Intégration (l'algorithme de Risch)

B. Parisse
Institut Fourier
UMR 5582 du CNRS
Université de Grenoble I

12 juillet 2003

1 Introduction

Que peut-on espérer d'un système de calcul formel lorsqu'il s'agit de calculer une primitive ? Tout d'abord, on peut espérer qu'il sache résoudre ce que l'on donne en exercice à nos étudiants ! Ceci suppose donc de connaitre quelques méthodes classiques, par exemple : intégration de polynômes (!), polynômes multipliés par exponentielle ou/et fonctions trigonométriques, de polynômes trigonométriques par linéarisation, de fractions rationnelles, de fractions trigonométriques, de fractions de racines carrées de polynômes du second ordre, de fonctions s'y ramenant par une ou plusieurs intégrations par parties ou par changement de fonction (par exemple reconnaissance de formes $F(u)u'$) ou par changement de variables, etc.

Mais au-delà de ces méthodes (qui ont l'avantage de la rapidité mais tiennent parfois plus de la recette de cuisine que de l'algorithme...), on peut se demander si la primitive d'une fonction donnée peut ou non s'exprimer en terme des fonctions "élémentaires". Par exemple, tout le monde "sait" que la fonction e^{x^2} n'admet pas de primitive "simple", encore faut-il donner un sens mathématique précis à cette affirmation. Ceci nécessite de donner une définition rigoureuse du terme fonction élémentaire. On peut alors appliquer un algorithme développé par Risch (pour les extensions dites transcendantes, obtenue par ajout des fonctions exponentielle et logarithme) qui permet de répondre à la question : il s'agit vu de très loin d'une extension de l'algorithme d'intégration des fractions rationnelles.

Cet article se décompose en deux parties principales :

- la section 2 présente les définitions de fonctions élémentaires, de tour de variables, et donne deux théorèmes, le théorème de structure de Risch qui permet d'écrire une fonction contenant des exponentielles et des logarithmes comme une fonction élémentaire par rapport à une tour de variable, et le théorème de Liouville qui donne la forme que peut prendre une primitive d'une fonction élémentaire lorsqu'elle est aussi élémentaire.

– la section 3 décrit l'algorithme d'intégration de Risch permettant de décider si une fonction élémentaire donnée possède ou non une primitive élémentaire et de la calculer dans le premier cas. Nous ne présentons ici l'algorithme de Risch que pour les extensions transcendantes pures (ln et exp).

Le lecteur intéressé par le cas des extensions algébriques pourra consulter la thèse de Trager. Pour les extensions plus générales (incluant en particulier les fonctions tangente, arctangente), la référence est le livre de Bronstein donnée en section 4.

2 Fonctions élémentaires

2.1 Extensions transcendantes, tour de variables

On se donne une expression $f(x)$ dépendant de la variable x que l'on souhaite intégrer par rapport à x. L'algorithme de Risch s'applique à cette expression si on peut l'écrire comme une fraction rationnelle à plusieurs variables algébriquement indépendantes

$$x, f_1(x), f_2(x, f_1(x)), ..., f_n(x, f_1(x), f_2(x, f_1(x)), ..., f_{n-1}(x, f_1(x), ..., f_{n-2}(x)))$$

où les f_i sont soit l'exponentielle soit le logarithme d'une fraction rationnelle (le corps de base appelé aussi corps de constantes ici est soit $\mathbb{C}$, soit une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ ou une extension algébrique d'un corps de fractions rationnelles s'il y a des paramètres). On appelle tour de variables la suite des $x, f_1, ..., f_n$ (chaque étage est donc une exponentielle d'une fraction rationnelle ou le logarithme d'une fraction rationnelle dépendant des étages précédents) et on dira que f est une fonction élémentaire par rapport à cette tour de variables.

L'intérêt de l'écriture d'une expression sous forme de tour est qu'elle est stable par dérivation : si on dérive par rapport à x une fonction élémentaire dépendant d'une tour de variables, on obtient encore une fonction élémentaire dépendant de la même tour de variables. Autrement dit, l'ensemble des fonctions élémentaires pour une tour fixée est un corps différentiel.

Exemples :

- e^{x^2} est bien dans ce cas, pour $n = 1$, f_1 est l'exponentielle de x^2 qui est algébriquement indépendant de x. Les fonctions $(2x^2-1)e^{x^2}$ ou $x/(e^{x^2}-1)$ sont aussi élémentaires par rapport à la tour de variables $\{x, e^{x^2}\}$.
- $x\ln(x)\exp(x)$ est élémentaire par rapport à la tour $\{x, \ln(x), \exp(x)\}$, mais aussi par rapport à la tour $\{x, \exp(x), \ln(x)\}$.
- $xe^{x\ln(x)}$ est élémentaire, en prenant $n = 2$, $f_1 = \ln(x)$ et $f_2 = e^{xf_1}$.
- $x^n = e^{n\ln(x)}$, où n est un paramètre, convient avec comme tour $\{x, \ln(x), e^{n\ln(x)}$
- $e^{\ln(x)}$ ne convient pas car il n'est pas algébriquement indépendant de $x, \ln(x)$ mais on peut le réécrire sous une forme acceptable puisque $e^{\ln(x)} = x$.
- $e^{\ln(x)/2}$ ne convient pas non plus car son carré est égal à x. Une réécriture ne suffit pas, cet exemple est bien sûr une extension algébrique et non

transcendante.

Dans la suite, on va s'intéresser aux tours de variables dans lesquelles on a effectué des simplifications évidentes. On élimine les $\ln \circ \exp$ de la manière suivante : si $f_k = \ln(g_k)$, on regarde si g_k vu comme fraction en $f_1, ..., f_{k-1}$ possède un facteur f_j^m (avec $m \in \mathbb{Z}$) lorsque $f_j = \exp(g_j)$ est une exponentielle. Si c'est le cas, on a $f_k = mg_j + \ln(g_k/g_j^m)$. On change alors de tour en remplaçant f_k par $\tilde{f}_k = \ln(g_k/g_j^m) = f_k - mg_j$. On élimine aussi les $\exp \circ \ln$, si $f_k = \exp(g_k)$, pour $j < k$ si f_j est un logarithme, on regarde si $c_j = \partial_{f_j} g_k|_{f_j=0}$ est un entier, si c'est le cas on remplace f_k par $\tilde{f}_k = f_k/g_k^{c_j}$.

