Examen du 9 janvier 2015, de 9h30 à 11h30.
Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits.
Ce sujet comporte deux pages. Le barème est indicatif.

1. Équation différentielle (6 points)

(1) Donner la solution générale de l'équation différentielle
$$x'' + 4x = \cos(2t)$$
Les solutions sont-elles bornées lorsque $t \to +\infty$?

(2) Soit $a \in]0,4[$. Donner la solution générale de l'équation différentielle
$$x'' + ax' + 4x = \cos(2t) \quad (E)$$

(3) Déterminer la solution de (E) pour les conditions initiales $x(0) = 0, x'(0) = 1/a$.

(4) Déterminer le maximum M_a de cette solution pour $t \geq 0$ en fonction de a.

(5) Quelle est la limite de M_a lorsque a tend vers 0 ?
Ce résultat est-il encore valide lorsqu'on fixe des conditions initiales indépendantes de a (on pourra discuter le comportement des solutions de $x'' + ax' + 4x = 0$ lorsque $t \to +\infty$) ?

2. Cycloïde (14 points)

On s'intéresse à la cycloïde C d'équations paramétriques
$$x(\tau) = R(\tau + \sin(\tau)), \quad y(\tau) = R(1 - \cos(\tau))$$
On utilise τ comme paramètre pour ne pas confondre avec le temps t qui servira dans la partie 2.2. La partie 2.1 porte sur l'étude de la courbe paramétrique, la partie 2.2 porte sur l'étude du mouvement d'une masse sur cette courbe,

2.1. Courbe paramétrique.

(1) Préciser les symétries de la courbe, montrer qu'on peut se ramener à une étude sur $[0, \pi]$.

(2) Représenter l'arche de la cycloïde C pour $\tau \in [-\pi, \pi]$ lorsque $R = 1$, en indiquant sur la figure les points de paramètre $\tau = -\pi, 0, \pi$ et les directions des tangentes en ces points (on justifiera).

(3) Calculer l'élément de longueur ds en fonction de $\tau \in [-\pi, \pi]$ ($R > 0$ quelconque) et le repère de Frénet.

(4) On fixe l'origine de l'abscisse curviligne au point (0,0). Montrer que $s^2(\tau) = ky(\tau)$ sur l'arche de cycloïde $\tau \in]-\pi, \pi[$, k étant une constante à déterminer en fonction de R.

2.2. **Equations différentielles.**

On lache à l'instant $t = 0$ une masse m en un point de l'arche de cycloïde sans vitesse initiale, on néglige les frottements. On repère la masse par son abscisse curviligne s, sa vitesse est $v = ds/dt$ (t est le temps, différent de τ). Les questions (1) à (5) proposent trois méthodes différentes pour résoudre l'équation différentielle correspondante, une des méthodes suffit pour aborder les questions (6) et (7).

(1) En utilisant que l'énergie totale $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$ est une intégrale première du mouvement, montrer que l'abscisse curviligne s vérifie :

$$(*) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{g}{4R}s^2 = C$$

(2) Dériver (*). En admettant que s n'est pas constant sauf si y est identiquement nul, en déduire une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par s et résoudre cette équation.

(3) Bonus : montrer que s n'est pas constant sauf si y est identiquement nul en appliquant le principe fondamental de la dynamique (somme des forces=masse $\times$ accélération) et en observant que la force de réaction de la courbe est portée par la normale à la courbe.

(4) Quel est le signe de C ? Résoudre directement (*) comme une équation différentielle à variables séparables (on pourra utiliser $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$) et retrouver le résultat précédent.

(5) Établir que le lagrangien du système vaut

$$L(s,\dot{s},t) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mg\frac{s^2}{8R}$$

Donner l'équation d'Euler-Lagrange correspondante et retrouver le résultat précédent.

(6) Montrer que le mouvement est périodique, calculer la période du mouvement.

(7) Si on lache simultanément deux masses en deux points de l'arche d'ordonnées y_1 et y_2 telles que $0 < y_1 < y_2 < 2R$, laquelle des deux masses arrivera au point $(0,0)$ en premier ? (N.B. : on pourra supposer que les abscisses initiales vérifient $x_1 < 0 < x_2$ pour éviter une éventuelle collision !)

3. Correction

Le barème est sur 30 points (10 par partie), indiqué entre parenthèse après le numéro de question. La note est obtenue en ajoutant les points en-dessous de 10 et les points au-dessus de 10 multipliés par .8.

