Capes 2011 et Xcas

Renee.Degraeve@wanadoo.fr

2010

Table des matières

1 Thème : les transformations

1.1 L'exercice

Soit ABC un triangle isocèle en A et soit E un point de $[AB]$. On considère le point F de $[AC]$ tel que $AF = BE$. On note (D) la médiatrice de $[EF]$. On se propose de montrer que, lorsque E décrit $[AB]$, la médiatrice de $[EF]$ passe par un point fixe.

1. Mettre en évidence la propriété à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Démontrer la conjecture obtenue dans la question précédente.

1.2 La solution proposée par un élève à la question 2)

Lorsque E est en B, F est en A et donc la médiatrice de [EF] est la médiatrice de [AB].

Lorsque E est en A, F est en C et donc la médiatrice de [EF] est la médiatrice de [AC].

Le point fixe est donc le point d'intersection des médiatrices de [AB] et [AC] c'est à dire le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1.3 Le travail à exposer devant le jury

1. Indiquer les compétences, les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.
2. Analyser la réponse proposée par l'élève.
3. Donner une rédaction compléte d'un corrigé de la question 2) en considérant une transformation qui convient.
4. Proposer plusieurs exercices faisant appel aux transformations en tant qu'outils de démonstration.

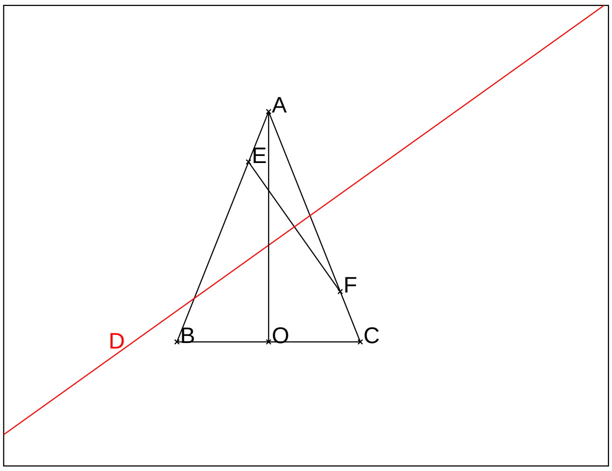
1.4 Solution de l'exercice avec `Xcas`

Pour faire la figure, on ouvre un niveau de géométrie (`Alt+g`) et on tape (O est le milieu de BC) :

```
A:=point(5*i);
B:=point(-2);
C:=point(2);
triangle(A,B,C);
O:=milieu(B,C);
t:=element(0..1);
E:=element(segment(B,A),t);
F:=inter_unique(segment(A,C),cercle(C,longueur(A,E)));
segment(E,F);
```

```
D:=mediatrice(E,F,affichage=1);
segment(A,O);
```

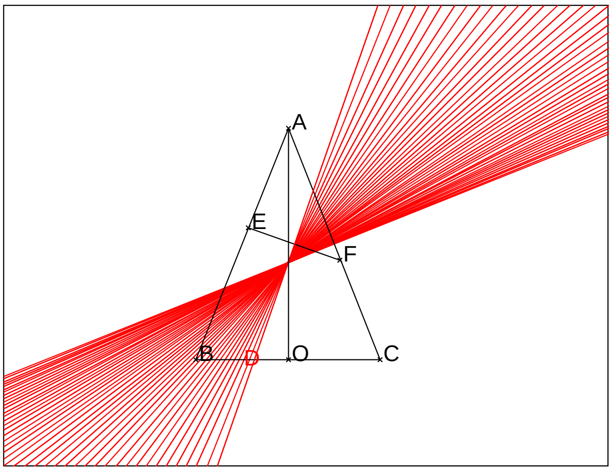
On obtient :



et si on rajoute la commande :

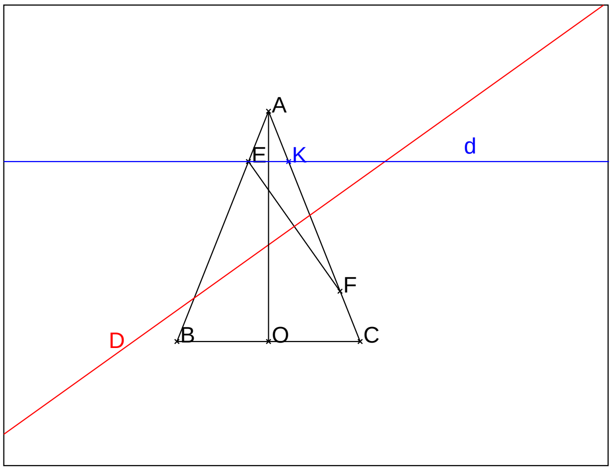
```
trace(D)
```

On obtient :

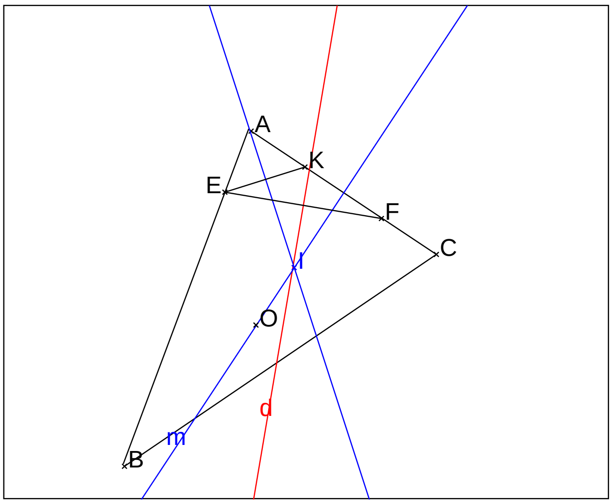


Puis on fait bouger `t` à l'aide du curseur et on voit que la médiatrice de `EF`, semble passer par un point fixe `I` situé sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
Il y a différentes façons de continuer.
Par exemple, au départ sans utiliser de transformation) :

- On cherche un triangle de côté EF et qui a comme médiatrice, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
  Par exemple, on définit le point K sur AC tel que $AK = AE$.



Les médiatrices du triangle EFK sont D (la médiatrice de EF), AO (la médiatrice de EK) et la médiatrice de KF. Le triangle AEK est isocèle donc $AK = FC$ donc la médiatrice de KF est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. $AK = CF$ donc la médiatrice de KF est aussi la médiatrice de AC.
Les médiatrices du triangle EFK se coupent en un même point donc la médiatrice de EK passe par le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la médiatrice de AC. On voit avec cette démonstration que l'hypothèse "le triangle ABC est isocèle" ne sert pas.

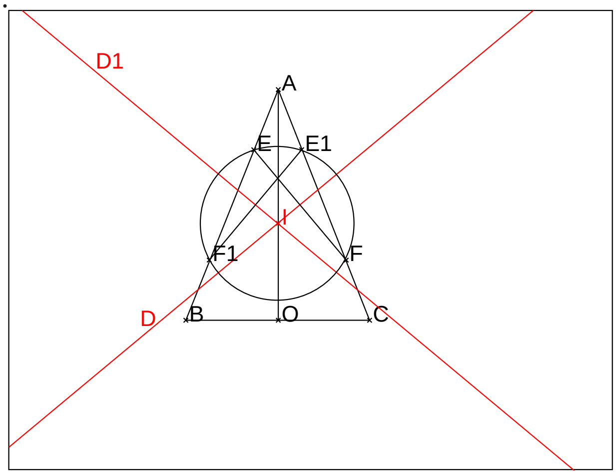


– Si le triangle ABC est isocèle, pour des raisons de symétrie par rapport à OA, on définit $E1$ et $F1$ sumétriques de E et F par rapport à OA ainsi que $D1$ la médiatrice de $E1F1$:

```
E1:=symetrie(droite(A,O),E);segment(A,O);
F1:=symetrie(droite(A,O),F);
segment(E1,F1);
D1:=mediatrice(E1,F1,affichage=1);
```

```
I:=inter_unique(D,D1,affichage=1);
```

