Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques

MAT127 (Licence, 2005/2006)

"INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES ET À LA MODÉLISATION"

Alexei PANTCHICHKINE, Emmanuel AUCLAIR

Feuille de TD N° 7
TD de la semaine du 13 mars-18mars 2006

I) Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \gamma x(1 - x).$$

Pour quelle valeur de γ la fonction f applique-t-elle l'intervalle $I = [0, 1]$ sur lui-même ? Pour une telle valeur de γ trouver les points fixes de f ainsi que les trajectoires de période 2. Etudier leur stabilité en fonction de γ.

II) Soit f l'application linéaire par morceaux définie par

$$\begin{array}{rccll} f: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] & \\ & x & \longmapsto & 2x & \text{si } x \in [0,1/2] \\ & x & \longmapsto & 2-2x & \text{si } x \in [1/2,1]. \end{array}$$

1. Tracer le graphe de f et de $f \circ f$.
2. Calculer les points fixes et les points périodiques de période 2 de f.
3. Montrer que la composition de deux fonctions affines est encore affine, et en déduire le graphe de $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.
4. Trouver l'orbite du point $x = 1/100$ par l'action des applications $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ $(n \in \mathbb{N})$.
5. On considère le système dynamique $\Phi \ : \mathbb{N} \times I \to I$ (semi-déterministe) où $I = [0, 1]$, $\Phi(n, x) = f^{\circ n}(x)$ $(n \in \mathbb{N}, x \in I)$. L'ensemble des points $\Phi(n, \sqrt{3}/2)$ $(n \in \mathbb{N})$ est-il fini ?

III) Soit f_μ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$.

1. Suivant la valeur de μ, déterminer les points fixes de f_μ
2. Pour chaque point fixe x_0, linéariser f_μ autour de x_0. On notera F_{μ,x_0} l'application linéaire obtenue.
3. Donner la solution générale des suites définies par $u_{n+1} = F_{\mu,x_0}(u_n)$.
4. Etudier la stabilité des points fixes de f_μ.

IV) Soit φ une application de $I = [0, 1]$ dans I définie par $\varphi(x) = ax + b$ dans un intervalle $J \subset I$ contenant un point fixe $\overline{x} \in J$.

1. Trouver le point $\overline{x}$.

2. Etudier la stabilité de $\overline{x}$ selon les valeurs de a.
3. Montrer que $\overline{x}$ est stable pour $|a| < 1$ et instable pour $|a| > 1$.

V) On considère le système
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t)\,(1 - y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = \alpha\, y(t)\,(x(t) - 1) \end{cases}.$$

1. En considérant y comme fonction de x pour $x, y > 0$, déduire
$$\frac{y'_x(1-y)}{y} = \alpha\,\frac{x-1}{x} \Rightarrow (\ln|y| - y)'_x = \alpha(x - \ln|x|)'_x \Rightarrow \ln y - y + \alpha(\ln x - x) = C.$$
2. On considère le système autour du point critique $(1, 1)$. On le remplace par un système linéaire en observant que
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (1 + x(t) - 1)\,(1 - y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = (1 + \alpha\, y(t) - 1)\,(x(t) - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} \approx 1 - y(t), \\ \frac{dy}{dt} \approx \alpha(x(t) - 1) \end{cases}$$
autour du point critique $(x, y) = (1, 1)$. Remarquer que le dernier système linéarisé correspond au processus complexe périodique $t \to z(t) = x(t) + i\frac{y(t)}{\sqrt{\alpha}}$, tel que $z' = \sqrt{\alpha}i(z - 1 - \frac{i}{\sqrt{\alpha}})$. Trouver la période du système linéarisé.
3. On considère le modèle de Lotka-Volterra du système écologique lapin (L)/renard (R)
$$\begin{cases} \frac{dL}{d\tau} = aL(\tau) - bL(\tau)R(\tau), \\ \frac{dR}{d\tau} = -pR(\tau) + qL(\tau)R(\tau) \end{cases},$$
où a est le taux de croissance de la population de proies en l'absence de prédateurs et d le taux de décroissance des prédateurs en l'absence de proies.
Montrer que les trajectoires du couple $(L(\tau), R(\tau))$ sont des courbes fermées autour du point $(a/b, p/q)$, où a/b est la moyenne du nombre de prédateurs, et p/q est la moyenne du nombre de proies (voir [Bert], p.93).
4. Montrer que les changements $x = qu/p, y = bv/a, t = \tau/a, \alpha = p/a$ conduisent au système linéarisé
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - y(t) \\ \frac{dy}{dt} = \alpha(x(t) - 1) \end{cases}.$$
Remarquer que le dernier système linéarisé correspond au processus complexe périodique
$$t \to z(t) = x(t) + i\frac{y(t)}{\sqrt{\alpha}},\ \text{tel que } z' = \sqrt{\alpha}i(z - 1 - \frac{i}{\sqrt{\alpha}}).$$
Trouver la période du système linéarisé. En déduire la période en la variable τ.
5. Trouver la période approximative des solutions positives du système
$$\begin{cases} \frac{dL}{d\tau} = 5L(\tau) - 6L(\tau)R(\tau), \\ \frac{dR}{d\tau} = -4R(\tau) + 7L(\tau)R(\tau) \end{cases}.$$
6. Trouver la moyenne du nombre de prédateurs, et la moyenne du nombre de proies.

Références bibliographiques :
Les exercices de cette feuille sont principalement tirés de [YCV] et de [Bert]. On y trouvera sans peine d'autres exercices tout aussi pertinents pour approfondir sa connaissance du sujet.