1. Équation différentielle

(1) (3.5) $x''+4x=\cos(2t)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.
Solution générale sans second membre : équation caractéristique $r^2+4=0$ solutions $r_\pm=\pm 2i$, donc $x=A\cos(2t)+B\sin(2t)$.
Recheche d'une solution particulière : le second membre est de la forme $\Re(e^{2it})$ avec $2i$ racine simple de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière pour le second membre e^{2it} sous la forme $x=cte^{2it}$ (c à déterminer), donc $x'=2icte^{2it}+ce^{2it}$ et $x''=-4cte^{2it}+4ice^{2it}$ on remplace dans l'équation $x''+4x=e^{2it}$ et on obtient $4ic=1$, donc la solution particulière correspondant au second membre e^{2it} est $\frac{t}{4i}e^{2it}$, sa partie réelle $\frac{t}{4}\sin(2t)$ est solution particulière de l'équation $x''+4x=\cos(2t)$. La solution générale est donc

$$\frac{t}{4}\sin(2t)+A\cos(2t)+B\sin(2t)$$

(2) (3.5) $x''+ax'+4x=\cos(2t)$ est du même type, la solution générale de l'équation sans second membre est obtenue en résolvant l'équation caractéristique $r^2+ar+4=0$, on pose $\Delta=a^2-16$. Comme $a\in]0,4[$, $\Delta<0$ il y a donc deux racines complexes conjuguées $r_\pm=-\frac{a}{2}\pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$, la solution générale de léquation sans second membre est donc

$$x(t)=e^{-\frac{at}{2}}(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)),\quad \omega=\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}$$

Pour trouver une solution particulière correspondant à $\cos(2t)$, comme $2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique (puisque $a\neq 0$), on va choisir la première méthode, on pose donc $x(t)=c\cos(2t)+d\sin(2t)$ (où c et d sont des constantes à déterminer), on sait que $x''+4x=0$, donc (E) équivaut à $ax'=\cos(2t)$, soit $c=0, d=\frac{1}{2a}$. Donc la solution de l'équation avec second membre est

$$x(t)=\frac{\sin(2t)}{2a}+e^{-\frac{at}{2}}(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))$$

(3) (1) la première condition initiale $x(0)=0$ donne $A=0$, donc $x'(t)=\frac{2}{2a}\cos(2t)+B(e^{-at/2}\sin(\omega t))'$ en 0, $1/a=1/a+B\omega$ donc $B=0$, la solution cherchée est donc $x(t)=\frac{\sin(2t)}{2a}$

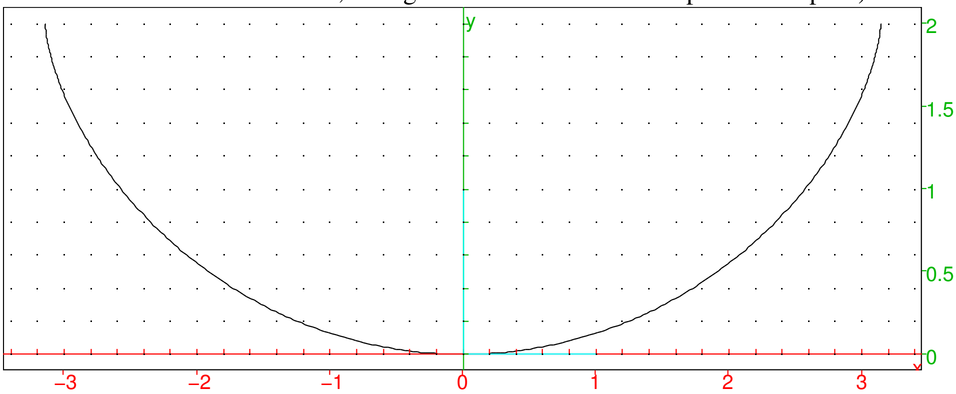
(4) (0.5) Le maximum M_a de cette solution est $\frac{1}{2a}$, atteint par exemple pour $t=\pi/4\geq 0$

(5) (1.5) La limite de M_a lorsque a tend vers 0 est $+\infty$.
Ceci reste vrai pour des conditions initiales indépendantes de a, car les solutions de $x''+ax'+4x=0$ tendent vers 0 lorsque t tend vers l'infini, le comportement en temps grand des solutions de $x''+ax'+4x=\cos(2t)$ est donc identique à celui de la solution particulière $\sin(2t)/(2a)$.
Remarque : on voit sur cet exemple que le comportement du maximum de la solution de (E) lorsque a tend vers 0 est analogue à celui de l'équation limite $a=0$ étudiée en première question.

