Exercices d'Algèbre et Géométrie Marcel Morales

Pour le 28-09-05 et le 12-10-05

Dualité et théorème de Jordan.

E désignera un $K-$espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ le dual de E

1) Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E, montrer que les formes linéaires $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ définies par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout i, j, est une base de E^*.

2) Reciproquement, soit $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ une base de E^*, montrer qu'il existe $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une base de E tel que $\varphi_i = v_i^*$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

3) Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel de E, on pose

$$F^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \varphi(v) = 0 \forall v \in F\}.$$

Montrer que

$$\dim F + \dim F^\perp = n.$$

4) Soit $G \subset E^*$ un sous espace vectoriel de E^*, on pose

$$G^\perp = \{v \in E \mid \varphi(v) = 0 \forall \varphi \in G\}.$$

Montrer que

$$\dim G + \dim G^\perp = n.$$

5) Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme. On pose ${}^t u(\varphi)(v) = \varphi(v)$, vérifier que ${}^t u$ est un endomorphisme de E^*. Déterminer Ker ${}^t u$ et Im${}^t u$.

6) Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme, et $G \subset E^*$ un sous espace vectoriel de E^* stable par ${}^t u$, vérifier que $G^\perp$ est stable par u.

De même si et $F \subset E$ un sous espace vectoriel de E stable par u, vérifier que $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

7) On suppose K algébriquement clos, par exemple $K = \mathbb{C}$, et $\mu_u(X) = (X - \lambda)^k$. Nous avons vu (en juin) que

Il existe $x \in E$ tel que $(u - \lambda I)^{k-1}(x) \neq 0$.

Que $x, (u - \lambda I)^1(x), \ldots, (u - \lambda I)^{k-1}(x)$ sont linéairement independants.

Si V est le sous espace vectoriel engendré par $x, (u - \lambda I)^1(x), \ldots, (u - \lambda I)^{k-1}(x)$, alors la matrice de $u_{|V}$ dans la base $x, (u - \lambda I)^1(x), \ldots, (u - \lambda I)^{k-1}(x)$ peut s'écrire:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

et $m_u = m_{u_{|V}}$ Montrer que $V = K[u](x)$.

8) Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(u^i(x)) = 0$ si $0 \leq i \leq k-2$ et $\varphi(u^{k-1}(x)) \neq 0$.

9) Montrer que $K[{}^t u](\varphi) \subset E^*$ est un sous espace vectoriel de dimension k, stable par ${}^t u$.

10) Montrer que $K[{}^t u](\varphi)^\perp$ est stable par u et que

$$E = K[u](x) \oplus K[{}^t u](\varphi)^\perp$$

11) Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$Mat(u, B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}$$

où A_i est une matrice carrée $k_i \times k_i$, $k = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_s$ et

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$