorsque θ varie entre 0 et π pour obtenir la courbe C toute entière.
3. Faire le tableau de variation de la fonction r sur $[0, \pi]$.
4. Calculer un vecteur tangent à la courbe C en chacun des points de paramètre $\theta = 0$, $\theta = \pi$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.
5. Tracer la courbe C .
6. Calculer le rayon de courbure de C au point de paramètre $\theta = 0$, ainsi que les coordonnées du centre du cercle osculateur en ce point.
7. Ecrire sous la forme d'une intégrale définie la longueur de la courbe C . Donner une valeur approchée de cette intégrale, obtenue à l'aide de la calculatrice (préciser la commande utilisée).
8. Bonus : Dans cette question on considère, pour $a \geq 0$, la courbe C_a donnée par l'équation polaire $r(\theta) = a + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Pour quelle(s) valeur(s) de a la courbe C_a admet-elle un point singulier ?