2.1 Cycloïde $(x,y)=(R(\tau+\sin(\tau)),R(1-\cos(\tau)))$

(1) (2) On a $x(\tau+2\pi)=x(\tau)+2\pi R$ et $y(\tau+2\pi)=y(\tau)$ donc la courbe complète s'obtient à partir de l'arc sur $[-\pi,\pi]$ par des translations de vecteur $2k\pi R$ pour k entier. On a aussi $x(-\tau)=-x(\tau)$ et $y(-\tau)=y(\tau)$, donc la courbe sur $[-\pi,0]$ se déduit de celle sur $[0,\pi]$ par symétrie d'axe Oy.

(2) (4) On a $x'=R(1+\cos(\tau))$ et $y'=R\sin(\tau)$. Sur $[0,\pi]$, x' et y' sont croissants. x' s'annule en $\tau=\pi$, y' s'annule en $\tau=0,\pi$, on a donc une tangente horizontale pour $\tau=0$ en $x(0)=0,y(0)=0$ et un point singulier pour $\tau=\pi$ en $x(\pi)=\pi,y(\pi)=2$. Au point singulier, $x''=-\sin(\tau)=0$ et $y''=\cos(\tau)=-1$, la tangente est verticale (si on veut déterminer la nature du point singulier il faut encore calculer x''',y''' qui est horizontal donc non vertical, il s'agit d'un rebroussement de première espèce).



(3) (2) On a

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2+y'^2}d\tau = R\sqrt{(1+\cos(\tau))^2+\sin(\tau)^2 d\tau} \\ &= R\sqrt{2+2\cos(\tau)}d\tau = R\sqrt{2+2(2\cos(\frac{\tau}{2})^2-1)}d\tau = 2R\cos(\frac{\tau}{2})d\tau \end{aligned}$$

puisque $\cos(\frac{\tau}{2})\geq 0$ si $\tau\in[-\pi,\pi]$.
Le repère de Frénet a donc comme premier vecteur

$$T=\frac{1}{2R\cos(\frac{\tau}{2})}(R(1+\cos(\tau)),R\sin(\tau))$$

Comme $1+\cos(\tau)=2\cos^2(\frac{\tau}{2})$ et $\sin(\tau)=2\sin(\frac{\tau}{2})\cos(\frac{\tau}{2})$, on en déduit que $T=(\cos(\frac{\tau}{2}),\sin(\frac{\tau}{2}))$ et $N=(-\sin(\frac{\tau}{2}),\cos(\frac{\tau}{2}))$.

(4) (2) On intègre ds à partir de $\tau=0$

$$s(\tau)=\int_0^\tau ds = 2R\int_0^\tau \cos(\frac{\tau_1}{2})d\tau_1 = 4R\sin(\frac{\tau}{2})$$

Donc

$$s^2=16R^2\sin^2(\frac{\tau}{2})=8R^2(1-\cos(\tau)=8Ry$$

2.2

(1) (1) On a $v=ds/dt$ et $y=\frac{s^2}{8R}$ donc

$$E=\frac{1}{2}mv^2+mgy=\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+mg\frac{s^2}{8R}$$

est constant d'où la relation (*) en simplifiant par $m/2$.

(2) (2) On dérive par rapport au temps

$$2\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt}+\frac{g}{2R}s\frac{ds}{dt}=0$$

on simplifie par ds/dt supposé non identiquement nul (s non constant), d'où

$$s''+\frac{g}{4R}s=0$$

qui est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre, la solution est $s(t)=A\cos(\omega t+\phi)$ avec $\omega=\sqrt{\frac{g}{4R}}$.

(3) (1) la somme des forces est non nulle, sauf en l'origine puisque le poids est vertical et la réaction est portée par N la normale à la cycloïde, qui n'est verticale que pour $\tau=0$, donc s ne peut pas être constant (sinon l'accélération serait nulle).

