Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques

MAT127 (Licence, 2005/2006)

"Introduction aux systèmes dynamiques et à la modélisation"

Alexei PANTCHICHKINE, Emmanuel AUCLAIR

Feuille de TD N° *10*

TD de la semaine du 10 au 14 avril 2006

I) On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = -3x + y \end{cases} \quad ; \; x(0) = a, \; y(0) = b.$$

1. Chercher les vecteurs propres de la matrice associée.
2. Résoudre le système.
3. Tracer les graphes de $x(t)$ et de $y(t)$ pour $a = 2$ et $b = 2$.
4. Tracer sur une même figure la courbe paramétrée $t \to (x(t), y(t))$ et les isoclines de pente 0 et ∞.

II) On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \end{cases} \quad ; \; x(0) = a, \; y(0) = b.$$

1. Montrer que la matrice associée à ce système n'admet pas de paire de vecteurs propres formant une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Résoudre l'équation $y' = y + ae^t \; ; \; y(0) = b$.
3. En déduire les solutions du système différentiel donné.
4. Tracer les courbes paramétrées $t \to (x(t), y(t))$ correspondant aux données de Cauchy $(a, b) = (0, 1)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, ainsi que les isoclines de pente 0 et ∞.

III) On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -y \end{cases} .$$

1. Résoudre le système.
2. Tracer les courbes intégrales $t \to (x(t), y(t))$ associées aux données de Cauchy $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(1, 1)$ et $(1, -1)$, ainsi que les isoclines de pente 0 et ∞.

IV) On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = \cos y \\ y' = \sin x \end{cases} .$$

1. Déterminer les points singuliers.
2. Pour chaque point singulier, calculer la matrice jacobienne et caractériser la stabilité de ces points singuliers.
3. Esquisser les isoclines de pente 0 et ∞.
4. Montrer que $V : (x, y) \mapsto \sin y + \cos x$ est une intégrale première du système.

V) On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ky - \sin x \end{cases} \quad , \ k \geq 0$$

qui modélise le mouvement d'un pendule simple sans frottement.

1. Montrer que les équilibres sont $(x, y) = (n\pi, 0)$, où $n \in \mathbb{Z}$.
2. Linéariser le système aux positions d'équilibre $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$.
3. Donner la nature et la stabilité de ces positions d'équilibre.

VI) On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$x'' + ax' + x^3 - x = 0.$$

1. En posant $y = x'$, la transformer en un système différentiel du 1er ordre.
2. Trouver les points singuliers de ce système.
3. Discuter de leur stabilité suivant la valeur du paramètre a.

Références bibliographiques :
Les exercices de cette feuille sont principalement tirés de [YCV]. On y trouvera sans peine d'autres exercices tout aussi pertinents pour approfondir sa connaissance du sujet.