Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques

MAT127 (Licence, 2005/2006)

"INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES ET À LA MODÉLISATION"

Alexei PANTCHICHKINE, Emmanuel AUCLAIR

Feuille de TD N°*4*

TD de la semaine du 13 février au 17 février 2006

I) Résoudre les équations différentielles suivantes

$$\begin{array}{lll} (1) & 2u' = u & ; \quad \lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty. \\ (2) & u' = u + t^2 + 3t - 1 & ; \quad u(0) = 1. \\ (3) & u' = 2u + e^t \cos t & ; \quad u(\pi/4) = 0. \\ (4) & u' = 4tu. & \\ (5) & u' = 5u/t + (t+1)/t. & \end{array}$$

II) Résoudre l'équation différentielle $u' = e^t - u$. Etudier suivant la condition initiale $u(0)$ le comportement des solutions à l'infini.

III) On considère sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad u - tu' = \frac{2t}{t+2}.$$

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, on définit $F(t) = f(t)/t$.

1. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si
$$F'(t) = \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t}$$
pour tout $t \in]0, +\infty[$.
2. En déduire les solutions de (E).

IV) On considère l'équation différentielle autonome

$$(E) \qquad u' = \sin u.$$

1. Trouver les solutions stationnaires de (E). Déterminer le comportement lorsque t tend vers $\pm\infty$ des solutions de (E) avec les conditions initiales $u(0) = \pm\frac{\pi}{2}$.
2. Vérifier que $ln|\tan(x/2)|$ est une primitive de $\frac{1}{\sin x}$.
3. Résoudre (E) analytiquement.

V) On considère les deux équations différentielles autonomes suivantes, dépendant de deux paramètres réels a et b.

$$\begin{array}{ll} (E_1) & u' = au + b \\ (E_2) & u' = au + bu^2. \end{array}$$

Pour chacune d'elles

1. Montrer que la donnée d'une condition initiale $u(0)$ détermine u de façon unique.
2. Déterminer les solutions stationnaires, et discuter de leur stabilité suivant la valeur des paramètres a et b.
3. Résoudre analytiquement, et donner l'allure des solutions.

VI) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad u' = 2|u|^{\frac{1}{2}}.$$

1. Déterminer la solution stationnaire de (E).
2. Soit $t_0 > 0$ un réel donné, et soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{ll} f(t) = 0 & \text{si } t \leq t_0 \\ f(t) = (t - t_0)^2 & \text{si } t \geq 0. \end{array}$$

   Tracer le graphe de f et montrer que f est une solution de (E).
3. En déduire que le problème de Cauchy u(0)=0 pour l'équation (E) a une infinité de solutions. Pourquoi le Théorème de Cauchy ne s'applique-t-il pas ici ?

VI) On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ pour $x \in]0, +\infty[$. On note M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse t_0.

1. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}$ au point M_0.
3. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de T_0 avec l'axe des abscisses.
   Réciproquement, on veut déterminer les fonctions f définies sur $]0, \infty[$ dont les courbes représentatives sont telles que la tangente au point d'abscisse x rencontre l'axe des abscisses au point d'abscisse $2x$.
4. Démontrer qu'une telle fonction f vérifie

$$xf'(x) + f(x) = 0$$

   pour tout $x \in]0, +\infty[$.
5. Résoudre l'équation précédente et conclure.

Références bibliographiques :

Les exercices de cette feuille sont tirés des polycopiés de cours suivants :

– [Pajot], CH.VII : Equations Différentielles, pp.17–24
– [YCV], pp.33–34.

On y trouvera sans peine d'autres exercices tout aussi pertinents pour approfondir sa connaissance du sujet.