Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques

MAT127 (Licence, 2005/2006)

"INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES ET À LA MODÉLISATION"

Alexei PANTCHICHKINE, Emmanuel AUCLAIR

Feuille de TD N°*1*

TD de la semaine du 23 au 27 janvier 2006

I) a) Calculer $(1+i)^2$, $(1+i)^3$.
b) Montrer que $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$
c) En déduire la valeur de $(1+i)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

II) Calculer a) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}$; b) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

III) Calculer a) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; b) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; c) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

IV) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2+z+2=0$, $z^2+iz+1=0$

V) Tracer les courbes représentatives des fonctions $t\to e^{it}, t\to e^{(1+i)t}, t\to e^{(1-i)t}, t\to e^{1-i}t$

VI) a) Considérons l'équation $y'-3y=0$. Donc, $y'=F(y)$, où $F(y)=3y$. Montrer qu'une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation est $y(t)=2006e^{3t}$.
b) Considérons l'équation $y'-3y=0$. Donc, $y'=F(y)$, où $F(y)=3y$. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation est la forme $y(t)=Ce^{3t}$ où C est une constante réelle.
c) Considérons l'équation $y'-3y=t$. Nous pouvons encore l'écrire $y'=3y+t$. Donc, $y'=G(t,y)$, où $G(t,y)=3y+t$. Montrer qu'une solution sur $\mathbb{R}$ est $y(t)=-(1/3)t-1/9$.
d) En déduire que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation est la forme $y(t)=Ce^{3t}-(1/3)t-1/9$ où C est une constante réelle.

VII) On considère l'ensemble des polynômes $V=\{at+b\mid a,b\in\mathbb{R}\}$. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{R}, k\neq 0$, l'application $L:y\mapsto y'-ky$ définie une bijection $L:V\to V$.

VIII) Considérons l'équation suivante : $mv'(t)=-\lambda v^2(t)$, où $v(t)$ est la vitesse d'un mouvement rectiligne d'un point de masse m, soumis à la force $-\lambda v^2(t)$. Vérifier que $v(t)=(\lambda t/m+1)^{-1}$ est une solution et que $v(t)=\exp(-t\lambda/m)$ ne l'est pas.

IX*) a) Résoudre les 2 équations

$$z+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, z+\frac{1}{z}=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$$

b) On veut résoudre $z^5=1$. La résoudre sous forme trigonométrique. Montrer que les solutions forment les sommets d'un pentagone régulier de sommets situés sur le cercle trigonométrique. Le dessiner.
c) Vérifier que $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$
d) On pose $Z=z+\frac{1}{z}$. Montrer que l'équation $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ équivaut à $Z^2+Z-1=0$.
e) Résoudre $Z^2+Z-1=0$.
f) En déduire les solutions de $z^4+z^3+z^2+z+1=0$.
g) Application : valeurs de $\cos\pi/5$ et $\cos 2\pi/5$, construction avec le compas du pentagone régulier.