Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques

MAT127 (Licence, 2005/2006)

"Introduction aux systèmes dynamiques et à la modélisation"

Alexei PANTCHICHKINE, Emmanuel AUCLAIR

Feuille de TD N°*2*

TD de la semaine du 30 janvier au 3 février 2006

I) Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2}, \quad \int_0^2 \frac{dx}{2+x^2}, \quad \int_0^3 \frac{xdx}{1+x^2}$$

en utilisant la table des primitives (données à une constante près)

Fonctions puissances $f(x) = x^\alpha$, $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (pour $\alpha \neq -1$)

Fonctions exponentielles $f(x) = e^{\lambda x}$, $F(x) = \frac{1}{\lambda} e^{(\lambda x)}$ (pour $\lambda \neq 0$)

Fonctions trigonométriques $f(x) = \cos(\omega x)$, $F(x) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$ (pour $\omega \neq 0$)

$f(x) = \sin(\omega x)$, $F(x) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x)$ (pour $\omega \neq 0$)

$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \tan x$ (pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ou ...)

$f(x) = \dfrac{1}{x+a}$, $F(x) = \ln|x+a|$ (pour $x < -a$ ou pour $x > -a$)

$f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ (pour $x < -1$ ou pour $-1 < x < 1$ ou $x > 1$)

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \arctan x$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \arcsin x$ (pour $-1 < x < 1$)

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $F(x) = \text{arcsh} x$

II) Déterminer deux réels a et b tels que $\dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$. En déduire $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x+2}{x^2-1}dx$.

III) Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x+1}{x^2+1}$. En déduire $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{2x^2+x+1}{x^2+1}dx$.

IV) Déterminer une primitive de $e^{2x}\sin(x)$ de trois façons :
a) en utilisant deux intégrations par parties
b) en utilisant $\displaystyle\int e^{(a+ib)x}dx = \frac{e^{(a+ib)}}{(a+ib)} + C$ et en écrivant $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$,
c) en cherchant une primitive sous la forme $e^{2x}(\lambda \sin x + \mu \cos x)$.

V) a) On considère l'ensemble des polynômes $V = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Montrer que l'application $L : y \mapsto y' - y$ définit une bijection de V dans V. Déterminer l'application réciproque L^{-1}. b) Déterminer une primitive de $f(x) = e^{-x}(x^2+x+2)$.

VI) Recherche d'une primitive de $f(x) = \ln(x)$ (pour $x > 0$). Montrer que si F est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$, alors F est une primitive de f.

VII) Recherche d'une primitive de $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ (pour $x > 1$). Montrer que si F est la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $F(x) = \ln(\ln(x))$, alors F est une primitive de f.

VIII) Calculer les intégrales

$$\int_1^2 \ln x dx, \quad \int_{1/e}^e x \arctan x dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx,$$

XI) Si la population d'un pays double en 50 ans, en combien de temps triplera-t-elle, compte tenu de ce que le taux instantané d'accroissement est proportionnel au nombre d'habitants ? (modèle de Malthus)

X) Dans une culture le taux instantané d'accroissement du nombre des bactéries est proportionnel à ce nombre.
(a) Si l'on constate que ce nombre double en 4 heures, quel sera-t-il au bout de 12 heures ?
(b) S'il y a 10^4 bactéries au bout de 3 heures et $4 \cdot 10^4$ au bout de 5 heures, quel était le nombre initial ?