Exemples :

$$\begin{array}{rcl} \ln(\dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}}) & \rightarrow & -x^2 + \ln(e^{x^2}+1) \\ e^{3\ln(x)+\ln(x)^2+5} & \rightarrow & x^3 e^{\ln(x)^2+5} \end{array}$$

2.2 Théorème de structure de Risch

On voit donc qu'il est nécessaire de disposer d'un algorithme pour décider si des exponentielles et logarithmes sont algébriquement indépendants. Cet algorithme est basé sur un théorème de structure dû à Risch :

Théorème 1 *Soit $f = \ln(g(x))$ le logarithme d'une fonction élémentaire g par rapport à une tour de variables T, alors soit f est algébriquement indépendant des variables de T, soit f est élémentaire et plus précisément combinaison linéaire rationnelle des logarithmes et des arguments des exponentielles de la tour T.*

Soit $f = \exp(g)$ l'exponentielle d'une fonction élémentaire g par rapport à une tour de variables T, alors soit f est algébriquement indépendante des variables de T, soit il existe n tel que f^n soit élémentaire par rapport à T (on peut alors appliquer le cas précédent à $ng = \ln(f^n)$)

Démonstration :
Commençons par le cas de l'exponentielle. On considère le polynôme minimal de $f = \exp(g)$:

$$a_n f^n + ... + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0, a_0 \neq 0$$

où les a_i sont des fractions rationnelles en T. On dérive et on applique $f' = g'f$:

$$(a'_n + na_n g')f^n + ... + (a'_k + ka_k g')f^k + ... = 0$$

c'est un multiple du polynôme minimal donc il existe une fraction rationnelle C (par rapport à la tour de variables) telle que :

$$\forall k, \quad (a'_k + ka_k g') = Ca_k$$

Comme $a_n \neq 0$, cela entraine $a'_n/a_n + ng' = C$. Le coefficient constant a_0 est aussi non nul, donc $a'_0/a_0 = C$ et

$$ng' = a'_0/a_0 - a'_n/a_n \Rightarrow ng = \ln(\frac{a_0}{a_n}) + k$$

où k est constant, donc $f^n = \exp(ng) = e^k a_0/a_n$ est élémentaire.

Passons au cas du logarithme, supposons que $f = \ln(g)$ dépende algébriquement de la tour T, on va commencer par montrer que f est élémentaire. On écrit :

$$a_n f^n + ... + a_0 = 0$$

où les a_i sont des fractions rationnelles en T. On dérive en appliquant $f' = g'/g$:

$$a'_n f^n + (na_n f' + a'_{n-1}) f^{n-1} ... + a_1 f' + a'_0$$

Comme f' est une fraction rationnelle en T, le polynôme $a'_n X^n + (na_n f' + a'_{n-1}) X^{n-1} + ... + a_1 f' + a'_0$ qui annule f doit être un multiple du polynôme minimal de f, il existe donc une fraction rationnelle C par rapport à T telle que :

$$a'_n = C a_n \quad (na_n f' + a'_{n-1}) = C a_{n-1} \quad ...$$

On en déduit f' :

$$f' = \frac{\frac{a'_n}{a_n} a_{n-1} - a'_{n-1}}{na_n} = \left(\frac{-a_{n-1}}{na_n} \right)'$$

donc il existe une constante c telle que :

$$f = \frac{-a_{n-1}}{na_n} + c$$

donc f est élémentaire par rapport à la même tour T que g.

Montrons maintenant qu'un logarithme $f = \ln(g)$ qui est élémentaire par rapport à une tour de variable T est combinaison linéaire à coefficients rationnelles des logarithmes et des arguments des exponentielles de T[1]. Soit X la dernière variable de la tour T. On factorise maintenant le numérateur et le dénominateur de g en $\prod_j P_j^j$ où les P_j sont sans facteurs multiples et premiers entre eux 2 à 2 (par rapport à X), il existe C indépendant de X tel que :

$$g = C \prod_{j \in \mathbb{Z}} P_j^j \Rightarrow \ln(g) = \ln(C) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} j \ln(P_j) \tag{1}$$

Alors $f' = \ln(C)' + \sum_j j P'_j/P_j$ donc $\prod P_j f'$ est un polynôme en X. Soit N/D la fraction irréductible représentant f, on a :

$$f' = \frac{N'D - ND'}{D^2}$$

on vient donc de montrer que :

$$\left(\prod_j P_j \right) \frac{N'D - ND'}{D^2} \text{ est un polynôme en } X \tag{2}$$

[1]cette preuve peut être sautée en première lecture

Soit P un facteur irréductible de D de multiplicité k tel que $D = P^k Q$ (donc P premier avec Q, mais P est aussi premier avec N car $f = N/D$ est irréductible). Alors en simplifiant numérateur et dénominateur par P^{k-1}, on a :

$$\left(\prod_j P_j\right) \frac{N'PQ - N(kP'Q + PQ')}{P^{k+1}Q^2} \text{ est un polynôme en } X. \tag{3}$$

On en déduit, après simplification d'au plus un facteur P au dénominateur avec l'un des P_j, que P^k divise $N'PQ - N(kP'Q + PQ')$ donc P divise P'. Ceci n'est possible que si $P = 1$ (et donc le dénominateur de f est égal à 1) ou si la variable X est une exponentielle et $P = X$.

Montrons que ce deuxième cas est en fait exclus : en effet si $P = X = \exp(Y)$ est une exponentielle, on a alors $D = X^k$ et $Q = 1$. Comme $P' = Y'X$, (3) devient :

$$\left(\prod_j P_j\right) \frac{X(N' - kNY')}{X^{k+1}} \text{ est un polynôme en } X$$

Comme X ne divise pas N, N possède donc un coefficient constant a_0 non nul. Le coefficient constant de $N' - kNY'$ est $a_0' - ka_0Y'$. Si ce terme était nul alors $a_0' = ka_0Y'$ donc $a_0 = c\exp(kY) = cX^k$ or a_0 ne dépend pas de X donc $c = 0$ donc $a_0 = 0$, absurde. Donc X ne divise pas $N' - kNY'$. Comme X^{k+1} divise $\prod P_j X(N' - kNY')$, on en déduit que X^k divise un des P_j. Donc $k = 1$ et $P_j = XQ_j$. Revenons maintenant à (1), on a :

$$f = \ln(g) = \ln(C) + j\ln(XQ_j) + \sum_{l \neq j} l\ln(P_l)$$

on dérive :

$$f' = \ln(C)' + jY' + j\frac{Q_j'}{Q_j} + \sum_{l \neq j} l\frac{P_l'}{P_l}$$

on voit qu'il n'est plus nécessaire de multiplier f' par P_j pour avoir un polynôme, multiplier par Q_j suffit, plus précisément

$$\left(\prod_{l \neq j} P_l\right) Q_j \frac{N'D - ND'}{D^2} \text{ est un polynôme en } X.$$

donc X^{k+1} divise $\left(\prod_{l \neq j} P_l\right) Q_j X(N' - kNY')$ ce qui est impossible.