(4) (2.5) C est positif (somme de carrés). On a

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{C-\frac{g}{4R}s^2} \Rightarrow \frac{ds}{\sqrt{C-\frac{g}{4R}s^2}}=dt$$

On intègre, en faisant le changement de variable $s=\sqrt{4RC/g}S$

$$\int\frac{\sqrt{4RC/g}dS}{\sqrt{C(1-S^2)}}=\int dt$$

donc $\sqrt{4R/g}\arcsin(S)=t-t_0$ et $s=\sqrt{4RC/g}S=\sqrt{4RC/g}\sin(\sqrt{g/(4R)}(t-t_0))$

(5) (1.5) Le lagrangien de la mécanique classique est la différence de l'énergie cinétique et potentielle donc

$$L(s,\dot{s},t)=\frac{1}{2}m\dot{s}^2-mgy=\frac{1}{2}m\dot{s}^2-mg\frac{s^2}{8R}$$

On a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}=\frac{\partial L}{\partial s}$$

donc

$$\frac{d}{dt}(m\dot{s})=-mg\frac{s}{4R}$$

on retrouve bien l'équation précédente.

(6) (1) Le mouvement est périodique de période $T=2\pi/\omega=2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}$.

(7) (1) La période ne dépend pas du point de départ. Par symétrie, il faut un quart de période pour atteindre l'origine donc les 2 masses arrivent en même temps.

4. Commentaires

La moyenne et la médiane sont de 8, l'écart-type de 4.1, il y a 24 notes au-dessus de la moyenne sur 89 copies, ce qui est assez décevant. Le sujet était long, mais avec le barême adopté, la barre de 10 était largement accessible : résolution des équations sans second membre du 1 (2.5 points), symétries (au moins la parité/imparité 1 point sur 2), tracé de la cycloïde (3 points sur 4 si on ne trouvait pas la tangente en π, la calculatrice pouvait utilement servir à représenter la courbe correctement !), calcul du repère de Frénet, ds et s

(2 points sur 4 si on ne simplifiait pas), question 1 de la partie 2.2 (1 point pour remplacer y par sa valeur !) et début de la question 4 (variables séparables, encore 1 point). La solution particulière du 1.2 ne demandait pas beaucoup de calculs (2 points) (les deux équations pouvaient d'ailleurs être résolues avec `desolve` sur les calculatrices formelles prêtées aux étudiants), la condition initiale du 1.3 non plus (1 points), ni le 2.2.2 (2 points) ou le 2.2.5 (1.5). La résolution de 2.2.2 ou 2.2.4 ou 2.2.5 permettait de répondre à 2.2.6 (1 point).

Pour l'exercice 1 : Une majorité des étudiants calcule le discriminant pour résoudre $r^2+4=0$ ... et beaucoup trop se trompent ensuite, finalement ils s'en sortent mieux pour $r^2+ar+4=0$! Je n'avais pas identifié cette résolution comme un point délicat à ce niveau... Certains ont utilisé la variation des constantes pour trouver la solution particulière. Les calculs sont plus ardus qu'en posant la forme de la solution particulière, pour $x''+4x=\cos(2t)$, ainsi en posant $x(t)=A(t)\cos(2t)+B(t)\sin(2t)$ et $A'\cos(2t)+B'\sin(2t)=0$, donc $x'=-2A\sin(2t)+2B\cos(2t)$ puis $x''=-4A\cos(2t)-4B\sin(2t)-2A'\sin(2t)+2B'\cos(2t)$ et on remplace dans l'équation

$$x''+4x=\cos(2t)=-2A'\sin(2t)+2B'\cos(2t)$$

on obtient un système de deux équations à 2 inconnues en A' et B', dont la solution est $A'=-\cos(2t)\sin(2t)/2, B'=\cos(2t)^2/2$, on linéarise $A'=-\sin(4t)/4, B'=\frac{1+\cos(4t)}{4}$ pour intégrer $A=\cos(4t)/16, B=t/4+\sin(4t)/16$ et on remplace dans

$$x(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)=\frac{t}{4}\sin(2t)+\frac{1}{16}(\cos(4t)\cos(2t)+\sin(4t)\sin(2t))$$

Exercice 2.1 : très peu ont simplifié ds à l'aide de la formule de trigonométrie $\cos(t)=2\cos(t/2)^2-1$ (moins de 1 sur 10), alors que la longueur de cycloïde (renversée) était étudiée dans la feuille d'exercices, et que cette même formule avait été utilisée dans le premier partiel. Des erreurs étonnantes à ce niveau, comme intervertir $\int$ et carré.

Exercice 2.2 : beaucoup de confusion dans les variables de dérivation (le temps, τ ou s). Très peu de bonnes réponses à la résolution de l'équation comme équation à variables séparables en 2.2.4. Plusieurs étudiants entament un schéma de résolution calqué sur le linéaire (résolution sans second membre...). Très peu de réponses aux questions 2.2.6 et 2.2.7 (et la plupart du temps fausse pour 2.2.7).