Marcel Morales, Agrégation Interne maths.

Quelques remarques à propos de la leçon opérations sur les lignes et les colonnes:

1. Les opérations sur les lignes est le plus appropié, car quand on résout un système affine $AX = B$, cela revient à faire des opérations sur les équations.

2. Pour résoudre un système affine par la méthode de Gauss, il faut opérer sur les lignes de la matrice,

3. Pour calculer l'inverse d'une matrice, il faut opérer sur les lignes de la matrice, ou sur les colonnes, mais ne pas mélanger, sinon on ne trouve pas le bon résultat:

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deuxième colonne - 2 fois première colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(-1) fois deuxième colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

deuxième ligne - première ligne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Or

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rappel de l'algorithme de Gauss:

Soit A une matrice carrée $n \times n$.

Par des opérations élémentaires sur les lignes de A, il existe P, produit de permutations, dilatations et transvections, tel que PA soit une matrice triangulaire supérieure.

La preuve se fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$, il n' y a rien à prouver.

Supposons l'énoncé vrai pour $n - 1$.

Si la première colonne est nulle alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

où A' est une matrice $(n-1) \times (n-1)$, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à A' et conclure.

Si la première colonne n'est pas nulle, supposons que $a_{k,1} \neq 0$ alors on permute la première ligne et la $k-$ième ligne, puis avec les transvections $L_i - \dfrac{a_{i,1}}{a_{k,1}} L_1$, pour $i = 2, ..., n$, on obtient la matrice

$$P_1 A = \begin{pmatrix} a_{k,1} & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

où A' est une matrice $(n-1) \times (n-1)$, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à A' et conclure.

Remarque 1

1. *lorsque le premier vecteur colonne n'est pas nul, avec $a_{1,1} = 0$ et $a_{k,1} \neq 0$, par application de la transvection $L_1 + L_k$ on pourra écrire $P_1 A = A'$ avec $a'_{1,1} \neq 0$. C'est cet argument que l'on utilise dans le cas où A est inversible et qui montre que on n'a pas besoin de permutations de lignes, autrement dit les transvections et les dilatations engendrent $GL(n, K)$. Notez que la matrice de la transvection utilisée est triangulaire supérieure.*

2. *Les hypothèses pour la décomposition $A = LU$: tous les mineurs principaux de A sont inversibles, garantit que dans la méthode de Gauss on peut toujours prendre comme Pivot la première ligne, cela revient à dire que on multiplie à gauche par des matrices triangulaires inférieures.*