Donc $D = 1$ dans tous les cas et on a $f = N$. Donc

$$f' = N' = \ln(C)' + \sum_j jP_j'/P_j \text{ est un polynôme par rapport à } X$$

On en déduit que les P_j ne dépendent pas de X sauf si X est une exponentielle et $P_j = X$. Dans les deux cas N' ne dépend pas de X donc le polynôme N est de degré 0 ou 1 en X (si X est une exponentielle, N est forcément de degré 0)

– Si $X = \exp(Y)$ est une exponentielle (avec Y élémentaire ne dépendant pas de X), alors $f = N$ est indépendant de X. On retire jY à f et on divise g par X^j (en posant $j = 0$ si aucun des P_j n'est égal à X), qui devient indépendant de X, on conserve ainsi l'égalité $f = \ln(g)$ mais avec une variable de moins dans la tour de variables par rapport à laquelle f et g sont élémentaires.
– Si X n'est pas une exponentielle, $N = cX + d$ avec c dans le corps de constantes, et d indépendant de X. Si $X = x$, on a $g = \exp(cx + d)$ qui n'est rationnel que si $c = 0$. On a alors d donc f et g constants. Si $X = \ln(Y)$ est un logarithme (avec Y élémentaire ne dépendant pas de X), alors $\forall j, P_j = 1$ donc g est élémentaire indépendante de X. On a alors :

$$f = N = c\ln(Y) + d = \ln(g)$$

avec c dans le corps des constantes, d et g élémentaires indépendants de X. On cherche maintenant la fonction élémentaire d. Cette fonction n'est pas le logarithme d'une fonction élémentaire en général car c n'est pas forcément entier, mais d' a les mêmes propriétés que la dérivée du logarithme d'une fonction élémentaire. On peut donc reprendre le même raisonnement mais avec une variable de moins dans la tour de variables. Si la tour qu'on a choisie est normalisée, alors Y ne contient au numérateur et au dénominateur aucune puissance d'une exponentielle d'une variable de la tour donc le polynôme P_j du cas précédent ne peut provenir de Y ce qui entraine que j est bien entier dans le cas précédent (bien que c ne le soit pas forcément).

Après avoir fait une récurrence sur le nombre de variables de la tour, on a donc f qui s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients entiers des arguments g_k des variables exponentielles $f_k = \exp(g_k)$ de la tour et à coefficients a priori quelconque des variables logarithmes $f_l = \ln(g_l)$ de la tour :

$$f = \sum_k j_k g_k + \sum_l x_l \ln(g_l) = \ln(g)$$

Comme g est élémentaire, $h = g / \prod_k \exp(g_k)^{j_k}$ est élémentaire de logarithme $\sum_l x_l \ln(g_l)$. Montrons que si les arguments des ln sont des polynômes sans facteurs multiples, alors les x_l sont entiers. Rappelons que les $\ln(g_l)$ sont algébriquement indépendants, on peut donc construire des polynômes irréductibles I_l par rapport aux variables de la tour tels que I_l divise une fois g_l mais ne divise pas les g_k précédents. Soit $h = \prod_{j \in \mathbb{Z}} P_j^j$ la factorisation sans facteurs multiples de h. On dérive alors $\ln(h)$ ce qui donne :

$$\sum_l x_l g_l' / g_l = \sum_j j P_j' / P_j$$

où $\prod_j P_j^j$ est la décomposition sans facteurs multiples de h. Comme I_l divise un et un seul des P_j on en déduit que x_l est égal au j correspondant et est donc entier. (Remarque : si on n'impose pas aux arguments des logarithmes d'être des polynômes sans facteurs carrés, on obtiendrait ici des coefficients rationnels).

En pratique :
On peut effecter l'algorithme de la manière suivante :

- on cherche les variables généralisées de l'expression qui dépendent de x.
- On ajoute les variables généralisées en commençant par la moins longue
- Si c'est un logarithme, on extrait les puissances des exponentielles précédentes dont il dépend. On cherche des relations entre fonctions ln en les réécrivant comme combinaison linéaire de ln indépendants. Pour avoir des ln indépendants, on se ramène d'abord à des polynômes sans facteurs multiples en utilisant la relation $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ et en écrivant la factorisation sans facteurs multiples de chaque polynôme argument, puis on extrait le PGCD 2 à 2 des arguments de logarithmes jusqu'à obtenir des arguments de ln premiers entre eux.
- Si c'est une exponentielle, on teste si son argument est combinaison linéaire à coefficients rationnels :
  - des arguments des exponentielles précédentes,
  - des ln des logarithmes précédents,
  - de $\ln(x)$ et de $i * \pi$.

  Pour cela on substitue les ln par des indéterminées, et on dérive une fois par rapport à cette indéterminée, le résultat doit être un rationnel, pour les variables exponentielles, il faut réduire au même dénominateur et résoudre le système linéaire obtenu en identifiant les coefficients du numérateur. Si l'exponentielle est indépendante des précédentes, on extrait de l'exponentielle à rajouter la partie linéaire de la dépendance en les ln précédents si le coefficient correspondant est entier. Par exemple, on réécrit :

$$xe^{2\ln(x)+\ln(x)^2} = x^3 e^{\ln(x)^2}$$

Remarque
On n'est pas obligé de se limiter aux seules fonctions logarithmes et exponentielles, l'essentiel est de pouvoir tester l'indépendance algébrique des expressions créées. Pour éviter d'avoir à introduire des exponentielles et logarithmes complexes dans une expression réelle, on peut autoriser par exemple des extensions en tangente ou en arctangente.

2.3 Théorème de Liouville

On a vu que la dérivée d'une fonction élémentaire dépendant d'une tour de variables est une fonction élémentaire dépendant de la même tour de variables. Réciproquement, supposons qu'une fonction élémentaire admette une primitive qui soit élémentaire, c'est-à-dire qu'elle doit être une fraction rationelle par rapport à une tour de variables mais pas forcément identique à celle de départ. Alors, si une telle écriture existe, à des termes logarithmiques près, elle ne peut dépendre que de la même tour de variables, plus précisément on a le théorème de Liouville :

Théorème 2 *Soit f une fonction élémentaire par rapport à une tour de variables T et un corps de constantes K admettant une primitive élémentaire F.*

Alors il existe un nombre fini de constantes $c_1, ..., c_n$ et de fonctions élémentaires $v_1, ..., v_n$ par rapport à T avec comme corps de constantes une extension algébrique K' de K tel que $F - \sum_k c_k \ln(v_k)$ soit élémentaire par rapport à T et K.

