Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques

MAT127 (Licence, 2005/2006)

"Introduction aux systèmes dynamiques et à la modélisation"

Alexei PANTCHICHKINE, Emmanuel AUCLAIR

Feuille de TD N° *3*

TD de la semaine du 6 février au 10 février 2006

I) La désintégration de 50 % de matière radioactive s'est produite dans 30 jours. Dans combien de temps restera-t-il 1 % de toute la quantité initiale ? (On supposera que l'évolution de la quantité de matière radioactive suit le modèle de Malthus)

II) Selon les expériences, la désintégration annuelle du radium est de l'ordre 0,44 mg par gramme. En combien d'années la moitié de toute la réserve de radium se désintégrera-t-elle ?

III) Un morceau de roche contient 100 mg d'uranium et 14 mg de plomb d'uranium. On sait que l'uranium met $4,5 \cdot 10^9$ d'années pour se désintégrer à moitié, et que la désintégration complète de 238 g d'uranium donne 206 g de plomb. Déterminer l'âge de la roche. On admettra qu'au moment de la formation elle ne contenait pas de plomb, et on négligera la présence de produits radioactifs intermédiaires entre l'uranium et le plomb (car leur désintégration est beaucoup plus rapide que celle d'uranium).

IV) a) Résoudre l'équation différentielle $y' = y(5 - y)$ sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ en utilisant la méthode de séparation des variables.

b) Résoudre l'équation différentielle $y' = y^2 + 10$ sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = 2$.

c) Résoudre l'équation différentielle $y' = y^2 - 10y + 9$ sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = 3$.

Réponse : a)$y(t) = \dfrac{5}{1 + 4\,e^{-5t}}$; b) $y(t) = \sqrt{10}\tan(\dfrac{1}{10}\,(10t + \sqrt{10}\arctan(\dfrac{\sqrt{10}}{5}))\,\sqrt{10})$;
c) $y(t) = \dfrac{3\,(-e^{8t} - 3)}{-3\,e^{8t} - 1}$.

V) On considère le nuage de 4 points $A = \{[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3], [x_4, y_4]\} = \{[1, 0], [2, 6], [3, 14], [4, 24]\}$.

(a) Trouver le centre de gravité $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage.

(b) Pour une droite l d'équation $y - \bar{y} = \alpha(x - \bar{x})$ passant par $(\bar{x}, \bar{y})$, calculer l'écart E du nuage A à la droite.

(c) Trouver le valeur de α pour laquelle le minimum de l'écart est atteint.

(d) En déduire l'équation de la droite pour laquelle le minimum de l'écart est atteint.

VI) Dans une culture, le taux instantané d'accroissement du nombre des bactéries est considéré proportionnel à ce nombre. (modèle de Malthus)

(a) Les valeurs approximatives observées au bout de n heures sont :

$$\begin{array}{ll} 10^4 & \text{pour } n = 1, \\ e^6 \cdot 10^4 & \text{pour } n = 2, \\ e^{14} \cdot 10^4 & \text{pour } n = 3, \\ e^{24} \cdot 10^4 & \text{pour } n = 4. \end{array}$$

En utilisant la droite des moindres carrés, trouver la loi exponentielle rendant le mieux compte de l'évolution de cette population.

(b) Quel était le nombre initial de cette population ?

Réponse : a) $y(t) \approx e^{8t-9} \cdot 10^4$, b) $y(0) \approx e^{-9} \cdot 10^4$.

VII) Dans une culture, le nombre maximal possible de bactéries par gramme est égale à $N^* = 5 \cdot 10^9$ (la charge biotique), et le taux instantané d'accroissement du nombre des bactéries $N(t)$ est proportionnel au produit de ce nombre par la différence $N^* - N(t)$. (modèle de Malthus modifié)

(a) Les valeurs approximatives observées au bout de n jours sont :

$$\begin{array}{ll} 1.16 \cdot 10^9 & \text{pour } n = 1, \\ 2.25 \cdot 10^9 & \text{pour } n = 2, \\ 3.45 \cdot 10^9 & \text{pour } n = 3, \\ 4.29 \cdot 10^9 & \text{pour } n = 4. \end{array}$$

En utilisant la droite des moindres carrés, trouver la loi logistique rendant le mieux compte de l'évolution de cette population.

(b) Quel était le nombre initial de cette population ?

Réponse : a) $y(t) \approx \dfrac{5}{1 + 9\, e^{-\, t}} \cdot 10^9$; b) $\approx 0.5.10^9$.