On obtient :

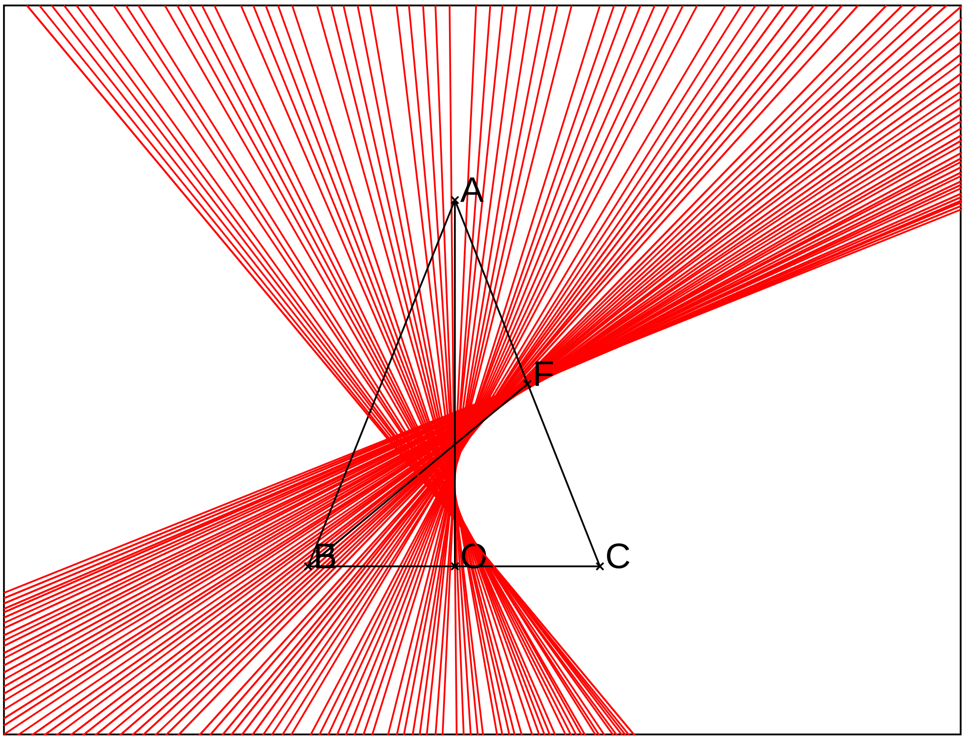


Puis on fait bouger `t` à l'aide du curseur et on voit que le point `I` intersection des médiatrices de EF et de `E1F1` est fixe.
Comment définir ce point ? I est le centre du cercle circonscrit à $EF1E1F$ donc c'est aussi l'interscetion des médiatrices de `EF1` et de `E1F`.
Puisque $AE = BF1$ la médiatrice de `EF1` est aussi la médiatrice de AB.
Puisque $AE1 = CF$ la médiatrice de `E1F` est aussi la médiatrice de AC donc `I` intersection des médiatrices de AB et de AC est fixe et c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
On tape alors :
`J :=centre(circonscrit(A,B,C));` pour voir que `I` et J sont confondus.

– On utilise des transformations (car c'est le thème !)
On cherche les transformations qui permettent de transformer E en F.
On effectue successivement la symétrie $s1$ par rapport à AO bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ suivi de la symétrie $s2$ par rapport à la médiatrice de AC.
On a :
$s1(E) = K = E1$ (avec les notations précédentes) et
$s2(E1) = F$ car $AE2 = CF$.
Donc $s2(s1(E)) = F$. La composition de 2 symétries par rapport à des droites concourantes est une rotation de centre le point de concours de ces droites. Donc ici $s2 \circ s1$ est une rotation de centre le point de concours de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la médiatrice de AC.
Donc le centre de cette rotation est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC lorsque ABC est isocèle et sinon, ce centre n'a pas de nom c'est le point de concours de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la médiatrice de AC.

1.5 Analyse de la réponse proposée par l'élève

Dans la réponse proposée par l'élève :
Le point fixe est donc le point d'intersection des médiatrices de [AB] et [AC] c'est à dire le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. il faut contester le *donc* en le remplaçant la réponse par :
si la médiatrice de EF passe par un point fixe, ce point fixe doit être le point d'intersection des médiatrices de [AB] et [AC] c'est à dire le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Il reste à le démontrer
Pour convaincre l'éléve on peut refaire le même exercice avec F sur AC mais avec $CF = AE/2$. On cherche les positions limites et cela ne donne rien car la médiatrice de EF ne passe pas par un point fixe....
On fait la figure correspondante en mettant pour définir `F` :
`F :=inter_unique(segment(A,C),cercle(C,longueur(A,E)/2));`
et on observe la trace de `D`, on obtient :



une belle enveloppe ! ! !

1.6 Les exercices faisant appel aux transformations

En tant qu'outils de démonstration, les exercices faisant appel aux transformations sont difficiles car une transformation n'est souvent pas visible....
Par contre quand on a trouvé la transformation, tout devient limpide et facile...
Voici quelques exercices classiques (On se reportera au manuel de géométrie de

`Xcas` pour les démonstrations) :

Problèmes de construction

- Construire un triangle équilatéral ABC de sommet A donné et ayant ses sommets B et C sur 2 droites données du plan.
- Construire un triangle équilatéral ABC ayant ses sommets A, B et C sur 3 droites parallèles données du plan.

Le théorème $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$

Soit un triangle A, B, C et soientt $A1, B1, C1$ les milieux respectifs de BC, AC, AB.
Soient G son centre de gravité, H son orthocentre et O le centre de son cercle circonscrit.
L'homothétie h de centre G et de rapport -2 transforme $A1$ en A, (resp $B1$ en B) et donc puisque l'homothétie conserve les angles, h transforme la médiatrice de BC en la hauteur issue de A (resp donc transforme la médiatrice de AC en la hauteur issue de B) donc transforme le centre le centre O de son cercle circonscrit en l'orthocentre H donc :
$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$

Le théorème de 1968

Soit un triangle quelconque direct ABC.
On construit sur les côtés du triangle ABC les carrés directs $CBDE$, $ACFG$ et $BAKH$, puis les parallélogrammes $FCDJ$ et $EBKL$.
Alors le triangle AJL est isocèle rectangle direct.

Le théorème de Napoléon

Soit un triangle quelconque ABC.
On construit à l'extérieur du triangle ABC les triangles équilatèraux BAD, CBE et ACF qui ont pour centre de gravité : $G1$, $G2$ et $G3$.
On a les propriétés suivantes :
Le triangle $G1G2G3$ est équilatéral et a même centre de gravité que le triangle ABC.
Les droites AE, DC, BF sont concourantes en un point T qui s'appelle le point de Torricelli.
Le point T est aussi le point de concours des cercles circonscrits aux triangles BAD, CBE et ACF.

2 Thème : fonctions

2.1 L'exercice

On trouve dans le manuel Déclic - Terminale S, enseignement obligatoire (Hachette 2006), dans le chapitre « Fonctions - Variations et continuité », l'énigme suivante :

$\boxed{\text{Le marcheur}}$

Un marcheur a parcouru 10 km en une heure. Existe-t-il un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km ?

2.2 Un extrait de manuel

Pour guider les élèves dans la résolution de l'énigme, le manuel Déclic propose l'exercice ci-dessous.
Pour t appartenant à l'intervalle [0 ;1], on désigne par $f(t)$ la distance, en kilomètres, parcourue à l'instant t, en heures.
Il est naturel de faire l'hypothèse que f est une fonction continue sur [0 ;1].