Preuve :[2]

Soit f élémentaire de tour T_1 (corps K) et F sa primitive supposée élémentaire de tour T_2 et de corps K' une extension algébrique de K. On commence par rajouter après les élements de T_1 les élements nécessaires de T_2 pour obtenir une tour T par rapport à laquelle f et F sont élémentaires (plus précisément F sera élémentaire quitte à autoriser des puissances fractionnaires des variables exponentielles de T_1). Le théorème de structure de Risch permet de faire cela, en effet on regarde pour chaque élément de T_2 s'il est algébriquement indépendant des éléments de T_1 ou non. S'il l'est, on le rajoute à la tour T, s'il ne l'est pas alors dans le cas d'un logarithme il est élémentaire et dans le cas d'une exponentielle, une de ses puissances est élémentaire. Donc F est bien une fraction rationnelle par rapport aux éléments logarithmiques de T_1, aux racines n-ième des éléments exponentiels de T_1 et à des éléments de T_2 dans cet ordre (le corps des constantes étant K').

Première étape :

Commençons par les éléments restant de T_2. Soit X_k l'élément au sommet de la tour T. La dérivée f de F par rapport à X_k ne dépend pas de X_k. Donc soit F ne dépend pas de X_k et on passe à la variable suivante, soit $X_k = \ln(v_k)$ est un logarithme et $F = c_k \ln(v_k) + d_k$ avec $c_k \in K'$ et v_k et d_k indépendants de X_k. S'il n'y a pas d'autres éléments restants de T_2, on passe à la 2ème étape. Sinon soit X_{k-1} la variable suivante (juste en-dessous de X_k dans la tour). En dérivant, on a :

$$F' = c_k \frac{v_k'}{v_k} + d_k' = f$$

Supposons que v_k dépende de X_{k-1}, on fait alors un raisonnement analogue à celui de la preuve du théorème de structure de Risch, en décomposant v_k en produit/quotient de facteurs sans multiplicités $v_k = \prod P_j^j$ et en écrivant $d_k = N/D$ on a :

$$\left(\prod_j P_j \right) \frac{N'D - ND'}{D^2}$$

est un polynôme en X_{k-1}. On en déduit comme précédemment que $D = 1$, $N' = d_k'$ est indépendant de X_{k-1}. Comme on a supposé que v_k dépend de X_{k-1}, $X_{k-1} = \exp(Y_{k-1})$ est alors une exponentielle, $N = d_k$ ne dépend pas de X_{k-1} et l'un des $P_j = X_{k-1}$ (sinon tous les P_j seraient constants en X_{k-1} donc v_k aussi). On élimine alors la variable X_{k-1} en écrivant $\ln(v_k) = jY_{k-1} + \ln(w_k)$, avec Y_{k-1} et w_k élémentaires et indépendants de X_{k-1}.

Si v_k est indépendant de X_{k-1}, alors d_k' aussi donc soit d_k est indépendant de X_{k-1} et on passe à la variable suivante, soit X_{k-1} est un logarithme et

[2]Peut être omise en première lecture

$d_k = c_{k-1} \ln(v_{k-1}) + d_{k-1}$. En continuant pour toutes les variables restantes de T_2, on obtient

$$F = \sum_k c_k \ln v_k + d$$

avec d et v_k élémentaires pour T_1 (avec exponentielles modifiées en en prenant une racine n-ième) et K'.

Deuxième étape Il s'agit de montrer que pour les exponentielles, il n'est en fait pas nécessaire de prendre de racines n-ième. La compréhension de cette étape demande un peu de familiarité avec l'algorithme de Risch (cf. infra). On va faire la preuve pour la variable au sommet de la tour T_1 si c'est une exponentielle. On verra dans le déroulement de l'algorithme de Risch que pour les autres variables, il y a appel récursif de l'algorithme d'intégration, donc traiter la variable au sommet suffira. Soit donc $\exp(Y)$ la variable au sommet de la tour T_1, on note $X = \exp(Y/n)$ la racine n-ième de cette variable qui est utilisée pour exprimer $F = \sum c_k \ln v_k + N/D$ comme une fraction rationnelle en X alors que $f = F'$ est une fraction rationnelle en X^n. On a donc :

$$\sum c_k \frac{v_k'}{v_k} + \frac{N}{D}' = f = \text{fraction rationnelle en } (X^n)$$

Notons que le fait que X soit une exponentielle est essentiel, car par exemple l'intégrale d'une fraction rationnelle dépendant de x^n comme x^3 ou $1/(x^3-1)$ ne s'exprime pas en fonction de x^3. On traite d'abord la partie polynomiale généralisée de f en X^n :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j (X^n)^j$$

Son intégrale est un polynôme généralisé, éventuellement dépendant de X, soit $\sum_{j \in \mathbb{Z}} A_j X^j$. On dérive, et on obtient pour k non multiple de n, $A_k Y/n + A_k' = 0$ dont $A_k = 0$ est solution. La partie polynôme généralisé ne dépend donc que de X^n. On effectue aussi les intégrations par parties pour réduire le dénominateur de f à un polynôme sans facteurs multiples (réduction de Hermite), ce qui se fait en introduisant des fractions rationnelles en X^n uniquement. Reste la partie logarithmique. On utilise le critère du résultant, les coefficients des logarithmes sont les racines c_k du polynôme en t

$$\mathrm{Res}_X(D, N - tD')$$

où ces racines doivent être indépendantes de x (puisque F existe) et les v_k correspondants sont égaux à

$$\gcd(D, N - c_k D')$$

Or comme X est une exponentielle, D' est un polynôme en X^n, de même que D et N, donc v_k est un polynôme en X^n.

Troisième étape Il reste enfin à montrer que seuls les c_k et v_k nécessitent une extension algébrique de K. Ceci est encore une conséquence de l'algorithme de Risch, la construction de la partie polynomiale (éventuellement généralisée) et de la partie fractionnaire ne font en effet intervenir que des coefficients dans le corps K.

3 L'algorithme de Risch

On suppose dans la suite qu'on s'est ramené à une fraction rationnelle par rapport à une tour de variables (où on a effectué les simplifications évidentes $\ln \circ \exp$, ainsi que $\exp \circ \ln$, dans le premier cas en extrayant les facteurs évidents en les variables précédentes exponentielles, dans le deuxième cas en extrayant la partie linéaire à coefficient entier en les variables logarithmes précédentes). On note X la variable au sommet de la tour et N_0/D_0 l'écriture de la fonction élémentaire comme fraction irréductible avec N_0 et D_0 polynômes en X.

