Université Grenoble Alpes **Année** 2018-2019
Module MAT 307

Corrigé examen terminal du 26 Juin 2019

Exercice 1

On pose $f(t) = (x(t), y(t))$.

1. x et y sont définies sur $\mathbb{R}^*$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

   - $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$. Pour $t > 0$ on a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t + \dfrac{2b}{t^2}}{2 + \dfrac{a}{t^3}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
     Il y a donc une <u>branche parabolique de direction (Oy)</u> en $t = +\infty$.
   - Une étude similaire en $t = -\infty$ produit la même conclusion.
   - $\lim\limits_{t\to0} x(t) = \lim\limits_{t\to0^+} y(t) = -\lim\limits_{t\to0^-} y(t) = +\infty$. Pour $t \neq 0$ on a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^4 + 2bt}{2t^3 + a} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0$.
     Il y a donc une <u>branche parabolique de direction (Ox)</u> en $t = 0$.

2. Un point de rebroussement est un point singulier. En un tel point s on doit donc avoir

$$x'(s) = y'(s) = 0,$$

   c'est-à-dire $2\left(1 - \dfrac{a}{s^3}\right) = 2\left(s - \dfrac{b}{s^2}\right) = 0$, d'où $s = a^{\frac{1}{3}}$ et <u>$a = b$</u>.
   Lorsque $a = b$, on a

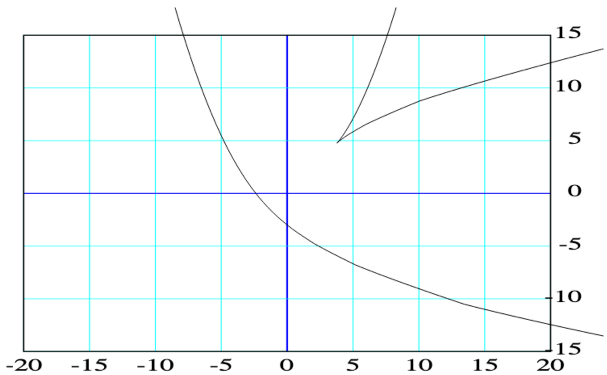
$$x''\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = 6a^{-\frac{1}{3}},\ y''\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = 6,$$

$$x'''\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = -24a^{-\frac{2}{3}},\ y'''\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = -12a^{-\frac{1}{3}},$$

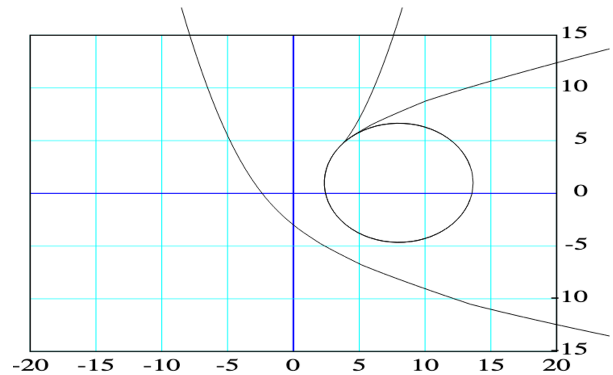
   en particulier on remarque que $\dfrac{x''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)}{x'''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)} \neq \dfrac{y''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)}{y'''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)}$, donc les vecteurs $f''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ et $f'''\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Ainsi le point de paramètre $t = a^{\frac{1}{3}}$ est un point de rebroussement de seconde espèce.

3. $x'(t) = 2\left(1 - \dfrac{2}{t^3}\right)$, $y'(t) = tx'(t)$. En particulier $x'y'' - x''y' = x'^2 \geq 0$ (avec égalité si et seulement si $t = 2^{\frac{1}{3}}$), donc la courbe ne change pas de convexité. Son tableau de variations est le suivant:

t	$-\infty$		0		$2^{1/3}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$3 \times 2^{1/3}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$3 \times 2^{2/3}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	



Tracé de la courbe



Courbe avec cercle osculateur

4. On calcule $\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{T}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{N}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On calcule de plus $\vec{a}(1) = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$ ce qui donne $a_N(1) = \vec{a}(1) \cdot \vec{N}(1) = \sqrt{2}$ et donc un rayon signé $R = \frac{\|\vec{v}(1)}{a_N(1)} = 4\sqrt{2}$. On calcule finalement $C(1) = M(1) + R\vec{N}(1) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le cercle osculateur est donc le cercle de centre $C(1)$ et de rayon $4\sqrt{2}$.