1. Préciser $f(0)$ et $f(1)$.
2. Écrire l'équation traduisant le problème
3. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\frac{1}{2}]$ par :

$$g(t) = f(t + \frac{1}{2}) - f(t)$$

   Démontrer que l'équation $g(t) = 5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;\frac{1}{2}]$
4. Conclulre

2.3 Le travail à exposer devant le jury

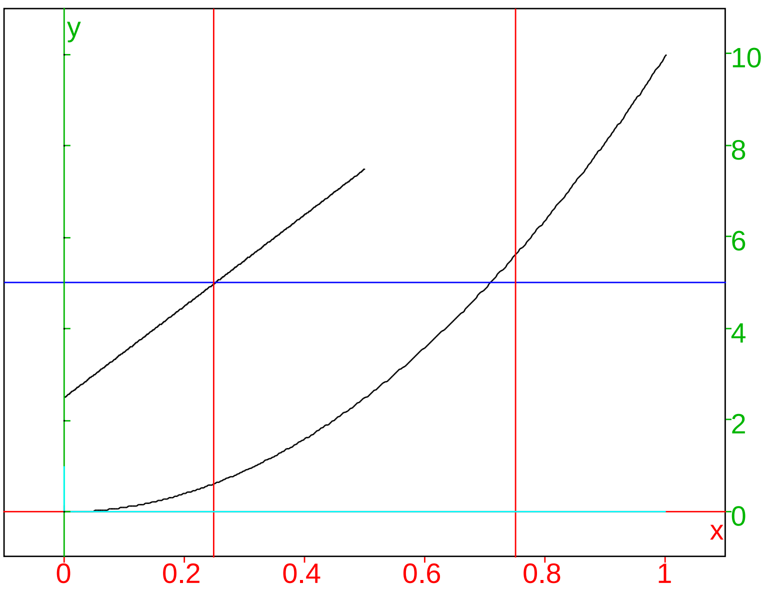
1. Quels sont les savoirs et les méthodes mis en jeu par l'énigme initiale ?
2. Comment peut-on envisager d'introduire dans une classe l'exercice destiné aux élèves ?
   Citer quelques difficultés que peuvent éprouver certains élèves face à cette situation. Quelles autres formes d'aide sont envisageables ?
3. Présenter les explications que vous donneriez à une classe au moment de corriger la question 2. de l'exercice.
4. Proposer plusieurs problèmes à support concret faisant appel à la continuité ou à la dérivabilité des fonctions.

2.4 Solution de l'exercice avec Xcas

On a : $f(0) = 0$ et $f(1) = 10$ et f est continue et croissante.
On cherche a pour que :
$g(a) = f(a + 1/2) - f(a) = 5$ avec $g(t) = f(t + \frac{1}{2}) - f(t)$.
On a :
$g(0) = f(1/2)$ et $g(1/2) = 10 - f(1/2)$
Si $g(0) = f(1/2) > 5$ alors $g(1/2) = (10 - f(1/2)) \leq 5$ et alors $5 \in [g(1/2); g(0)]$ et comme g est continue d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe a dans l'intervalle $[0\,;\frac{1}{2}]$ tel que $g(a) = 5$.
Si $g(0) = f(1/2) < 5$ alors $g(1/2) = (10 - f(1/2)) \geq 5$ et alors $5 \in [g(0); g(1/2)]$ et comme g est continue d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe a dans l'intervalle $[0\,;\frac{1}{2}]$ tel que $g(a) = 5$. Pour que l'exercice soit moins théorique on va faire cet exercice sur 3 exemples en prenant succéssivement :

– f1(x) :=10*x^2

  On tape dans un écran de géométrie :
  ```
  f1(x):=10*x^2;
  plotfunc(f1(x),x=0..1);
  g1(x):=f1(x+0.5)-f1(x);
  plotfunc(g1(x),x=0..1/2);
  droite(y=5,affichage=4);
  a1:=solve(g1(x)=5,x)[0];
  droite(x=a1,affichage=1);
  droite(x=a1+0.5,affichage=1);
  f1(a1+0.5)-f1(a1);
  ```
  On obtient :
  ```
  a1=0.25
  ```

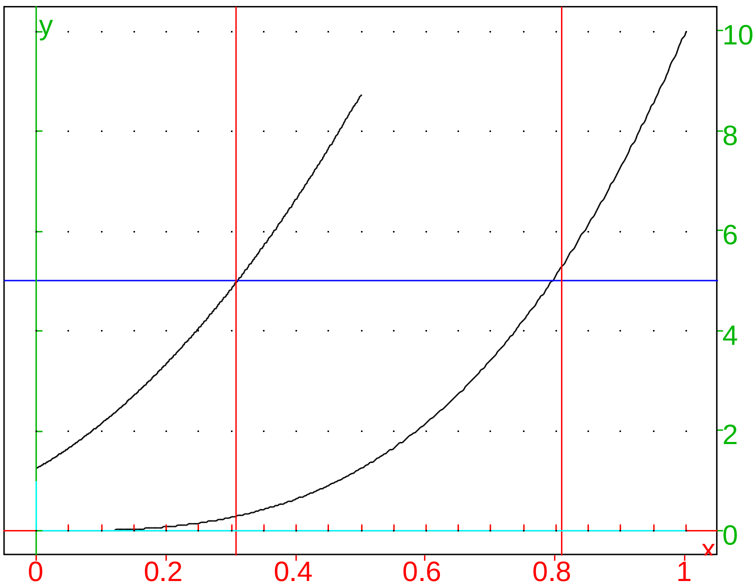


– f2(x) :=10*xˆ3
On tape dans un écran de géométrie :

```
f2(x):=10*x^3;
plotfunc(f2(x),x=0..1);
g2(x):=f2(x+0.5)-f2(x);
plotfunc(g2(x),x=0..1/2);
droite(y=5,affichage=4);
a2:=solve(g2(x)=5,x)[1]
droite(x=a2,affichage=1);
droite(x=a2+0.5,affichage=1);
f2(a2+0.5)-f2(a2);
```

On obtient :

```
a2=0.309016994375
```

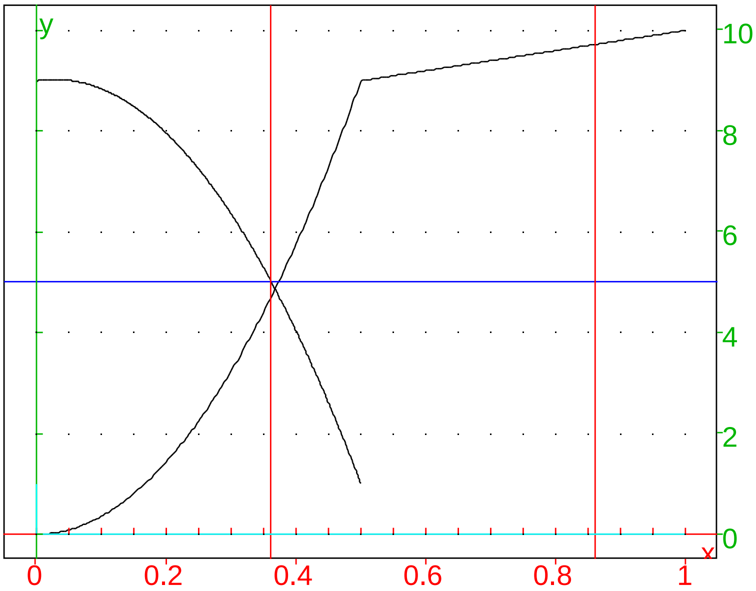


– f3(x) :=ifte(x¡0.5,36*xˆ2,2*x+8)
On cherche l'expression de $g_3(x) = f_3(x + 1/2) - f_3(x)$ pour $x \in [0; 1/2]$.
On a donc :
$g_3(x) = 2(x + 1/2) + 8 - 36x^2 = -36x^2 + 2x + 9$.
On tape dans un écran de géométrie :

```
f3(x):=ifte(x<0.5,36*x^2,8+2*x);
plotfunc(f3(x),x=0..1);
g3(x):=-36*x^2+2*x+9.));
plotfunc(g3(x),x=0..1/2);
droite(y=5,affichage=4);
a3:=solve(g3(x)=5,x)[1];
droite(x=a3,affichage=1);
droite(x=a3+0.5,affichage=1);
f3(a3+0.5)-f3(a3);
```

On obtient :

```
a3=0.362266516078
```



3 Thème : géométrie plane

3.1 L'exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
On considère le carré $ABCD$ et les points E et F tels que ABE et CBF soient des triangles équilatéraux directs.

