Algèbre et Géométrie 24-09-08 Marcel Morales

E désignera un $K-$espace vectoriel de dimension finie.
Rappels:

- Ne pas confondre F sev propre($F \neq 0, F \neq E$), et sev propre de l'endomorphisme u (associé à une valeur propre de u).
- Rappeler la Division euclidienne dans $K[X]$.
- Rappeler le Théorème de Bezout dans $K[X]$.
- $K[X]$ est un anneau intègre a factorisation unique.
- Tout idéal de $K[X]$ est principal.
- Décrire les éléments irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in K[X]$ et u est un endomorphisme de E. Si $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n$ on pose $P(u) = a_0u^n + a_1u^{n-1} + ... + a_nI$, c'est un endomorphisme de E.

1. Vérifier que l'application $K[X] \longrightarrow End_K(E)$ qui à P associe $P(u)$ est un morphisme de $K-$algèbres.
2. Si $P, Q \in K[X]$ et u est un endomorphisme de E montrer que $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$, en particulier l'ensemble $\{P(u) \mid P \in K[X]\}$ est une sous algèbre commutative de $End_K(E)$,
3. Vérifier que pour tout polynôme $P(X)$ l'espace vectoriel $\ker(P(u))$ est invariant par u.

Démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 0.1 *Lemme des noyaux: Si $P(X) = Q_1(X)Q_2(X)$ et $Q_1(X), Q_2(X)$ sont premiers entre eux alors*

$$\mathrm{Ker}\ P(u) = \mathrm{Ker}\ Q_1(u) \oplus \mathrm{Ker}\ Q_2(u)$$

Indication: Utiliser le théorème de Bezout.

Théorème 0.2 *Le polynôme caractéristique χ_u est scindé dans K si et seulement si u est triangularisable.*

Indication: La preuve de l'implication $\Rightarrow$ se fait par récurrence sur $n = \dim E$:
Soit λ une racine du polynôme caractéristique, alors $\dim(Im(u - \lambda I_E)) \leq n - 1$.
Soit F un sous e.v. de E contenant $Im(u - \lambda I_E)$ et tel que $\dim F = n - 1$. Vérifier que F est invariant par u. Choisir une base de F et la compléter à une base B de E, écrire la matrice de u dans la base B et calculer son polynôme caractéristique, en particulier établir que $\chi_{u|_F}$ est scindé dans K. Terminer la preuve.

Théorème 0.3 *Montrer que si χ_u est scindé dans K, que $\chi_u(u) = 0$.*

Indication: Nous pouvons supposer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de E tel que la matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure, i.e.

$$u(v_i) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{j,i} v_j$$

avec $\alpha_{i,i} = \lambda_i$ pour tout i.
Montrer par récurrence sur i que

$$[\prod_{j=1}^{i}(u - \lambda_j)](v_k) = 0, \forall k = 1, ..., i.$$

Par conséquent nous avons le théorème:

Théorème 0.4 • *Si $K = \mathbb{C}$ alors tout endomorphisme de E est triangularisable et $\chi_u(u) = 0$.*
• *Si $K = \mathbb{R}$ alors $\chi_u(u) = 0$.*

Définition 0.1 *L'ensemble* $\{P \in K[X] \text{tel que } P(u) = 0\}$ *est un idéal non nul de* $K[X]$. *Son générateur (unitaire) est appelé le polynôme minimal de* u *et noté* μ_u.

Soit u un endomorphisme réel, par le choix d'une base et la matrice M de u dans cette base on peut définir un morphisme complexe $\tilde{u}$ ayant la même matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, d'où $\chi_u(X) = \chi_{\tilde{u}}(X)$ et $\mu_u(X) = \mu_{\tilde{u}}(X)$. Les deux polynômes $\chi_u(X), \mu_u(X)$ sont à coefficients réels, ce qui montre que le polynôme $\chi_u(X)$, (resp. $\mu_u(X)$) ne dépend pas du corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple: Soit $e_1, ..., e_n$ une base du $\mathbb{C}-$espace vectoriel E. et u l'endomophisme de E défini par

$$u(e_1) = 0,\ u(e_2) = e_1, ...,\ u(e_n) = e_{n-1}$$

Calculer $\chi_u(X), \mu_u(X)$.