Exemples

$$\int (2x^2+1)e^{x^2} \qquad X = e^{x^2} \qquad N_0 = (2x^2+1)X, D_0 = 1$$

$$\int \frac{x\ln(x)}{x+\ln(x)} \qquad X = \ln(x) \qquad N_0 = xX, D_0 = x+X$$

La première étape va consister à se ramener à un dénominateur sans facteurs multiples. Elle est analogue au cas des fractions rationnelles de x et est basée sur l'identité de Bézout entre P et P' vu comme polynômes en la variable du haut de la tour. Il apparait toutefois une difficulté pour les extensions exponentielles, à savoir que $X = e^f$ et $X' = f'X$ ne sont pas premiers entre eux comme polynômes en X, on devra traiter le pôle 0 d'une fraction rationnelle en une exponentielle X comme on traite l'intégration d'un polynôme en x. Si P est sans facteurs multiples et premier avec X, alors $P(X)$ et $P(X)' = f'XP'(X)$ vu comme polynômes en X n'ont pas de facteurs en commun.

On commence donc, si X est une exponentielle et D_0 un multiple de X, par appliquer Bézout pour décomposer la fraction N_0/D_0 en :

$$\frac{N_0}{D_0} = \frac{N_1}{D_1} + \frac{P}{X^k}, \quad \gcd(X, D_1) = 1, D_0 = X^k D_1$$

On isole aussi la partie polynômiale en effectuant la division euclidienne de N_0 par D_0 (ou de N_1 par D_1 si X est une exponentielle), on obtient alors une écriture sous la forme :

$$\frac{N}{D} + \sum_j a_j X^j$$

où la somme sur j est finie et porte sur des entiers positifs ou nul si X n'est pas une exponentielle, ou sur des entiers relatifs si X est une exponentielle.

On effectue la même écriture sur la partie fractionnaire de F, et en identifiant les parties polynomiales et éventuellement la partie polaire en 0 si X est une exponentielle, on peut séparer l'intégration en 2 parties : intégration de la partie polynomiale (généralisée) et intégration de la partie fractionnaire propre.

Exemples

- $(2x^2+1)e^{x^2} = 0 + (2x^2+1)X$ est un polynôme,
- $$\frac{x\ln(x)}{x+\ln(x)} = \frac{xX}{x+X} = -\frac{x^2}{x+X} + x$$

la partie polynomiale est x (de degré 0 en X), la partie fractionnaire est $-x^2/(x+X)$

–

$$\frac{x(e^{2x}+1)}{e^x(e^x+1)^2} = \frac{x(X^2+1)}{X(X+1)^2} = -\frac{2x}{(X+1)^2} + xX^{-1}$$

la partie polynôme généralisé est xX^{-1}

3.1 Intégration d'une fraction propre

3.1.1 Réduction sans facteurs multiples

On factorise D en $\prod_i P_i^i$ avec P_i sans facteurs multiples (et les P_i premiers entre eux 2 à 2) et on décompose en éléments simples relativement à cette factorisation (en appliquant Bézout) :

$$\frac{N}{D} = \sum_{i>0} \frac{N_i}{P_i^i}$$

Pour chaque polynome P_i, on applique Bézout à P_i et P_i' :

$$N_i = A_i P_i + B_i P_i' \Rightarrow \frac{N_i}{P_i^i} = \frac{A_i}{P_i^{i-1}} + \frac{B_i P_i'}{P_i^i}$$

on intègre par parties le second terme

$$\int \frac{N_i}{P_i^i} = \int \frac{A_i}{P_i^{i-1}} - \frac{B_i}{(i-1)P_i^{i-1}} + \int \frac{B_i'}{(i-1)P_i^{i-1}}$$

on rassemble les deux intégrales ayant P_i^{i-1} au dénominateur et on recommence jusqu'à avoir une puissance 1 au dénominateur. Il reste alors à intégrer une somme de fractions du type N/D avec D et D' premiers entre eux.

Exemple

On reprend le dernier exemple de la section précédente pour éliminer la puissance 2 au dénominateur : $N_2 = 2x$ et $P_2 = (X+1)$ avec $X = e^x$. On a $P_2' = X$, donc $A_2 = 2x$ et $B_2 = -2x$:

$$\int \frac{2x}{(X+1)^2} = \int \frac{2x}{P_2} + \int \frac{-2xP_2'}{P_2^2} = \int \frac{2x}{P_2} + \frac{2x}{P_2} - \frac{2}{P_2}$$

il reste donc à intégrer $(2x-2)/(e^x+1)$.

3.1.2 La partie logarithmique

Comme on l'a vu lors de la preuve du théorème de structure de Risch, si on dérive une fraction en X, le dénominateur de la dérivée ne peut se décomposer qu'en produit de facteurs de multiplicité supérieure ou égale à 2. Il en résulte que la fraction à intégrer résiduelle (encore notée $f = N/D$) après l'étape de réduction ci-dessus ne peut provenir que de la dérivation de $F = \sum_k c_k \ln(v_k)$:

$$f = \frac{N}{D} = F' = (\sum_k c_k \ln(v_k))' = \sum_k c_k \frac{v_k'}{v_k}$$

En identifiant les décompositions en éléments simples de F' et f, on montre également que les v_k divisent D, plus précisément on peut imposer aux v_k d'être premiers entre eux 2 à 2 et dans ce cas $D = \prod v_k$. Donc :

$$\sum_k c_k \frac{v_k'}{v_k} = \frac{N}{\prod_k v_k} = \frac{N}{D}$$

et :

$$N = \sum_k c_k v_k' \prod_{j \neq k} v_j$$

Soit t un paramètre, formons le polynôme $N - tD'$:

$$N - tD' = \sum_k \left((c_k - t) v_k' \prod_{j \neq k} v_j \right)$$

donc le pgcd en X des polynômes $N - tD'$ et D est :

- si t n'est égal à aucun des c_k, $N - tD'$ est premier avec v_k pour tout k car v_k divise $\sum_{l \neq k} (c_l - t) v_l' \prod_{j \neq l} v_j$ et $v_k' \prod_{j \neq k} v_j$ est premier avec v_k. Donc le pgcd est 1.
- si t est égal à l'un des c_k, alors le pgcd est le produit des v_k tels que $c_k = t$ (notons que dans ce cas on peut rassembler ces v_k à l'intérieur d'un même logarithme)

Considérons le polynôme R de la variable t égal au résultant par rapport à X des polynômes D et $N - tD'$ (rappelons qu'il s'agit du déterminant du système linéaire $AD + B(N - tD') = 1$ où les inconnues sont les coefficients des polynômes A et B, ce déterminant est nul si et seulement si le système n'a pas de solution donc si et seulement si D et $N - tD'$ ne sont pas premiers entre eux), alors ce polynôme en t s'annule si et seulement si $t = c_k$. On cherche les racines c_k en t de ce polynôme, elles doivent être indépendantes de x si F est élémentaire, et dans ce cas la primitive F de $f = N/D$ vaut

$$F = \sum_{c_k \text{ racine de } R} c_k \ln(\gcd(N - c_k D', D))$$

Exemples

- $$\frac{2x - 2}{e^x + 1}, \quad D = X + 1, D' = e^x = X, \quad N - tD' = 2x - 2 - tX$$

  On calcule $R = -2 * x - t + 2$, l'unique racine est $t = 2 - 2x$ qui n'est pas constante donc cette fonction n'admet pas de primitive élémentaire.