1. Déterminer les coordonnées des points E et F .
2. Montrer que les points D, E et F sont alignés.
3. Calculer les distances DE, EF et DF et en déduire une égalité algébrique.

3.2 Un extrait des programmes officiels

Mathématiques - Terminale scientifique arrêté du 20-7-2001.
BO no 4 du 30 août 2001(...)

II. 2 Géométrie L'objectif de ce paragraphe est d'entretenir la pratique des objets usuels du plan et de l'espace et de fournir quelques notions nouvelles permettant de parfaire l'approche entreprise dans les classe antérieures sur la géométrie vectorielle ou repérée. Dans le prolongement du repérage polaire introduit en première, les nombres complexes, outre leur intérêt historique, algébrique et interdisciplinaire pour la poursuite des études, fournissent un outil efficace dans les problèmes faisant intervenir les transformations planes. L'extension à l'espace du produit scalaire permet de résoudre de nouveaux problèmes et, de ce fait, d'approfondir la vision de l'espace.
Bien que, comme dans les programmes antérieurs, le libellé de cette partie soit relativement concis, on prendra le temps de mettre en oeuvre toutes les connaissances de géométrie de l'ensemble du cursus scolaire pour l'étude de configurations du plan ou de l'espace, le calcul de distances, d'angles, d'aires et de volumes, etc. Ces travaux seront répartis tout au long de l'année afin que les élèves acquièrent une certaine familiarité avec le domaine géométrique ; on privilégiera les problèmes dont les procédés de résolution peuvent avoir valeur de méthode et on entraînera les élèves à choisir l'outil de résolution le plus pertinent parmi ceux dont ils disposent (propriétés des configurations, calcul vectoriel, calcul barycentrique, transformations, nombres complexes, géométrie analytique).

3.3 Le travail à exposer devant le jury

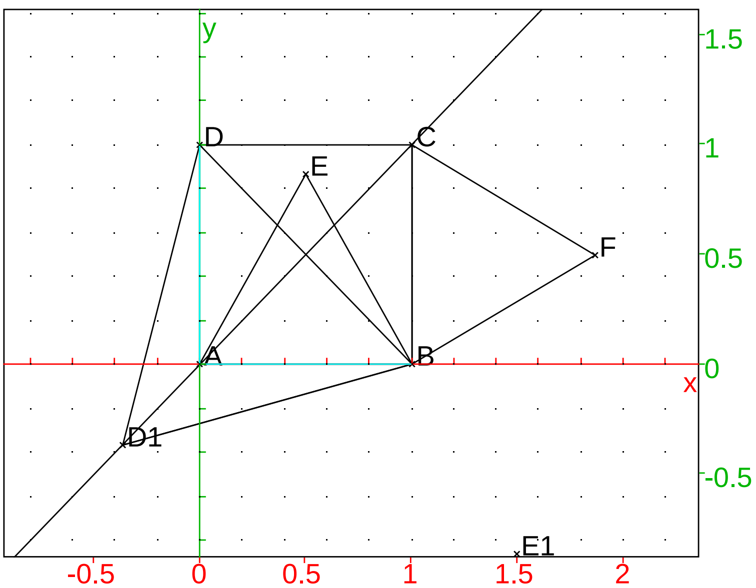
1. Pour quelles raisons l'exercice s'inscrit-il bien dans le cadre des objectifs du programme ?
2. Présenter une solution de la question 3) de l'exercice.
3. Donner un énoncé permettant de traiter la question 2) par une autre méthode.
4. Proposer plusieurs exercices de géométrie plane entraînant les élèves à choisir l'outil de résolution le plus pertinent.

3.4 Solution de l'exercice avec les complexes

Le triangle ABE est équilatéral de côté 1, donc
E a comme affixe : $\exp(i * \pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2$
On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$.
$\overrightarrow{AB}$ a comme affixe 1 et $\overrightarrow{BE}$ a comme affixe $\exp(i * \pi/3) = i/2 + \sqrt{3}/2$ donc
F a comme affixe : $1 + \sqrt{3}/2 + i/2$
donc $EF^2 = (1/2 + \sqrt{3}/2)^2 + (-1/2 + \sqrt{3}/2)^2 = 2$ (ce qui etait évident puisque EF est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 1).
$\overrightarrow{DE}$ a donc comme affixe $1/2 + i(\sqrt{3}/2 - 1)$
$\overrightarrow{DF}$ a donc comme affixe :$1 + \sqrt{3}/2 - i/2)$
On a :
$1 + \sqrt{3}/2 - i/2) = (2 + \sqrt{3})(1/2 - i/2/(2 + \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})(1/2 - i/2(2 - \sqrt{3})$
donc $\overrightarrow{DF} = (2 + \sqrt{3})\overrightarrow{DE})$
c'est à dire que D, E, F sont alignés.
On a donc :
$\overrightarrow{DF} = (2 + \sqrt{3})\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{DE} + (2 + \sqrt{3})\overrightarrow{DE} = (1 + \sqrt{3})\overrightarrow{DE}$
$EF = \sqrt{2}$ donc $DE = \sqrt{2}(\sqrt{(3 - 1)})/2$ et $DF = (\sqrt{3} + 2)DE = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})/2$
donc $\overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF}$

3.5 Solution géométrique de l'exercice

La rotation de centre B et d'angle $\pi/3$ transforme :
E en A, F en C et D en $D1$.
Le triangle $D1DB$ est donc équilatéral donc $D1$ est sur la médiatrice de DB. Puisque $ABCD$ est un carré ses diagonales se coupent en leur milieu I et sont perpendiculaires, AC est la médiatrice de DB. Donc $D1, A, C$ sont alignés.



On se sert des propiétés des rotations :

1. La transformation réciproque d'une rotation est une rotation.
2. Une rotation transforme une droite en une droite.
3. Une rotation conserve les longueurs.