Revenons au cas général:

- On suppose $K = \mathbb{C}$. Montrer que le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.
- Démontrer que si λ est une racine de $\chi_u(X)$ alors $\mu_u(X)$ est divisible par $X - \lambda$.
- Conclure que si
  $\chi_u(X) = (X-\lambda_1)^{n_1}(X-\lambda_2)^{n_2}...(X-\lambda_k)^{n_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $\chi_u(X)$ ($m_i > 0$ pour tout i) alors $\mu_u(X) = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}...(X-\lambda_k)^{m_k}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $\mu_u(X)$ avec $0 < m_i \le n_i$ pour tout i.
- Si $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ alors $\chi_M(X) = \chi_{M_1}(X)\chi_{M_2}(X)$ et $\mu_M(X) = \text{ppcm}\{\mu_{M_1}(X), \mu_{M_2}(X)\}$

Exemple: Définir des endomorphisme $u_k, k = 1, ..., 4$ tel que $\chi_{u_k}(X) = (X-i)^4(X-2)^2$ et $\chi_{u_k}(X) = (X-i)^k(X-2)$.

Montrer que :

Théorème 0.5 *Avec les notations ci-dessus, soit* $F_i = \ker(u-\lambda_i)^{m_i}$. *Alors* F_i *est invariant par* u *et*

- $E = F_1 \oplus ... \oplus F_k$
- *Soit* u_i *la restriction de* u *à* F_i. *Alors le polynôme minimal de* u_i *est* $(X-\lambda_i)^{m_i}$ *et le polynôme caractéristique de* u_i *est* $(X-\lambda_i)^{n_i}$. *En particulier* $\dim(F_i) = n_i$ *pour tout* i.

Exemple. Dans cet exemple $K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$. Soit $u : K^4 \longrightarrow K^4$ défini dans la base canonique par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer χ_u, μ_u, déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est diagonalisable.

Montrer le :

Théorème 0.6 u *est diagonalisable si et seulement si* χ_u *est scindé et* μ_u *a toutes ses racines simples.*

Si $F \subset E$ est une sev stable par u alors μ_{u_1} divise μ_u oú u_1 est la restriction de u á F. En particulier si u est triangularisable alors u_1 est triangularisable. Si u est diagonalisable alors u_1 est diagonalisable

Un algorithme pour écrire la matrice de u en blocs de Jordan.

a) On suppose que $\mu_u(X) = X^k$ avec $k > 0$.

b) Pour $i = 1, ..., k$ soit $K_i = \text{Ker } u^i$. Démontrer que

$$0 \ne K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_k = E.$$

c) Montrer par l'absurde que pour tout $1 \le j < k$ on a $K_j \ne K_{j+1}$.

Indication: Faire d'abord le cas $j = k-1$.
Ensuite montrer que si $K_j = K_{j+1}$ pour un $j < k-1$ alors $K_j = K_{j+1} = ... = K_k$.

d) Soit $H_i \subset K_i$ un sev tel que $K_i = K_{i-1} \oplus H_i$,

1. montrer que pour tout $1 \leq s \leq i-1$ le morphisme restriction de u^s à H_i est injectif,
2. Montrer que $u^s(H_i) \subset K_{i-s}$ mais $u^s(H_i) \cap K_{i-s-1} = 0$.
3. Montrer que si $H_i = G_{i,1} \oplus ... \oplus G_{i,l}$ alors $u(H_i) = u(G_{i,1}) \oplus ... \oplus u(G_{i,l})$.

