Préparation à l'agrégation interne de mathématiques
Aide à la résolution pour les exercices du mercredi 14 novembre 2007
Jean-Marie Monier

Exercice 1

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

1) Sur $I =]-\infty\,;-1[$ ou $I =]-1\,;1[$ ou $I =]1\,;+\infty[$, normaliser (e) en (E), associer l'équation sans second membre, appliquer le cours.

La solution générale de (E) sur I est $y : x \longmapsto x - 1 + \lambda \dfrac{x-1}{x+1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

2) Étudier les raccords en -1 et en 1.

Exercice 2

Soit f convenant.
Obtenir :

$$\forall x \in]-1\,;1[, \quad f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x) = 0.$$

Considérer $g : x \longmapsto f(x)f(-x)$.
En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1\,;1[, \quad f'(x) - \frac{1}{C(1-x^2)} f(x) = 0.$$

Résoudre l'équation différentielle obtenue.

Réponse : $\left\{ f : x \longmapsto \lambda \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2\lambda^2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^* \right\}$.

Exercice 3

Il s'agit d'un système différentiel linéaire du premier ordre, à coefficients constants, avec second membre.

Considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ du système, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ l'inconnue, $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ le second membre.

Réduire A. On obtient :

$$A = PDP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $U = P^{-1}X$, se ramener à résoudre $U' = DU + P^{-1}B$.

Réponse : $\begin{cases} x(t) = 3 - \sin t - \cos t + \lambda e^{-t} + \mu e^{-t} + \nu e^{t} \\[2mm] y(t) = 2 - \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{3}{2}\cos t + \lambda e^{-t} + \nu e^{t} \\[2mm] z(t) = 2 - \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{2}\cos t + \mu e^{-t} + \nu e^{t} \end{cases} \qquad (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3.$

Exercice 4

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients variables, avec second membre.

Associer l'équation sans second membre. Remarquer que $x \longmapsto x$ en est solution et utiliser la méthode de Lagrange.

En déduire la solution générale de l'équation sans second membre sur $]0\,;1[$:

$$x \longmapsto \lambda x + \mu\Big(-1 + \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, l'équation avec second membre admet une solution évidente.

Exercice 5

1) Chercher les solutions de (C) ne s'annulant en aucun point, en divisant par $\big(y(x)\big)^2$.

On obtient : $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto y(x) = \dfrac{1}{3 - \sin x}$.

2) Appliquer le théorème de Cauchy et Lipschitz pour montrer que (C) admet une solution et une seule.

* *