La rotation de centre B et d'angle $-\pi/3$ transforme le point $x;y$ en :
$[[1/2, sqrt(3)/2], [-sqrt(3)/2, 1/2]] * [x-1, y] + [1, 0]$.
E est le transformé de $A=(0;0)$ par la rotation de centre B et d'angle $-\pi/3$ donc E a pour coordonnées :
`[[1/2,sqrt(3)/2],[-sqrt(3)/2,1/2]] *[-1,0]+[1,0]`
c'est à dire `[1/2,(sqrt(3))/2]`
F est le transformé de $C=(1;1)$ par la rotation de centre B et d'angle $-\pi/3$ donc F a pour coordonnées :
`[[1/2,sqrt(3)/2],[-sqrt(3)/2,1/2]] *[0,1]+[1,0]`
c'est à dire `[(sqrt(3))/2+1,1/2]`
$D1, A, C$ sont alignés donc D, E, F sont alignés.
$D1, A, C$ sont sont alignés dans cet ordre donc D, E, F sont alignés dans cet ordre.
$D1I = \sqrt{2} * \sqrt{3}/2$ comme hauteur d'un triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$.
$IA = IC = \sqrt{2}/2$ comme demi-diagonale d'un carré de côté 1.
$DF = D1C = D1I + IC = \sqrt{6}/2 + \sqrt{2}/2$
$DE = D1A = D1I - IA = \sqrt{6}/2 - \sqrt{2}/2$
$EF = AC = \sqrt{2}$

3.6 Solution de l'exercice avec la trigonométrie

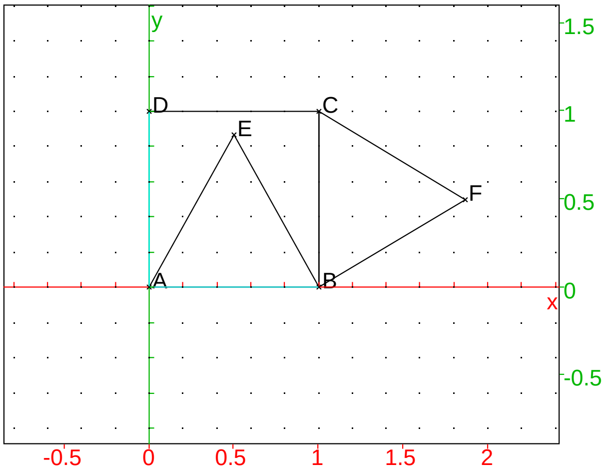
Dans le triangle BEF, l'angle B vaut $\pi/2$ et $BF = BE = 1$ donc $EF^2 = BF^2 + BE^2 = 2$.
Donc $EF = \sqrt{2}$
Dans le triangle ADE, l'angle A vaut $\pi/6$ et $AD = AE = 1$ donc :
$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD * AE * \cos(\pi/6) = 2 - \sqrt{3}$.
Donc $DE = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$
Dans le triangle CDF, l'angle A vaut $\pi/2 + \pi/3$ et $CD = CF = 1$ donc :
$DF^2 = CD^2 + CF^2 + 2CD * CF * \sin(\pi/3) = 2 + \sqrt{3}$.
Donc $DF = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$

3.7 Solution de l'exercice avec `Xcas`

On tape dans un écran de géométrie :

```
A:=point(0);
B:=point(1);
carre(A,B,C,D);
triangle_equilateral(A,B,E);
triangle_equilateral(C,B,F);
```

On obtient :



On tape :

`coordonnees(E);`

On obtient : `[1/2,(sqrt(3))/2]`

On tape pour avoir l'affixe de E :

`normal(affixe(E));`

On obtient : `((i)*sqrt(3)+1)/2`

On tape :

`coordonnees(F);`

On obtient : `[1+(sqrt(3))/2,1/2]`

On tape pour avoir l'affixe de F :

`normal(affixe(F));`

On obtient : `sqrt(3)+2+i)/2`

On tape :

`est_aligne(D,E,F);`

On obtient : `1`

On tape :

`normal(longueur2(D,E));`

On obtient : `-sqrt(3)+2`

On a puisque $2^2 - 3 = 1$ est un carré parfait :

$\sqrt{(2-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{(2+1)} - \sqrt{(2-1)})$ et

$\sqrt{(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{(2+1)} + \sqrt{(2-1)})$ donc $DE = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/2$

On tape pour avoir l'affixe de $\overrightarrow{DE}$:

`normal(E-D);`

On obtient : `((i)*sqrt(3)+1-2*i)/2`

On tape pour avoir la norme au carré de $\overrightarrow{DE}$:

`normal(abs(E-D)^2);`

On obtient : `-sqrt(3)+2`

On tape :

```
normal(longueur2(E,F));
```

On obtient : `2` donc $EF=\sqrt{2}$

On tape pour avoir la norme de $\overrightarrow{EF}$:

```
normal(abs(F-E));
```

On obtient : `sqrt(2)`

On tape :

```
normal(longueur2(D,F));
```

On obtient : `sqrt(3)+2` donc $DF=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)/2$

donc $\overline{DF}=\overline{DE}+\overline{EF}$

On tape pour avoir l'affixe de $\overrightarrow{DF}$:

```
normal(F-D);
```

On obtient : `(sqrt(3)+2-i)/2`

On tape pour avoir la norme au carré de $\overrightarrow{DF}$:

```
normal(abs(F-D)^2);
```

On obtient : `sqrt(3)+2`

Remarque

L'égalité algébrique peut se déduire du fait que D, E, F sont alignés. En effet : E se trouve à l'intérieur du carré $ABCD$ donc dans le même demi-plan limité par BC que D alors que F se trouve dans l'autre demi-plan, donc D, E, F sont dans cet ordre sur la droite DE

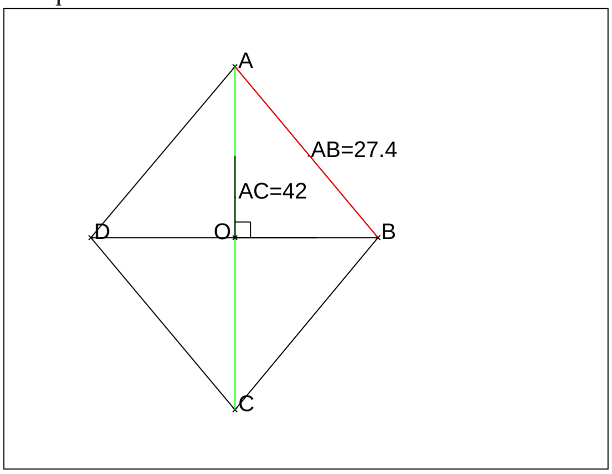
4 Thème : géométrie au collège

4.1 L'exercice

1. Un losange $ABCD$ a pour côté 27,4 cm.La diagonale $[AC]$ mesure 42 cm. Combien mesure l'autre diagonale ?
2. E et F désignent les points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[CD]$ tels que $AE = \frac{AB}{3}$ et $CF = \frac{CD}{3}$. La droite (EF) coupe (AD) en I et (BC) en J.
   Démontrer que BDI et BDJ sont des triangles rectangles.

4.2 La réponse d'un élève à la question 1)

$27.4^2 - 21^2 = 309.76$
C'est l'aire OB^2
$\sqrt{309.76} = 17.6$
$17.6 * 2 = 35.2$ L'autre diagonale mesure :35.2
Croquis :



4.3 Le travail à exposer devant le jury

1. Analyser la production de l'élève selon les quatre compétences suivantes :
   – rechercher et organiser l'information ;
   – calculer, mesurer, appliquer les consignes ;
   – engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer ;
   – communiquer à l'aide d'un langage mathématique adapté.
2. Présenter une animation qui permettrait d'introduire la question 2) dans un contexte plus général. Donner une correction écrite détaillée de celle-ci en précisant le public visé.
3. Proposer plusieurs exercices mettant en jeu les grands théorèmes de géométrie étudiés au collège.