–

$$\frac{(2x^2-x-2)X-1}{X^2+(x+1)X+x}, \quad X=\exp(x^2+x)$$

On a $D'=2(2x+1)X^2+(1+(2x+1)(x+1))X+1$

$$R=-(2x-1)(x+1)(2x+1)(x-1)^2(t+1)(t-1)$$

les racines en t sont constantes et égales à 1 et -1, donc $c_1 = 1$ et $v_1 =$gcd$(N-D',D)=X+1$ et $c_2=-1$, $v_2 =$gcd$(N+D',D)=x+X$ donc :

$$\int \frac{(2x^2-x-2)X-1}{X^2+(x+1)X+x} = \ln(X+1)-\ln(x+X)$$

Remarque importante
Pour les extensions exponentielles ou logarithmiques, la dérivée de la partie logarithmique calculée comme ci-dessus contiendra en général une partie entière constante par rapport à X, il faut donc retirer cette partie entière à la partie polynomiale.

3.2 La partie polynomiale (généralisée)

On doit résoudre :

$$(\sum_j A_j X^j)' = \sum_j a_j X^j$$

avec une somme sur $j \in \mathbb{Z}$ si X est une exponentielle et $j \in \mathbb{N}$ sinon.

Si $X = x$, $j \geq 0$ et la résolution est immédiate : on prend $A_0 = 0$ et $A_{j+1} = a_j/(j+1)$.

3.2.1 Extension logarithmique

Si $X = \ln(Y)$ est un logarithme, $j \geq 0$ et on doit résoudre :

$$\sum_{j\geq 0} (A_j' + (j+1)A_{j+1}\frac{Y'}{Y})X^j = \sum_j a_j X^j$$

Soit k la plus grande puissance non nulle de f ($a_j = 0$ si $j > k$ et $a_k \neq 0$). Pour $j > k$, on a :

$$A_j' + (j+1)A_{j+1}\frac{Y'}{Y} = 0$$

On résout pour des valeurs de j décroissante, pour j suffisamment grand, on a $A_{j+1} = 0$ car la somme sur j est finie, donc A_j est constant. Si $A_j \neq 0$, alors au rang $j-1$, on a $A_{j-1}' = -jA_jY'/Y$ qui n'admet pas de solutions car A_{j-1} ne peut pas dépendre de $X = \ln(Y)$. On en déduit que pour $j > k+1$, on a $A_j = 0$ et A_{k+1} est constant. En fait la valeur constante de A_{k+1} sera déterminée par une condition de compatibilité en résolvant l'équation au rang du dessous. On continue la résolution de

$$A_j' + (j+1)A_{j+1}\ln(Y)' = a_j$$

par valeur décroissante de j, à chaque rang on va déterminer A_j à une constante près en résolvant un problème d'intégration (par appel récursif de l'algorithme de Risch, mais si $j \neq 0$ sans autoriser l'ajout de nouveaux logarithmes sauf $\ln(Y)$) et la valeur de la constante de A_{j+1} (on fait varier A_{j+1} de la constante nécessaire pour absorber le terme en $\ln(Y)$ qui apparait lors de l'appel récursif de Risch). Au rang 0, on est ramené à un problème d'intégration avec une variable de moins (la constante indéterminée dans A_1 peut par exemple être choisie comme le coefficient constant de $\ln(Y)$ s'il en apparait un en intégrant).

Exemple
$X = \ln(x^2+1)$ et on cherche l'intégrale de X^2. On a donc A_3 est constant,

$$A_2' + 3A_3 \ln(x^2+1)' = 1$$

La primitive de 1 est élémentaire et ne fait pas intervenir de ln donc $A_3 = 0$ et $A_2 = x + C_2$. Au rang 1, on a :

$$A_1' + 3x\frac{2x}{x^2+1} + C_2 \ln(x^2+1)' = 0$$

On calcule la primitive de $6x^2/(x^2+1)$ qui doit être une fraction rationnelle à un $C\ln(x^2+1)$ près, on voit que ce n'est pas le cas donc X^2 n'admet pas de primitive élémentaire. Remarque : si on avait voulu intégrer X au lieu de X^2, la même méthode montre que la primitive existe, car au rang 0 il n'y a plus de contraintes sur les ln qu'on peut rajouter.

3.2.2 Extension exponentielle

Si $X = \exp(Y)$ est une exponentielle, on doit résoudre :

$$\sum_j (A_j' + jY'A_j)X^j = \sum_j a_j X^j$$

Ceci va se faire degré par degré :

$$A_j' + jY'A_j = a_j \tag{4}$$

Exemple
Pour calculer $\int a(x)\exp(x^2)$, on a $j = 1$, et on doit résoudre l'équation différentielle :

$$A_1' + 2xA_1 = a(x)$$

Pour $j = 0$, il suffit de faire un appel récursif à l'algorithme de Risch, mais pour $j \neq 0$, la situation se complique ! Notons Z la variable située juste en-dessous de X dans la tour de variables (dans l'exemple ci-dessus $Z = x$), il s'agit de résoudre :

$$y' + fy = g \tag{5}$$

avec f, g élémentaires par rapport à une tour dont le variable au sommet est Z, on cherche y élémentaire par rapport à cette tour (ici $f = jY'$ est une dérivée mais dans certains cas nous devrons résoudre par appel récursif des équations du type ci-dessus où f ne sera pas une dérivée).