5. Appelons ℓ la longueur d'arc recherchée. On a :

$$\begin{aligned} \ell &= \int_2^{2.5} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \quad \text{d'après le cours} \\ &= \int_2^{2.5} 2 \left| 1 - \frac{2}{t^3} \right| \sqrt{1+t^2}\, dt \quad \text{voir le début de la réponse 3.} \\ &\approx 2.02 \quad \text{(calculatrice).} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Les solutions stationnaires vérifient $x' = y' = 0$, donc x et y sont constantes (que l'on note encore x et y). Ici cela conduit au système

$$\begin{cases} x\,(a - by) &= 0 \\ (cx - d)\, y &= 0, \end{cases}$$

En appliquant la règle du produit nul, on voit que si $x = 0$ alors $y = 0$, et que si $x \neq 0$ alors $y = \dfrac{a}{b}$ puis $x = \dfrac{d}{c}$. Réciproquement on vérifie que les couples $(0,0)$ et $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ sont bien des solutions du système. D'où le résultat.

2. Ce système est découplé. D'après le cours, $x(t) = x_0 e^{at}$ et $y(t) = y_0 e^{-dt}$. Donc

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

3. (a) On a $x = X + \dfrac{d}{c}$ et $y = Y + \dfrac{a}{b}$, ce qui donne

$$\begin{cases} X' &= \left(X + \dfrac{d}{c}\right)\left(a - b\left(Y + \dfrac{a}{b}\right)\right) \\ Y' &= \left(c\left(X + \dfrac{d}{c}\right) - d\right)\left(Y + \dfrac{a}{b}\right) \end{cases}, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} X' &= -b\left(X + \dfrac{d}{c}\right) Y \\ Y' &= cX\left(Y + \dfrac{a}{b}\right) \end{cases}.$$

(b) $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ vérifient $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \lambda_2 = \alpha\beta$, d'où $\lambda_1 = -i\sqrt{\alpha\beta} = -\lambda_2$. On a

$$\left(A - i\sqrt{\alpha\beta} I_2\right) \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ i\sqrt{\beta} \end{pmatrix} = 0 = \left(A + i\sqrt{\alpha\beta} I_2\right) \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ -i\sqrt{\beta} \end{pmatrix},$$

d'où $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \sqrt{\alpha} \\ i\sqrt{\beta} & -i\sqrt{\beta} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} i\sqrt{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix}$.

(c) D'après le cours, on a d'où $Z(t) = P \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\alpha\beta}t} & 0 \\ 0 & e^{i\sqrt{\alpha\beta}t} \end{pmatrix} P^{-1}Z(0)$ ce qui donne après multiplication matriciel $Z(t) = \begin{pmatrix} X_0 \cos(\sqrt{\alpha\beta}t) - Y_0\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin(\sqrt{\alpha\beta}t) \\ X_0\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha\beta}t) + Y_0 \cos(\sqrt{\alpha\beta}t) \end{pmatrix}$.

(d) Dans (3 a), on a montré que (X, Y) vérifiait le système non-linéaire suivant $\begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ c \end{pmatrix} X(t)Y(t)$ avec $\alpha = \frac{bd}{c}$ et $\beta = \frac{ac}{b}$. Pour X_0 et Y_0 petit, la solution de ce système devrait se comporter comme la solution du problème linéarisé $Z'(t) + AZ(t) = 0$, c'est à dire une trajectoire en forme d'ellipse autour de l'origine.

En revenant aux fonctions d'origines, ceci veut dire que si on démarre proche de la position d'équilibre $(\frac{b}{c}, \frac{a}{b})$, alors la trajectoire $(x(t), y(t))$ devrait tourner autour de ce point d'équilbre (en forme d'ellipse).