4.4 La production de l'élève

Il faut que l'élève cite les théorèmes :

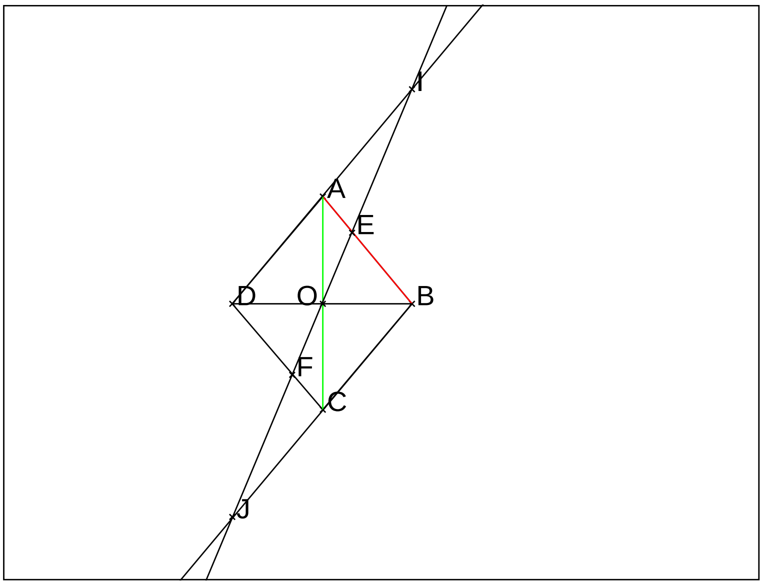
- Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires
- Le théorème de Pythagore

L'élève doit préciser que l'unité choisie est ici le cm et dire :
l'aire OB^2 est de $27.4^2 - 21^2 = 309.76$ cm
donc OB mesure $\sqrt{309.76} = 17.6$ cm et donc l'autre diagonale mesure 35.2 cm.
On remarque que $17.6^2 = 309.76$ donc le calcul est exact.

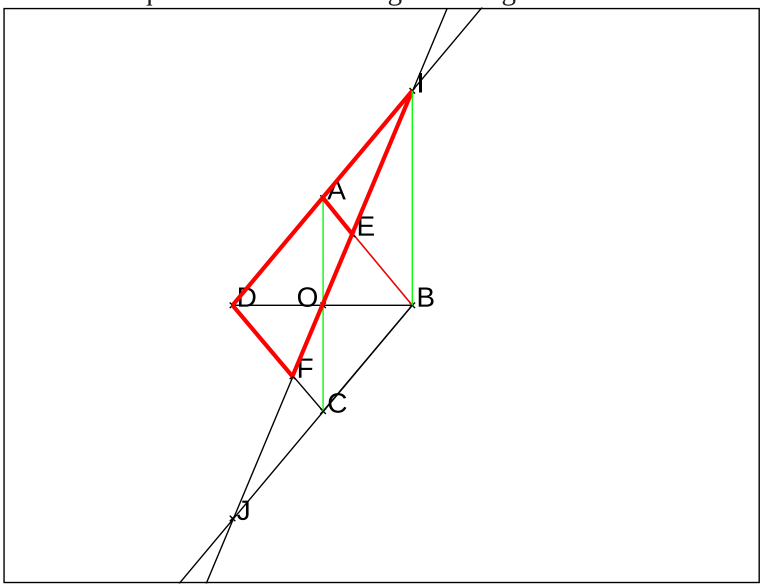
4.5 Solution de l'exercice avec `Xcas`

On tape dans un niveau de géométrie :

```
A:=point(0,21);
B:=point(17.6);
C:=point(0,-21);
D:=point(-17.6);
polygone(A,B,C,D);
O:=point(0);
E:=point(17.6/3,14);
F:=point(-17.6/3,-14);
d:=droite(E,F):;d;
d1:=demi_droite(D,A):;d1;
d2:=demi_droite(B,C):;d2;
I:=inter_unique(d,d1);
J:=inter_unique(d,d2);
```

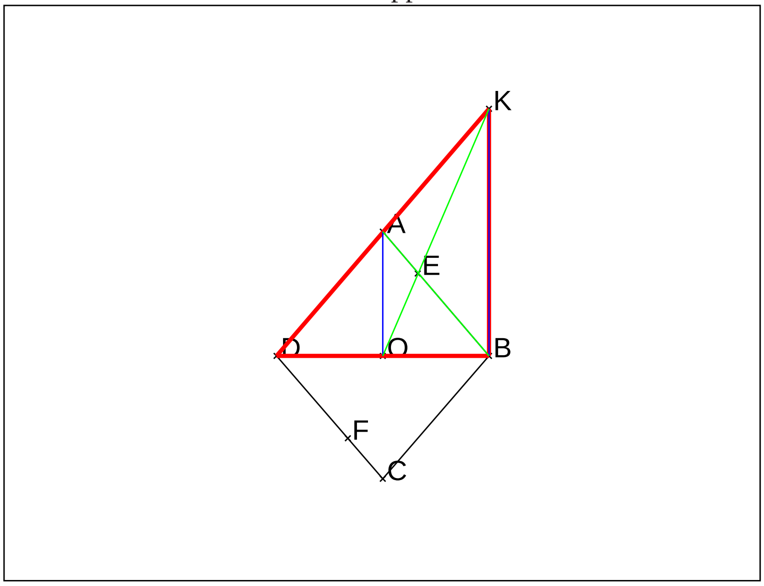


- **Une démonstration (public collège)**
  $AECF$ est un parallélogramme ($AE = CF$ et $AE//CF$) donc E et F sont symétriques par rapport à O milieu de AC
  Les droites DA et BC sont symétriques par rapport à O
  donc I et J sont symétriques par rapport à O
  BDI et BDJ sont des triangles symétriques par rapport à O. Il suffit donc de montrer que BDI est un triangle rectangle.

  Puisque $AB = DC$, $AE = AB/3$ et $CF = DC/3$ on a $DF = 2AE$.
  Considérons les triangles homothétiques DFI et AEI : DF est paralléle à AE et $DF = 2AE$ donc A est le milieu de DI.
  Considérons le triangle DBI,O est le milieu de DB, A est le mileu de DI donc OA est paralléle à BI.
  On peut à nouveau utiliser le théorème des milieux :
  OA est perpendiculaire à OB donc BI est perpendiculaire à OB.
  On a donc montré que BDI et BDJ sont des triangles rectangles.
  ou on utilise la propriété des triangles rectangles et des triangles inscrits dans un demi-cercle.
  On a $AD = AB = AI$, et D, A, I sont alignés donc B est sur le demi-cercle de diamétre DI donc l'angle B est droit.
- **Solution de l'exercice avec la géométrie analytique**(public seconde)
  L'équation de la droite DA est : $y = 21/17.6 * x + 21$
  L'équation de la droite EF est : $y = 42/17.6 * x$
  Le point I a donc comme coordonnées :
  $y_I = 42/17.6 * x_I = 21/17.6 * x_I + 21$ donc $x_I = 21 * 17.6/21 = 17.6$
  B est sur Ox et $x_I = x_B = 17.6$ donc l'angle $\widehat{0BI}$ est droit.
  on peut alors remarquer que $y_I = 42$ donc A est le milieu de DI.

– **Une démonstration avec une homothétie (public lycée).**
Avec le même début :
$AECF$ est un parallélogramme ($AE = CF$ et $AE//CF$) donc E et F sont symétriques par rapport à O milieu de AC
Les droites DA et BC sont symétriques par rapport à O
donc I et J sont symétriques par rapport à O
BDI et BDJ sont des triangles symétriques par rapport à O. Il suffit donc de montrer que BDI est un triangle rectangle.
Dans cette démonstration on ne se sert pas du point F et on considère h l'homothétie de centre D et de rapport 2.



On définit K par $K = h(A)$.
h transforme O en B et A en K, donc transforme la droite OA en la droite BK paralléle à OA. OA est perpendiculaire à OB donc BK est perpendiculaire à OB donc BDK est un triangle rectangle
Pour montrer que BDI est un triangle rectangle, on va montrer que K et I sont confondus : Le point E est le centre de gravité du triangle DBK car il est situé sur la médiane AB de ce triangle DBK et que $AE = AB/3$. Donc la médiane KO de ce triangle DBK passe pae E et ainsi K, E, O sont alignés et K et I sont alignés.

5 Thème : courbes paramétrées

5.1 L'exercice proposé au candidat

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Pour tout réel t, on note $M(t)$ le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) & = & e^t \cos(t) \\ y(t) & = & e^t \sin(t) \end{cases}$$

et on note $\overrightarrow{V(t)}$ le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t)$.