Élimination des dénominateurs

Soit P un facteur irréductible du dénominateur de y, notons $\alpha < 0$ la valuation de y par rapport à P, β celle de f, γ celle de g. Si P n'est pas une exponentielle, la valuation de y' est $\alpha - 1$, celle de fy est $\alpha + \beta$. Si $\beta \neq -1$, il n'y a pas de simplification possible dans le membre de gauche donc $\alpha + \min(\beta, -1) = \gamma$. Autrement dit, si $\beta \geq 0$ alors $\alpha = \gamma + 1$ et si $\beta < -1$ alors $\alpha = \gamma - \beta$. On observe que $\gamma < 0$ donc P est un facteur du dénominateur g_d de g. De plus, on va montrer que la valuation α de P dans y est l'opposé de celle de P dans :

$$D = \frac{\gcd(g_d, \partial_Z g_d)}{\gcd(c, \partial_Z c)}, \quad c = \gcd(f_d, g_d) \tag{6}$$

En effet, si $\beta \geq 0$, P ne divise pas f_d donc ne divise pas c, donc la valuation de P dans D est $-\gamma - 1$. Si $\beta < -1$, alors $\alpha = \gamma - \beta < 0$ entraine $-\gamma > -\beta$ donc la valuation de P dans c est $-\beta$ et la valuation de P dans D est $-\gamma - 1 - (-\beta - 1)$.

Si $\beta = -1$, s'il n'y a pas de simplifications dans le membre de gauche pour les termes de plus petite puissance en P, alors $\alpha = \gamma + 1$. S'il y a simplification, on décompose en éléments simples (avec Bézout) puis on ordonne par puissances croissantes de P :

$$y = N_1 P^\alpha + ..., f = N_2 P^{-1} + ...,$$

avec N_1, N_2 de degré plus petit que P, puis on remplace dans (5). On cherche les termes de valuation $\alpha - 1$ en P qui doivent se simplifier :

$$\alpha N_1 P' P^{\alpha-1} + N_2 P^{-1} N_1 P^\alpha = 0$$

donc :

$$N_2 = -\alpha P'$$

ce qui détermine α.

Récapitulons

Si f est une dérivée, alors $\beta = -1$ est exclus et on peut appliquer (6) pour déterminer D. Si f n'est pas une dérivée, on calcule les facteurs de degré 1 de f_d :

$$f_1 = \frac{f_d}{\gcd(f_d, \partial_Z f_d)}$$

on décompose f par Bézout en isolant la partie N/f_1 les α possibles sont alors les racines entières (en t) du résultant en Z de $N - t f_1'$ et f_1, ils correspondent aux facteurs $\gcd(N - \alpha f_1', f_1)$ que l'on retire de f_d pour appliquer (6).

Exemple

Reprenons $y' + 2xy = a(x)$. Si $a(x) = 1$ (résolution de $\int \exp(x^2)$), ou plus généralement si $a(x)$ est un polynôme, alors $D = 1$. Si $a(x) = 1/x^2$, on trouve $D = x$ et on pose $y = xz$, donc $x^2(xz' + z) + 2x^4 z = 1$ soit $x^3 z' + (2x^4 + 1)z = 1$.

Reste le cas où Z est une exponentielle et $P = \exp(z)$. On reprend le même raisonnement, y' a pour valuation $-\alpha < 0$, fy a pour valuation $-\beta - \alpha$, donc si

$\beta > 0$, $\alpha = \gamma$ et si $\beta < 0$, $\alpha = \gamma - \beta$. Si $\beta = 0$, s'il n'y a pas de simplifications du terme de plus bas degré, on est ramené au cas précédent. Si $\beta = 0$ et s'il y a simplification des termes de plus bas degré en Z, notons f_0 le coefficient constant de f par rapport à Z et y_α le coefficient de Z^α dans y, on a

$$y'_\alpha + (\alpha z' + f_0) y_\alpha = 0$$

donc :

$$y_\alpha = \exp(-\alpha z - \int f_0)$$

Comme y_α est élémentaire et indépendant de Z on en déduit par le théorème de structure de Risch que $-\alpha z - \int f_0$ est combinaison linéaire à coefficients rationnels des logarithmes et des arguments des exponentielles de la tour, de plus le coefficient de z doit être nul pour que y_α soit indépendant de Z, ce qui impose la valeur de α (après avoir résolu récursivement le problème d'intégration pour f_0)

Majoration du degré du numérateur de y

En multipliant y par $DZ^{-\alpha}$, puis en réduisant au même dénominateur, on se ramène alors à une équation différentielle à coefficients polynomiaux par rapport à la variable Z dont l'inconnue est un polynôme N :

$$RN' + SN = T \tag{7}$$

On va chercher une majoration sur le degré possible de N puis utiliser l'identité de Bézout pour simplifier cette équation.

On écrit maintenant $N = \sum_{k=0}^{n} N_k Z^k$ et on remplace, il y a à nouveau trois cas selon le type de Z.

Si $Z = x$: cas exponentielle rationnelle

Donc $Z' = 1$, le degré de RN' est $r + n - 1$ (si N est non constant c'est-à-dire si T n'est pas un multiple de S), le degré de SN est $s + n$. Si $r - 1 \neq s$, on en déduit que :

$$n = t - \max(r - 1, s)$$

Si $r - 1 = s$, on peut avoir une simplification du terme de plus haut degré $s + n$ (sinon on est dans le cas précédent) si $nR_r = S_s$ d'où on déduit le degré n de N.

Par exemple, pour $y' + 2xy = T$ ou pour $x^3 z' + (2x^4 + 1)z = 1$ on a $r = s - 1$ donc $n + s = t$, donc pas de solution dans le deuxième cas, dans le premier cas il ne peut y avoir de solutions que si $t \geq s$, en particulier il n'y a pas de solution pour $t = 1$, on a donc démontré que $\int \exp(x^2)$ n'admet pas de primitive élémentaire.

Si $Z = \exp(z)$: cas exponentielle d'exponentielle

Ici les N_k peuvent ne pas être constants, on a :

$$N' = \sum_{k=0}^{n} (N'_k + kN_k z') Z^k$$

Comme on l'a déjà observé, $N'_n + nN_n z' \neq 0$, donc le degré de N' est égal au degré de N. On a donc trois cas :

- si $r \neq s$, alors $n = t - \max(r, s)$
- si $r = s$ et les termes de plus haut degré du membre de gauche ne se simplifient pas, alors, $n = t - r = t - s$.
- si $r = s$ et s'il y a simplification, alors :

  $$R_r(N_n' + nN_nz') + S_sN_n = 0$$

  donc :

  $$N_n' + (\frac{S_s}{R_r} + nz')N_n = 0$$

  et :

  $$N_n = C\exp(-nz - \int \frac{S_s}{R_r})$$

  On appelle alors l'algorithme de Risch avec une variable de moins (S_s et R_r ne dépendent plus de Z) pour calculer $I = \int S_s/R_r$. Il s'agit alors de trouver n tel que l'exponentielle précédente soit élémentaire et indépendante de la variable Z. Le théorème de structure de Risch implique que $-nz - \int S_s/R_r$ est combinaison linéaire à coefficients rationnels des logarithmes et des arguments des exponentielles de autres variables de la tour (jusqu'à z non compris). Ceci permet de déterminer n de manière unique (c'est le coefficient rationnel de $\int S_s/R_r$ en z).

