Algèbre et Géométrie **Exercice supplémentaire 08-10-08** **Marcel Morales**

1. (a) Soit ϑ un nombre réel, distinct de 0 modulo π, et u le morphisme $u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, défini dans la base canonique par la matrice
$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$
où
$$M_1 = M_2 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$
Calculer le polynôme minimal de u.

   (b) Déterminer les sous espaces vectoriels $V \subseteq \mathbb{R}^4$ invariants (globalement) par u.

2. Soit ϑ un nombre réel, distinct de 0 modulo π, et u le morphisme $u : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$, défini dans la base canonique par la matrice
$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix},$$
où
$$M_1 = M_2 = M_3 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$
Déterminer les sous espaces vectoriels $V \subseteq \mathbb{R}^4$ invariants (globalement) par u.

3. (a) Soit ϑ_1, ϑ_2 des nombres réels tels que $\vartheta_1 \not\equiv \pm\vartheta_2 \mathrm{mod}\ 2\pi$ et tous les deux distincts de 0 modulo π. Soit u le morphisme $u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, défini dans la base canonique par la matrice
$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$
où
$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & -\sin\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2 & -\sin\vartheta_2 \\ \sin\vartheta_2 & \cos\vartheta_2 \end{pmatrix}.$$
Calculer le polynôme minimal de u.

   (b) Déterminer les sous espaces vectoriels $V \subseteq \mathbb{R}^4$ invariants (globalement) par u.

4. Soit $\vartheta_1, ..., \vartheta_n$ des nombres réels tels que $\vartheta_i \not\equiv \pm\vartheta_j \mathrm{mod}\ 2\pi$ pour $i \neq j$ et ϑ_i distinct de 0 modulo π pour tout i. Soit u le morphisme $u : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, défini dans la base canonique par la matrice
$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & M_n \end{pmatrix},$$
où
$$M_i = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i \end{pmatrix}.$$
Déterminer les sous espaces vectoriels $V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ invariants (globalement) par u.