Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques

MAT127 (Licence, 2005/2006)

"INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES ET À LA MODÉLISATION"

Alexei PANTCHICHKINE, Emmanuel AUCLAIR

Feuille de TD N° *6*

TD de la semaine du 6 mars au 10 mars 2006

Fonctions de deux variables

I) Donner les domaines de définition et calculer les dérivées partielles des fonctions définies par

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= e^y \sin(x) \\ f_2(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} \\ f_3(x,y) &= xy\tan(y/x). \end{aligned}$$

II) Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a,$$

où les fonctions f cherchées seront considérées de classe C^2, et où a est un paramètre réel fixé.

III) On considère la fonction

$$f:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y := e^{y \ln x}. \end{array}$$

1. Déterminer et dessiner les courbes de niveau $(f=1)$, $(f=e)$ et $(f=1/e)$. Déterminer les tangentes à ces courbes aux points $(e,1)$, $(e,0)$ et $(e,-1)$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f. Vérifier l'égalité
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$
3. Calculer le gradient de f aux points $(e,1)$, $(e,0)$ et $(e,-1)$. Vérifier qu'il est orthogonal aux lignes de niveau de f passant par ces points.
4. Ecrire le développement limité de f à l'ordre 1 aux points $(e,1)$, $(e,0)$ et $(e,-1)$.

IV) Soit f la fonction à deux variables définie par $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 3y + 3$. Déterminer les points critiques de f, c'est-à-dire les points $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

La fonction admet-elle un maximum sur $\mathbb{R}^2$? Un minimum ?

V) Soit p une constante et soit f une fonction à deux variables telle que,

$$\forall \lambda \neq 0,\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x,y).$$

Montrer que f satisfait l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = pf(x,y).$$

Stabilité de solutions d'équations différentielles

VI) Résoudre

$$y'(t) = \lambda y(t)(M - y(t))$$

pour $M > 0$ et pour une condition initiale $y(t_0) = y_0$ donnés. Trouver les points singuliers et étudier leur stabilité.

VII) Considérons l'équation différentielle

$$y' = \alpha y + \beta y^3,$$

où α et β sont deux réels fixés. Donner ses points singuliers et étudier leur stabilité en fonction de (α, β).

VIII) Considérons l'équation différentielle

$$y' = 2y^5 - 5y^2 + 3.$$

Donner ses points singuliers et étudier leur stabilité.

IX)

1. Esquisser le champs de vecteurs associé à l'équation différentielle $y'(t) = y^2(t) + t$ et tracer l' isocline Γ_0.
2. Faire de même pour $y' = -t/y$, et tracer de plus Γ_p pour tout p. Résoudre exactement cette équation et vérifier la cohérence avec le plan de phase esquissé.

Références bibliographiques :
Les exercices de cette feuille sont principalement tirés de [YCV]. On y trouvera sans peine d'autres exercices tout aussi pertinents pour approfondir sa connaissance du sujet.