Si $Z = \ln(z)$: exponentielle de logarithme

Ici aussi, les N_k peuvent ne pas être constants, on a :

$$N' = \sum_{k=0}^{n}(N_k'Z^k + kN_k\frac{z'}{z}Z^{k-1})$$

Si N_n n'est pas constant, le terme de plus haut degré de RN' est $N_n'R_rZ^{n+r}$, si N_n est constant, le terme de plus haut degré de RN' est $R_r(nN_nz'/z + N_{n-1}')Z^{r-1}$ qui est non nul (sinon $z'/z = CN_{n-1}'$ et $z = \exp(CN_{n-1})$ serait une exponentielle). Le terme de plus haut degré de SN est $N_nS_sZ^{n+s}$.

- Si $r < s$ ou si $r = s$ sans simplifications, alors $n = t - s$.
- Si $r > s+1$ ou si $r = s+1$ sans simplifications, alors $\deg(N') = t - r$ donc $n = t - r$ ou $n = t - r + 1$.
- Si $r = s + 1$, et s'il y a simplifications, alors N_n est constant et :

  $$R_r(nN_nz'/z + N_{n-1}') + S_sN_n = 0$$

  alors $N_{n-1} = C(-\int N_nS_s/R_r - nN_n\ln(z))$ doit être élémentaire et indépendante de Z donc $\int S_s/R_r$ est élémentaire, on détermine n en éliminant le coefficient de $Z = \ln(z)$ provenant de $\int S_s/R_r$.
- Si $r = s$, et s'il y a simplification des termes de plus haut degré du membre de gauche, alors $N_n'R_r + N_nS_s = 0$ donc $N_n = \exp(-\int S_s/R_r)$ est élémentaire et indépendante de Z. On peut donc changer d'inconnue $N = N_nM$ sans changer le fait que M est un polynôme de même degré que N. On se ramène alors à une équation du même type

  $$RM' + (S - R\frac{S_s}{R_r})M = \frac{T}{N_n}$$

mais avec s diminué de 1 au moins.

Réduction (algorithme SPDE de Rothstein)

On observe d'abord que si R et S ont un facteur en commun, alors ce facteur divise T car N' et N sont des polynômes en Z. On peut donc quitte à simplifier par $\gcd(R,S)$ se ramener au cas où R et S sont premiers entre eux, il existe donc deux polynômes U et V tels que :

$$RU + SV = T, \quad \deg(V) < \deg(R) \tag{8}$$

En soustrayant (8) de (7), on montre que R divise $N - V$. Soit $H = (N - V)/R$. Alors $N = RH + V$ donc

$$R(RH' + R'H + V') + SRH + SV = T = RU + SV$$

donc après simplification par SV et division par R, H vérifie l'équation :

$$RH' + (S + R')H = U - V'$$

C'est une équation du même type mais avec $\deg(H)$=$\deg(N)$-$\deg(R)$ ou $H = 0$ (si $N = V$). Donc si $\deg(R) > 0$, au bout d'un nombre fini d'étapes on doit tomber sur un second membre nul ou des simplifications de R avec $S + R'$ telles que R simplifié soit constant en Z.

Résolution

Si R est constant par rapport à Z, on simplifie par R et on doit résoudre

$$N' + SN = T$$

Si $S = 0$, c'est un problème d'intégration. Supposons donc que $S \neq 0$. Si S est non constant par rapport à Z ou si $Z = x$, le degré de N' est strictement inférieur au degré de SN, on peut donc facilement résoudre. Reste le cas où $S = b$ est constant non nul par rapport à Z et Z est une exponentielle ou un logarithme.

Si $Z = \exp(z)$

On a alors doit alors résoudre

$$N_k' + kN_k z' + bN_k = T_k$$

c'est une équation différentielle de Risch mais avec une variable de moins.

Si $Z = \ln(z)$

On doit alors résoudre

$$N_k' + (k+1)N_{k+1}\frac{z'}{z} + bN_k = T_k$$

c'est aussi une équation différentielle de Risch avec une variable de moins.

Exemple

Voyons comment on intègre x^n avec n un paramètre par l'algorithme de Risch (cela illustre les possibilités couvertes par l'algorithme mais aussi l'efficacité des méthodes traditionnelles d'intégration lorsqu'elles s'appliquent). On écrit d'abord $x^n = e^{n\ln(x)}$, donc la tour de variables est $\{x, Z = \ln(x), X = e^{n\ln(x)}\}$, il s'agit donc d'intégrer X qui est un polynôme généralisé. On cherche donc A_1 solution de l'équation différentielle de Risch

$$A_1' + n/x A_1 = 1$$

Par rapport à $Z = \ln(x)$ la fonction $f = n/x$ est un polynôme, donc on applique le dernier cas ci-dessus, A_1 est aussi indépendant de $\ln(x)$ et on se ramène à résoudre la même équation mais avec comme variable principale x et non Z. Cette fois, il y a un dénominateur x en f. Si A_1 possède un dénominateur, il faut qu'il y ait annulation du terme de plus bas degré en x car le second membre n'a pas de dénominateur, on obtient $n + \alpha = 0$ qui n'a pas de solution, donc A_1 est un polynôme en x et l'équation se réécrit en :

$$xA_1' + nA_1 = x$$

On majore alors le degré en x de A_1 par 1, car il ne peut pas y avoir d'annulation de terme de plus grand degré. Ensuite, on peut appliquer l'algorithme SPDE de Rothstein pour réduire le degré, ou ici conclure à la main, x divise nA_1 donc $A_1 = Cx$ qu'on remplace et $C = 1/(n+1)$. Finalement, $A_1 = x/(n+1)$ et $\int x^n = x/(n+1)x^n$.

4 Quelques références

- M. Bronstein :
  Symbolic Integration I, Transcendental functions, Springer
- M. Bronstein :
  Integration tutorial,
  `http://www-sop.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/publications/mb_papers.html`
- J.H. Davenport, Y. Siret, E. Tournier :
  Calcul formel : Systèmes et algorithmes de manipulations algébriques
- R. Risch :
  les références des articles originaux de Risch sont dans le "Integration tutorial" de Bronstein.
- B. Trager :
  PHD thesis MIT, 1984
- On peut lire en clair le code source de l'implémentation en MuPAD (sous Unix, désarchiver le fichier `lib.tar` du répertoire `/usr/local/MuPAD/share/lib` et regarder dans le sous-répertoire `lib/INTLIB`)

Remerciements

Je remercie Renée De Graeve, Roland Bacher et Gérard Vinel pour leur patiente relecture et corrections de ce manuscrit.