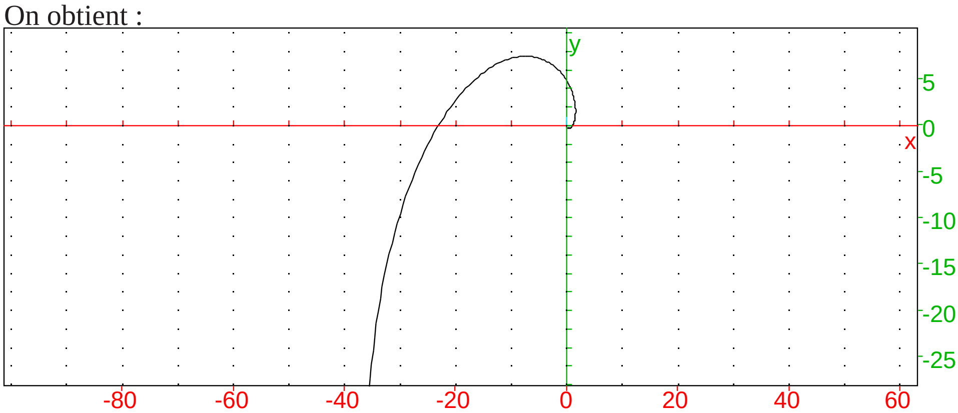
1. Montrer que pour tout réel $t, \overrightarrow{OM(t)} \neq 0$.
2. On note $r(t)$ et $s(t)$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM(t)}$ et $\overrightarrow{V(t)}$.
   – Montrer que le complexe $z = \frac{s(t)}{r(t)}$ est indépendant de t.
   – Déterminer un argument de z.
3. Quelle propriété géométrique le résultat précédent donne-t-il sur la courbe (C) décrite par le point $M(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$?

5.2 Le travail à exposer devant le jury

1. À quel niveau de la scolarité peut-on proposer un tel exercice ?
2. Quels sont les méthodes et les savoirs mis en jeu ?
3. Présenter une solution de la question 3) de l'exercice en l'illustrant à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
4. Proposer plusieurs exercices se rapportant au thème « courbes paramétrées », ayant une origine historique ou offrant un lien avec une autre discipline.

5.3 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. $t, \overrightarrow{OM(t)} \neq 0$, en effet : $|OM(t)^2| = e^{2t}(\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = e^{2t} \neq 0$ cela prouve que $|OM(t)^2|$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.
   Avec `Xcas`, on tape :
   ```
   plotparam(exp(t)*(cos(t)+i*sin(t)),t)
   ```
   On obtient :



2. Avec `Xcas`, on tape :

```
x(t) :=exp(t)*cos(t)
y(t) :=exp(t)*sin(t)
r(t) :=x(t)+i*y(t)
s :=function_diff(r)
factor(s(t))
```

On obtient :

```
(1+i)*(cos(t)+(i)*sin(t))*exp(t)
```

On tape :

```
simplify(s(t)/r(t))
```

On obtient : `1+i`

On tape :

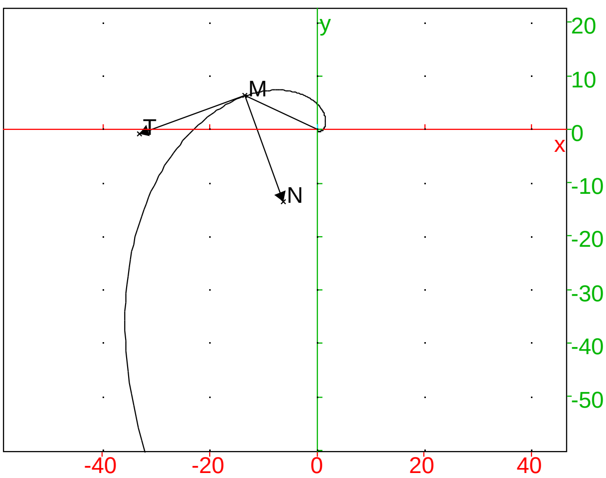
```
arg(1+i)
```

On obtient : `pi/4`

3. On a $s(t)$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MT}$, donc $\overrightarrow{0T}$ a pour affixe $r(t) + s(t)$.
D'après ce qui précéde l'angle $(\overrightarrow{OM}\overrightarrow{MT}$ vaut $\pi/4$.
On tape :

```
O:=point(0);
supposons(t=[2.7,-5,5,0.1]);
M:=point(r(t));
T:=point(s(t)+r(t));
vecteur(M,T);
plotparam(r(t),t=-5..5);
segment(O,M);
N:=point(s(t)-r(t));
vecteur(M,N);
K:=homothetie(M,-1,O);
vecteur(M,K);
```

On obtient :



6 Thème : arithmétique

6.1 L'exercice

1. Quel est le chiffre des unités de 2^{50} ?
2. Déterminer les entiers naturels k tels que $2k - 1$ soit un multiple de 51.

6.2 Les solutions de la question 1) proposées par cinq élèves de collège

- A
  $2^{50} = (2^{10})^5 = 1024^5$
  $4^5 = 1024$ donc 2^{50} se termine par 4.
- B
  Pour que le calcul soit plus simple je fais :
  $2^{25}2^{25} = 33554432 * 33554432$ Le chiffre des unités de cette multiplication est $2 * 2 = 4$ donc 2^{50} se termine par 4.
- C
  Quand on multiplie indéfiniment 2 par 2 on obtient une succession de séries de chiffres se terminant par 2,4,8,6. Donc 2^{50} est une succession de 12 séries (12*4=48).
  Il reste à multiplier encore 2 fois par 2 donc 2^{50} se termine par 4.
- D
  $2^1 = 2$
  $2^2 = 4$
  $2^3 = 8$
  $2^4 = 16$
  $2^5 = 32$
  $2^6 = 64$
  $2^7 = 128$
  $2^8 = 256$
  $2^9 = 512$
  $2^{10} = 1024$
  Les mêmes chiffres se répétant à un intervalle de 4 puissances. J'ai donc compté de 4 en 4 en partant de 2^2 pour savoir quel chiffre il y avait à 2^{50}.
  2^{50} se termine par 4.
- E
  $2^{50} = 2^{10}2^{10}2^{10}2^{10}2^{10}$
  Puisqu'il n'y a que le dernier chiffre qui nous interesse je multiple les derniers chiffres entre eux, on obtient : 1024*1024*1024*1024*1024 puis
  16*16*4 puis
  36*4 puis
  24
  2^{50} se termine donc par 4.

6.3 Le travail à exposer devant le jury

1. Analyser les travaux des élèves et et la démarche mise en œuvre par chacun d'eux pour répondre à la question posée.
2. Donner une solution des deux questions de l'exercice pour une classe de terminale scientifique.
3. Proposer plusieurs exercices sur le thème de l'arithmétique ayant un traitement différent selon le niveau considéré.

6.4 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. Le chiffre des unités de 2^{50},
   On tape :
   `(2%10)^50` ou `(2 mod 10)^50`
   On obtient : `4 % 10`
   Pour avoir le détail, on tape :
   `2^10, 2^10 mod 10)`
   On obtient : `1024, 4 % 10`
   puis, comme on a : `4^5=2^10`
   On en déduit que le chiffre des unités de 2^{50} est 4.
2. Trouver les entiers naturels k tels que $2k - 1$ soit un multiple de 51.
   On doit trouver des entiers k et p vérifiant :
   $2k - 1 = 51p$ c'est à dire $2k - 51p = 1$.
   On sait que 2 et 51 sont premiers entre eux donc d'après Bézout il existe des entiers u et v tels que $2u + 51v = 1$.
   On tape :
   `iegcd(2,51)`
   On obtient : `[-25,1,1]`
   ce qui signifie :
   -25*2+1*51=1 donc
   51=25*2+1=26*2-1 donc $k = 26$ convient.
   Si $2u_0 + 51v_0 = 1$ et si $2u + 51v = 1$ alors $2(u - u_0) + 51(v - v_0) = 0$ donc
   $u - u_0$ est un multiple de 51 ou encore $u - u_0 = 51n$ soit $u = -25 + n * 51$
   On veut que $u > 0$ donc $u = -25 + 51n$ avec $n > 0$ ou $u = 26 + 51n$ avec $n \geq 0$ donc $k = 26, 77, 128...26 + 51n$ conviennent.

