Examen de 2ème session (juin 2015).

Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits.

Ce sujet comporte deux pages. Le barème est indicatif.

1. CONIQUE (12 POINTS)

1.1. **Courbe paramétrée.** On considère la courbe paramétrée C

$$x(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y(t) = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

(1) Étudier le domaine de définition et les symétries de la courbe.

(2) Étudier les éventuelles branches asymptotiques.

(3) Calculer le repère de Frenet (formé par le vecteur tangent et le vecteur normal) au point $M(t) = (x(t), y(t))$

(4) Donner le double tableau de variations et représenter la courbe.

(5) Déterminer la valeur de $x^2 - y^2$ et en déduire la nature de la courbe.

1.2. **Intégrale curviligne.**

(1) Montrer que l'intersection de la courbe avec la droite d'équation $x = 2$ est constituée de deux points A et B dont on calculera la valeur du paramètre t et les coordonnées x et y.

(2) Exprimer la longueur de l'arc de courbe AB sous forme d'une intégrale puis en donner une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

(3) On considère dans la suite la zone Z délimitée par l'arc de courbe situé entre A et B et le segment AB. Hachurer Z sur votre figure et calculer l'aire de la zone Z.

(4) Exprimer sous forme d'une intégrale simple le moment d'inertie de la zone Z par rapport à l'axe Ox :

$$\iint_Z y^2 \, dx \, dy$$

On pourra ramener ce calcul à celui d'une intégrale curviligne sur le bord de Z en déterminant une forme différentielle $Mdx + Ndy$ telle que $\partial_x N - \partial_y M = y^2$ et en appliquant Green-Riemann. Donner une valeur approchée de ce moment d'inertie à la calculatrice.

2. SYSTÈME DIFFÉRENTIEL (8 POINTS)

(1) On cherche à déterminer la solution générale du système différentiel

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} Y, \quad Y(t) = (x(t), y(t))$$

Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont la première composante $x(t)$ de $Y(t)$ est solution

En déduire la solution générale du système. Tracer le graphe de la courbe paramétrique $(x(t), y(t)) = Y(t)$ de la solution telle que $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les solutions sont-elles bornées lorsque $t \to +\infty$?

(2) Vérifier que $Y(t) = e^{2it}\left(\frac{-it}{4}+\frac{1}{8}, \frac{t}{2}\right)$ est solution particulière du système :

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2it} \end{pmatrix}$$

Déterminer la solution générale du système différentiel

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Les solutions sont-elles bornées lorsque $t \to +\infty$?

(3) Soit $a \in]0,4[$. On considère le système différentiel

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -a \end{pmatrix} Y$$

Déterminer le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice du système et en déduire la limite des solutions lorsque $t \to +\infty$

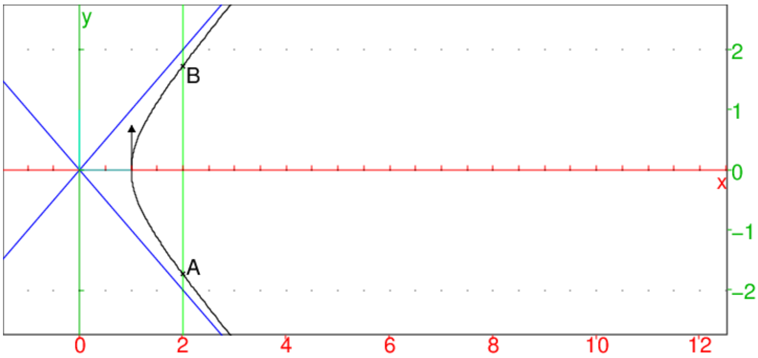
(4) Pour $a \in]0,4[$, on considère le système différentiel

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & a \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Les solutions sont-elles bornées lorsque $t \to +\infty$? (on ne demande pas de calculer explicitement les solutions).

3. Correction sommaire

Notation sur 26 (8+8+10), puis multiplié par 0.9, arrondi inférieur pour les notes ≥ 10.



3.1. Courbe paramétrée.

(1) x et y sont définis pour tout t, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc symétrie par rapport à l'axe des x, on restreint l'étude à $D = [0, +\infty[$.

(2) En $+\infty$, x et y tendent vers l'infini, on étudie donc $\lim_{t\to+\infty} y/x = 1$ puis $\lim_{t\to+\infty} y - x = 0$, on en déduit une asymptote $y = x$ (et sa symétrique par rapport à Ox pour $t \to -\infty$)

(3) $x' = y$ et $y' = x$, le vecteur tangent est donc $\frac{1}{\sqrt{\sinh(t)^2+\cosh(t)^2}}(\sinh(t), \cosh(t))$, et le vecteur normal $\frac{1}{\sqrt{\sinh(t)^2+\cosh(t)^2}}(-\cosh(t), \sinh(t))$.