e) Soit $F_k \subset K_k$ tel que $K_k = K_{k-1} \oplus F_k$

1. Montrer que $u(F_k) \subset K_{k-1}$ et $u(F_k) \cap K_{k-2} = 0$, donc $K_{k-1} \supset K_{k-2} \oplus u(F_k)$.
2. Soit F_{k-1} un sev tel que
$$K_{k-1} = K_{k-2} \oplus u(F_k) \oplus F_{k-1}.$$
Définir de façon similaire F_{k-2} puis par récurrence les sev $F_{k-j+1}, j = 1, ..., k$, tels que :
$$(*)_j \quad K_{k-j+1} = K_{k-j} \oplus u^{j-1}(F_k) \oplus u^{j-2}(F_{k-1}) \oplus ... \oplus u(F_{k-j+2}) \oplus (F_{k-j+1}).$$

f) Conclure que

$$E = (F_k \oplus u(F_k) \oplus ... \oplus u^{k-1}(F_k)) \oplus (F_{k-1} \oplus ... \oplus u^{k-2}(F_{k-1})) \oplus (F_{k-2} \oplus ... \oplus u^{k-3}(F_{k-2})) \oplus ... \oplus F_1.$$

On pose $E_j = F_{k-j} \oplus u(F_{k-j}) \oplus ... \oplus u^{k-j-1}(F_{k-j})$,

f-1) Montrer que si $\{v_{j,1}, ..., v_{j,l_j}\}$ est une base de F_{k-j} alors pour tout $1 \leq s \leq k-j-1$ $\{u^s(v_{j,1}), ..., u^s(v_{j,l_j})\}$ est une base de $u^s(F_{k-j})$.
Pour $i = 1, ..., l_j$ soit $E_{j,i}$ le sev engendré par $\{v_{j,i}, u(v_{j,i}), ..., u^{k-j-1}(v_{j,i})\}$, vérifier que $E_{j,i}$ est invariant par u et que $E_j = \oplus_{i=1}^{l_j} E_{j,i}$. Écrire la matrice de la restriction de u à $E_{j,i}$.

f-2) Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$Mat(u, B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée $k_i \times k_i$, $k = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_s$ et

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) On suppose que $\mu_u(X) = (X-\lambda)^k$. Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$Mat(u, B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée $k_i \times k_i$, $k = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_s$ et

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(Écriture en blocs de Jordan)

Exemple . Dans cet exemple $K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$. Soit u un endomorphisme tel que $\mu_u(X) = X^2$, écrire la matrice de u sous forme de blocs de Jordan.

Exemple Dans cet exemple $K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$. Soit $u : K^4 \longrightarrow K^4$ défini dans la base canonique par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer χ_u, μ_u et déterminer une base de K^4 dans laquelle u s'écrira:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Dans cet exercice $K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel α et un polynôme $P(X)$, avec $P(0) \neq 0$ tels que:

$$E = \text{Ker } u^\alpha \oplus \text{Ker } P(u)$$

Considérer les cas particuliers.

Solution: Un polynôme a la racine 0 ou pas, si 0 est une racine de χ_u avec la multiplicité α nous pouvons écrire $\chi_u(X) = X^\alpha P(X)$ avec $P(0) \neq 0$. Remarquez que si 0 n'es pas racine de $\chi_u(X)$ alors u est injective, et comme on est en dimension finie u est bijective. On trouve le résultat par le lemme des noyaux. De même si $\chi_u(X) = X^\alpha$ alors u est nilpotent.

b) On pose $E_1 = \text{Ker } u^\alpha$ et u_1 la restriction de u à E_1. Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 tel que la matrice de u_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ est triangulaire avec des zéros sur la diagonale, on note cette matrice M_1.