   Ou encore
   On peut aussi deviner que $k = 26$ est une solution puisque 2*26-1=51 On cherche des entiers k et p vérifiant : $2k - 1 = 51p$ et
   comme $2 * 26 - 1 = 51$, cela revient à chercher :
   des entiers k et p vérifiant : $2(k - 26) = 51(p - 1)$ et puisque 2 et 51 sont premiers entre eux, $k - 26$est un multiple de 51 donc
   $k - 26 = 51 * m$ avec $m \geq 0$

7 Thème : différents types de raisonnement

7.1 L'exercice

Les propositions suivantes sont indépendantes. Préciser pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. Pour tout entier n, le nombre $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.
2. Toute suite strictement croissante tend vers $+\infty$.
3. L'ensemble des nombres premiers admet un plus grand élément.

7.2 Un extrait des programmes officiels

Mathématiques - Série scientifique
BO no 7 du 31 août 2000(...)
Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations. Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi, pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration académique ; en analyse, par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées : la nature et le niveau des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes. Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schémas (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). On gardera néanmoins l'état d'esprit déjà évoqué dans les programmes de collège et de seconde : repérer clairement le statut des divers énoncés en jeu (définition, axiome, théorème démontré, théorème admis,...).
La déduction usuelle (par implication ou équivalence) et la manipulation du contre-exemple ont été travaillées en seconde ; des problèmes bien choisis permettront d'aborder en première le raisonnement par contraposition, par l'absurde ou par disjonction des cas ; le raisonnement par récurrence relève de la classe de terminale.
La démonstration doit garder un caractère vivant et personnel et il convient d'éviter qu'elle n'apparaisse comme une activité relevant d'un protocole trop rigide. Chaque année, les assertions qui doivent être justifiées dans le cadre d'une pratique de la démonstration changent : il est difficile pour les élèves de cerner, parmi les éléments qui devaient être justifiés les années précédentes, ceux qui deviennent des évidences, pour lesquelles une justification ne ferait qu'alourdir la démonstration

7.3 Le travail à exposer devant le jury

1. En prenant appui sur l'extrait du bulletin officiel, montrer de quelle manière l'exercice permet d'illustrer certains objectifs du programme du cycle terminal de la série scientifique.

2. Indiquer le type de raisonnement qu'il est possible de mettre en oeuvre pour traiter chacune des propositions de l'exercice.
3. Proposer plusieurs exercices mettant en jeu différents types de raisonnement, dont un énoncé détaillé permettant à un élève de démontrer l'irrationalité de 2.

7.4 Solution de l'exercice avec `Xcas`

1. Pour tout entier n, le nombre $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.
   On regarde tout d'abord si la proposition semble vraie, on tape :
   `seq(n*(n+1)*(2*n+1),n=0..8)`
   On obtient : `0,6,30,84,180,330,546,840,1224` qui sont des multiples de 3.
   On tape : `k :=0 mod 3` `k*(k+1)*(2*k+1)`
   On obtient : `0 % 3`
   On tape : `k :=1 mod 3` `k*(k+1)*(2*k+1)`
   On obtient : `0 % 3`
   On tape : `k :=2 mod 3`
   `k*(k+1)*(2*k+1)`
   On obtient : `0 % 3`
   Bien sûr, si n est un multiple de 3 ou si $n+1$ est un multiple de 3, le résultat est évident.
   Il reste à montrer la proposition pour n est congru à 1 nodulo 3. Dans ce cas $2n+1$ est congru à 0 nodulo 3 donc $2n+1$ est un multiple de 3, donc $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3.

   On peut aussi montrer par récurrence que :
   $1^2+2^2+....n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.
   En effet cette égalité est vraie pour $n = 1$ et si elle est vraie pour n cela donne pour $n+1$:
   $1^2+...n^2+(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$
   puisque $2n^2+7n+6 = (2n+3)(n+2)$ on a :
   $1^2+2^2+...n^2+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
   donc l'égalié est vraie pour $n+1$.
   Cette égalité montre que $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 6, donc un multiple de 3.
   Avec `Xcas`, on tape :
   `factor(sum(k^2,k=1..n))`
   On obtient : `(n*(n+1)*(2*n+1))/6`

2. Toute suite strictement croissante tend vers $+\infty$.
   Ce résultat est manifestement faux : $u_n = 1-1/n$ en est un contre -exemple

car u est croissante et converge vers 1.
On tape :
```
u(n) :=1-1/n
normal(u(n+1)-u(n))
```
On obtient : `1/(n^2+n)`
On tape :
```
limit(u(n),n=inf)
```
On obtient : `1`

3. L'ensemble des nombres premiers admet un plus grand élément.
   Montrons que cette proposition est fausse.
   On suppose connu le théorème :
   Tout nombre non premier posséde un diviseur premier.
   On peut faire 2 sortes de démonstrations :
   - Une démonstration directe
     On montre que quelque soit l'entier $n \in \mathbb{N}$ il existe un nombre p premier vérifiant $p > n$.
     Soit le nombre $k = n! + 1$. On a :
     $k > n$ et k et $n!$ sont premiers entre eux donc k n'est divisible par aucun nombre inférieur ou égal à n
     Donc :
     soit k est premier et alors $p = k$,
     soit k a un diviseur premier p qui est nécessairement strictement supérieur à n.
   - Une démonstration par l'absurde
     Si il y a un plus grand nombre premier P, c'est que l'ensemble des nombres premiers est fini. Considérons le nombre N égal au produit de tous les nombres premiers +1.
     N n' est pas premier car $N > P$ et N n'admet pas de diviseurs premiers car si un nombre premier p divise N, il diviserait le produit de tous les nombres premiers donc il diviserait 1. D'où la contradiction avec le th :
     "Tout nombre non premier posséde un diviseur premier".
4. $\sqrt{2}$ est irrationnel
   Montrons tout d'abord :
   si n est impair alors n^2 est impair (c'est un multiple de 4 plus 1, en effet si $n = 2k + 1$ alors $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$).
   Cela prouve aussi : si n^2 est pair alors n est pair.

   Pour montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, on va raisonner par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2} = p/q$ où p et q sont des nombres entiers premiers entre eux.
   On a $2 = p^2/q^2$ donc $p^2 = 2q^2$
   p^2 est pair donc p est pair : soit $p = 2k$ donc $p^2 = 4k^2$
   On a alors $q^2 = 2k^2$ q^2 est pair donc q est pair
   D'où la contradiction car p et q sont des nombres entiers premiers entre eux.

On peut aussi utiliser le théorème de Gauss :
Soint 3 entiers a, b, c. Si a divise $b * c$ si a est premier avec c alors a divise b. Ici p divise $(2q) * q$, p est premier avec q donc p divise $2 * q$ donc p divise 2 (on applique 2 fois de suite le th de Gauss) donc $p = 1$ ou $p = 2$. $p = 1$ est impossible car $2q^2 \geq 2$ donc $2q^2 \neq 1$
$p = 2$ est impossible car $2q^2 = 4$ implique q entier et $q^2 = 2$ p est premier avec q donc p divise q (th de Gauss) ce qui est absurde