Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques

MAT127 (Licence, 2005/2006)

"INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES ET À LA MODÉLISATION"

Alexei PANTCHICHKINE, Emmanuel AUCLAIR

Feuille de TD Numero 11

TD de la semaine du 8 au 10 mai 2006

I) Modèle de Volterra-Lotka

On considère un système écologique composé de lapins et de renards. On note respectivement $L(\tau)$ et $R(\tau)$ la population de lapins et de renards au temps τ. On modélise l'évolution de ces populations par le modèle de Volterra-Lotka, et on considère donc le système

$$\begin{cases} L'(\tau) & = & aL(\tau) & -bL(\tau)R(\tau) \\ R'(\tau) & = & -dR(\tau) & +cL(\tau)R(\tau) \end{cases}$$

où a est le taux de croissance de la population des lapins en l'absence de prédateurs et où d est le taux de décroissance des renards en l'absence de proies.

1. En opérant les changements
$$t = a\tau,\ x(t) = cL(\tau)/d,\ y(t) = bR(\tau)/a \text{ et } \alpha = d/a,$$
montrer que le système initial est équivalent au système
$$\begin{cases} x'(t) & = x(t)(1 - y(t)) \\ y'(t) & = \alpha y(t)(x(t) - 1) \end{cases} \qquad (S)$$
2. Vérifier que la fonction f définie par
$$f: \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x^\alpha e^{-\alpha x}).(ye^{-y}) \end{array}$$
est une intégrale première du mouvement du système (S).
3. Etudier la fonction $g(x) = xe^{-x}$. En déduire que pour tout réels x et y,
$$0 \leq f(x,y) \leq e^{-\alpha-1}.$$
Tracer les courbes de niveaux $f = 0$ et $f = e^{-\alpha-1}$. Montrer que pour a strictement compris entre 0 et $e^{-\alpha-1}$, les courbes de niveau $f = a$ sont des courbes fermées.
4. En déduire que les trajectoires des solutions de S sont périodiques si la donnée initiale n'a aucune coordonnée nulle et est différente de $(1, 1)$.
5. Linéariser le système (S) aux deux positions d'équilibre $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Discuter de leur stabilité.
6. Trouver la période du système linéarisé autour de $(1, 1)$. En déduire la période en la variable τ.

7. Tracer le portrait de phase de (S).

II) Modèle de Volterra-Lotka modifié

On considère un modèle de Volterra-Lotka modifié :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)(1 - y(t) + ax(t)) \\ y'(t) &= y(t)(x(t) - 1) \end{cases} \qquad (S)$$

1. Pour quelles valeurs de a le système admet-il un point d'équilibre vérifiant $x > 0$ et $y > 0$?
2. Discuter de la stabilité de ce point suivant la valeur de a.

III) Soit le système

$$\begin{cases} x'(t) &= y^2(t) - 1 \\ y'(t) &= x^2(t) - 1 \end{cases} \qquad (S)$$

1. Déterminer les points d'équilibre et le système linéarisé en ces points. Donner la nature de ces équilibres.
2. Montrer que $f(x, y) = (x^3 - y^3) - 3(x - y)$ est une intégrale première du mouvement.
3. Tracer les isoclines de pente 0 et ∞ et les courbes de niveau de f passant par les équilibres. Tracer le portrait de phase.

IV) On considère une réaction chimique simple

$$A + B \rightleftharpoons C$$

où le taux de la réaction vers la droite est noté k_+ et celui vers la gauche k_-.

1. Ecrire un système différentiel décrivant l'évolution des concentrations a, b et c des réactants.
2. En supposant que $a(0) = b(0)$, montrer que $a(t) = b(t)$ pour tout t. Ecrire dans ce cas un système différentiel satisfait par (a, c).
3. Trouver les équilibres et donner leur nature.
4. Tracer les isoclines de pente 0 et $+\infty$, ainsi que le portrait de phase.

V) Un peu de Physique Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$x''(t) = -W(x(t))$$

décrivant l'évolution de la position d'un point matériel de masse 1 soumis à une force provenant d'un potentiel $W : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, avec les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $x'(0) = v_0$.

1. Montrer que cette équation différentielle du second ordre est équivalente à un système différentiel du premier ordre de la fonction vectorielle $(x(t), y(t))$, où $y(t) = x'(t)$.
2. Montrer que l'énergie du système, définie par

   $$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + W(x)$$

   est une intégrale première.
3. Esquisser le portrait de phase si $W(x) = \alpha x^2$.

Références bibliographiques :

Les exercices de cette feuille sont principalement tirés de [YCV]. On y trouvera sans peine d'autres exercices tout aussi pertinents pour approfondir sa connaissance du sujet.