Solution: Dans ce cas $\chi_{u_1}(X) = X^\alpha$, c'est un polynôme scindé ayant une seule racine 0, il est donc triangularisable sur K et il existe une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 tel que la matrice de u_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ est triangulaire avec des zéros sur la diagonale.

c) Déterminer une base convenable de E, on pose M la matrice de u dans cette base et $n = \dim(E)$. Définir une application continue $\phi : K \longrightarrow K^{n^2}$ tel que

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \text{GL}(n), \text{pour tout } t \neq 0.$$

Solution: Soit $\mathcal{B}_2$ base de Ker $P(u)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Notons M_2 la matrice de $u\,|_{\text{Ker } P(u)}$ dans la base $\mathcal{B}_2$. La matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$ sera $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$. Remarquez que $\chi_M(X) = X^r \chi_{M_2}(X)$ avec $r = \text{card}\mathcal{B}_1$, et comme M_2 est bijective $\chi_{M_2}(0) \neq 0$, il en suit que $r = \alpha$.
On pose

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} M_1 + tI_\alpha & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

Remarquez que ϕ est continue, $\det \phi(t) = t^\alpha \det M_2 \neq 0$ pour $t \neq 0$, et

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \text{GL}(n), \text{pour tout } t \neq 0.$$

Si $\alpha = 0$, ϕ est constante.

d) Montrer que $GL(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$.

Solution: On prend u un endomorphisme non bijectif, d'aprés la question précédente il existe une application continue $\phi : K \longrightarrow K^{n^2}$ tel que

$$\phi(0) = M, \phi(t) \in \text{GL}(n), \text{pour tout } t \neq 0.$$

Par définition de la continuité , pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|\, t \,| < \delta$ alors $\|\, \phi(t) - \phi(0) \,\| < \epsilon$, cela signifie que dans toute boule de centre u et de rayon ϵ il y a une infinité de morphismes bijectifs.

5) Endomorphismes normaux. Dans cet exercice $K = I\!R$, ou $K = \mathbb{C}$ et E est soit un espace hermitien ou un espace euclidien et u un endomorphime de E. Pour fixer le problème nous supposerons $K = \mathbb{C}$.

Rappelons que:

- L'adjoint u^* de u est l'unique morphisme tel que: $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$ et si B est une base orthonormée de E, alors $M_B(u^*) = ^t \overline{M_B(u)}$.
- $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(uv)^* = v^*u^*$ et $P(u)^* = P(u^*)$. $\chi_{u^*}(X) = \bar{\chi_u}(X)$ et $\lambda \in Spec(u) \Longleftrightarrow \bar{\lambda} \in Spec(u^*)$.
- u est normal si et seulement si $uu^* = u^*u$.
- u est hermitien si et seulement si $u = u^*$.
- u est unitaire si et seulement si $uu^* = u^*u = I$.
- Si $uv = vu$ alors pour tous polynômes $P(X), Q(X)$ on a $P(u)Q(v) = Q(v)P(u)$. Si u est normal alors $P(u)$ est normal pour tout polynôme $P(X)$. De même si Si u est hermitien alors $P(u)$ est hermitien pour tout polynôme $P(X)$.

a) Soit u un endomorphisme hermitien et $\mu_u = \prod_{i\in J}(X-\lambda_i)^{m_i}$ son polynôme minimal. On pose $m = max_{i\in J} m_i$ et $q(X) = \prod_{i\in J}(X-\lambda_i)$

Montrer que

i) $q^m(u) = 0$ et $q^k(u)$ est hermitien pour tout entier naturel k,

ii) $q(u) = 0$ par récurrence descendante,

iii) u est diagonalisable dans une base orthonomée et ses valeurs propres sont réelles.

aide: q est scindé et ses racines sont simples donc u est diagonalisable. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_s$ les valeurs propres de u et $E_1, ..., E_s$ les espaces propres de u correspondants. Pour montrer que $\lambda_i \in I\!R$ prendre $x \in E_i$non nul, alors $\langle \lambda_i x, x\rangle = \langle ux, x\rangle = ...$

Pour avoir une base orthonormée de vecteurs propres il suffira de vérifier que si $x \in E_i$ et $y \in E_j$ avec $i \neq j$ alors $\langle x, y\rangle = 0$, or $u(x) = \lambda_i x, u(y) = \lambda_j y$ on aura:

$$\lambda_i\langle x, y\rangle = \lambda_j\langle x, y\rangle$$

d'où $\langle x, y\rangle = 0$.

