Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques

MAT127 (Licence, 2005/2006)

"INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES ET À LA MODÉLISATION"

Alexei PANTCHICHKINE, Emmanuel AUCLAIR

Feuille de TD N°*8*

TD de la semaine du 20 mars au 25 mars 2006

I) Valeurs propres et vecteurs propres

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$
Décomposer
$$V = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$
suivant les vecteurs propres et en déduire $A^n V$.
4. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

II)

a) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Si V est un tel vecteur et $V' = \vec{i}$, écrire la matrice de A dans la base (V, V').

III) Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et $A^2 + 2A - 11\mathrm{Id}$. Calculer $\det(A - \mathrm{Id})$ et déterminer les valeurs propres de A.

IV) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \ v = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exprimer v sous la forme $\alpha v_1 + \beta v_2$. Calculer $A^n v$.

V) Calculer vecteurs propres et valeurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Décomposer $v = \binom{1}{1}$ le long des vecteurs propres et calculer $A^n v$ explicitement pour tous les $n \in \mathbb{N}$.
V) Soit $S = \{A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \ | a, b, d \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des matrices symétriques. Montrer qu'une matrice $A \in S$ ne possède que des valeurs propres réelles. Quelles matrices de S ne possèdent qu'une seule valeur propre ?

VI) On considère la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.
a) On pose

$$Vn = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $V_{n+1} = AV_n$, où A est une matrice qu'on écrira.
b) Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de A.
c) Décomposer V_0 dans une base propre et en déduire la valeur de u_n.

Références bibliographiques :
Les exercices de cette feuille sont principalement tirés de [YCV]. On y trouvera sans peine d'autres exercices tout aussi pertinents pour approfondir sa connaissance du sujet.