(4) $x' \geq 0$, nul en $t = 0$, $y' > 0$, donc x et y sont croissants pour $t > 0$ avec une tangente verticale en $x(0) = 1, y(0) = 0$ (point où x' s'annule).

(5) $x^2 - y^2 = 1$, on a une hyperbole.

3.2. Intégrales curvilignes.

(1) $x(t) = \cosh(t) = 2$ devient $e^t + \frac{1}{e^t} = 4$ donc $T^2 - 4T + 1 = 0$ avec $T = e^t$, donc $T = 2 \pm \sqrt{3}$ et $t_\pm = \ln(2 \pm \sqrt{3}$ (ces deux valeurs sont opposées), correspondant à $x = 2$ et $y_\pm = \pm\sqrt{x^2 - 1} = \pm\sqrt{3}$.

(2)

$$AB = \int_{t_-}^{t_+} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{\ln(2+\sqrt{3})} \sqrt{\sinh(t)^2 + \cosh(t)^2}\, dt$$

soit approximativement 4.075.

(3) L'aire de Z est donnée (par exemple) par

$$\int_{\partial Z} -y\, dx$$

où ∂Z est le bord de Z qui se décompose en deux parties : le segment AB et l'arc d'hyperbole BA, sur AB l'intégrale est nulle car x est constant ($dx = 0$), donc l'aire vaut

$$
\begin{aligned}
-\int_{t_+}^{t_-} \sinh(t)\sinh(t)\,dt &= -\frac{1}{2}\int_{t_+}^{t_-} (\cosh(2t)-1)\,dt \\
&= -\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sinh(2t)-t]_{t_+}^{t_-} \\
&= -\frac{1}{2}(\sinh(t_-)\cosh(t_-)-\sinh(t_+)\cosh(t_+))-\frac{1}{2}(t_+-t_-) \\
&= 2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

L'aire pouvait aussi se calculer sans intégrale curviligne en tournant d'un quart de tour la figure et en décalant l'axe de 2, donc en paramétrant par y et en utilisant l'équation $x^2 = y^2+1$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2-x)\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2-\sqrt{y^2+1})\,dy$$

soit environ 2.14.

(4) On prend par exemple $M = -y^3/3, N = 0$ qui vérifie bien $\partial_x N - \partial_y M = y^2$, on a alors

$$
\begin{aligned}
\iint_Z y^2\,dx\,dy &= \int_{\partial Z} M\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{t_+}^{t_-} -y^3\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{t_-}^{t_+} \sinh(t)^4\,dt
\end{aligned}
$$

valeur approchée 1.195 (valeur exacte non demandée $\frac{4\sqrt{3}-\ln\left(-4\sqrt{3}-7\right)}{8}$)

3.3. **Système différentiel.**

(1) Le système est $x' = y$ et $y' = -4x$ donc $x'' = y' = -4x$, dont la solution générale est $x = A\cos(2t)+B\sin(2t)$, d'où $y = x' = -2A\sin(2t)+2B\cos(2t)$. Les conditions initiales donnent $A = 1, B = 0$, donc $Y(t) = (\cos(2t), -2\sin(2t))$, la courbe est une ellipse. Les solutions sont bornées puisque combinaison linéaire à coefficients constants de cos et sin.

(2) Pour trouver une solution particulière avec second membre $\cos(2t)$, il suffit de prendre la partie réelle de la solution particulière donnée dans l'énoncé (principe de superposition), donc

$$Y = \left(\frac{1}{8}\cos(2t)+\frac{1}{4}t\sin(2t), \frac{1}{2}t\cos(2t)\right)$$

est solution particulière, la solution générale est donc

$$Y = \left(A\cos(2t)+B\sin(2t)+\frac{1}{8}\cos(2t)+\frac{1}{4}t\sin(2t), -2A\sin(2t)+2B\cos(2t)+\frac{1}{2}t\cos(2t)\right)$$

Les solutions ne sont pas bornées, la solution générale l'est mais la solution particulière ne l'est pas.

(3) Polynome caractéristique

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda-a \end{vmatrix} = \lambda^2+a\lambda+4$$

Les racines sont $-a/2 \pm i\sqrt{16-a^2}$ (discriminant négatif sur $[0,4]$) et ont donc une partie réelle strictement négative, donc les solutions du système tendent vers 0 à l'infini.

(4) Il manque un signe - dans l'énoncé pour être cohérent avec la question précédente. Comme $2i$ n'est pas valeur propre de la matrice du système, on peut trouver une solution particulière correspondant au second membre $\cos(2t)$ par combinaison linéaire à coefficients constants de composantes ne contenant que des $\cos(2t)$ et $\sin(2t)$. Toutes les solutions sont alors bornées.
Si on prend le signe de l'énoncé, cela revient à changer a en $-a$ dans la question précédente, donc les solutions du système sans second membre ne sont pas bornées, sauf la solution nulle. On a alors une unique solution particulière bornée et toutes les autres solutions non bornées.