b) Considérons u, v deux endomorphismes de E. Montrer que si u, v sont diagonalisables et $uv = vu$ alors u et v diagonalisent simultanément. En particulier si u, v sont hermitiens ils diagonalisent simultanément sur une base orthonormée.

aide: Puisque u est diagonalisable E est somme directe de ses sous espaces propres pour u, montrer que si E_i est un sev propre de u correspondant a la valeur propre λ_i alors E_i est stable par v. En effet soit $x \in E_i$ alors $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda_i v(x)$ donc $v(x) \in E_i$. Et la restriction de v à E_i est diagonalisable. Pour terminer on diagonalise v sur chaque espace propre de u,et on aura diagonalisé v sur E. A compléter dans le cas orthonormé.

c) Soit u normal on pose

$$u_1 = \frac{u+u^*}{2}, u_2 = \frac{u-u^*}{2i}$$

Montrer que u_1, u_2 sont hermitiens, $u_1u_2 = u_2u_1$ et $u = u_1 + iu_2$. Conclure que u est diagonalisable. Traiter les cas particuliers o'ù $M_B u$ est symétrique ou antisymétrique.

aide: c'est une vérification , utiliser la question précedente.

Conséquence importante (cas $K = \mathbb{C}$): u est normal si et seulement si u se diagonalise dans une BON.

d) Traiter les questions précédentes dans le cas $K = I\!R$.

aide: Dans le cas réel, l'analogue d'endomorphisme hermitien est un endomorphisme symétrique, sa matrice M est symétrique dans une base orthonormée. Soit l'endomorphisme $\tilde{u} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par M alors il est clair que $\tilde{u}$ est hermitien et donc son polynôme minimal est scindé, toutes ses racines sont réelles de multiplicité 1, or $m_u(X) = m_{\tilde{u}}(X)$, ce qui prouve que u est diagonalisable (sur $I\!R$) , pour montrer que les espaces propres sont orthogonaux entre eux on repète la demonstration donnée en a).

aide: Dans le cas réel, si u est normal par complexification de u, on montre que $\tilde{u}$ est normal et donc son polynôme minimal est scindé, toutes ses racines sont de multiplicité 1, si $\tilde{u}(x) = \lambda x$, λ est non réel, et $\tilde{u}(\bar{x}) = \bar{\lambda}\bar{x}$ alors $y_1 = (x+\bar{x})/2, y_2 = (x-\bar{x})/(2i)$ sont un vecteur réels non nuls orthogonaux et $u(y_1) = ay_1 - by_2, u(y_2) = by_1 + ay_2$ avec $\lambda = a + ib$. Donc la matrice de u dans une BON par des blocs de taille ≤ 2. chaque bloc de taille deux étant de la forme:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = a + ib \in Spec(\tilde{u})$$

e) ici $K = \mathbb{C}$. Montrer que si u est normal alors $u^* = P(u)$, où P est un polynôme.

aide: Indication utiliser le polynôme de Lagrange P tel que $P(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$. et faire un calcul matriciel par blocs.

f) ici $K = \mathbb{C}$.Montrer que si u est unitaire alors u est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres ont module 1.

aide: Si u est unitaire, alors u est normal, reste à vérifier que ses valeurs propres ont module 1.

g) $(K = \mathbb{R})$ Montrer que si $u \in O(E)$ alors u est diagonalisable en blocs de taille ≤ 2 dans une base orthonormée. L'écrire.

aide: si $u \in O(E)$ alors u est unitaire. D'après la question d) u est diagonalisable en blocs de taille ≤ 2 dans une base orthonormée. et chaque bloc de taille 2 s'écrira

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = \cos\theta + i\sin\theta \in Spec(\tilde{u})$$

g) $(K = \mathbb{R})$ Montrer que $SO(E)$ est connexe par arcs et $O(E)$ a deux composantes connexes.

aide: Soit

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t\theta & \sin t\theta \\ -\sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}$$

alors $M(0) = I$, et $M(1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Utiliser la décomposition en blocs et la matrice $M(t)$ pour fabriquer un arc dans $SO(E)$ qui passe par u et par I.